研究通讯

反链方法及其在正则三值逻辑函数计数上的应用

为适应不确定推理之需要, Mukaidono^[1,2] 提出并系统地研究了正则三值逻辑函数的理论. 这类函数个数的计算十分复杂, 至今仅对自变量个数小于 7 的情形提出了若干结果. 本文将反链方法与该类计算联系起来, 从而为解决该类问题提供了一种新的可能途径.

定义 1^[1] 设 $E = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. 在 E 上除通常序“ $\leq$ ”外, 再定义偏序“ $\prec$ ”为: $0 \prec \frac{1}{2}, 1 \prec \frac{1}{2}, i \prec i$. 这两种序在 E^n 上各诱导出相应的乘积序, 仍记为“ $\leq$ ”或“ $\prec$ ”. 映射 $f: E^n \rightarrow E$ 称正则函数, 若 $\forall a, b \in E^n$, 当 $a \prec b$ 时 $f(a) \prec f(b)$. 正则函数 $f: E^n \rightarrow E$ 称单调函数, $\forall a, b \in E^n$, 当 $a \leq b$ 时 $f(a) \leq f(b)$.

以下用 $F(n, R)$ 记全体 n 元正则函数之集, 用 $F(n, M)$ 记全体 n 元单调函数之集.

定义 2 设 $(P, \leq)$ 是非空偏序集, $a, b \in P$. 若有 $c \in P$ 使 $c \leq a$ 且 $c \leq b$, 则称 a 与 b 有公根. 设 A 与 B 是 P 中的反链, 若 $\forall a \in A$ 和 $\forall b \in B$, a 与 b 有(无)公根, 则称序对 (A, B) 为全(无)公根反链对.

以下用 $E(n)$ 表示 $(E^n, \prec)$ 中全体无公根反链对之集. 令 $N(n) = \{1, \dots, n\}$, $W(n) = \{L: L \subset N(n), L \neq \emptyset\}$, 用 $N(n, C)$ 表示 $(W(n), \subset)$ 中全体全公根反链对之集.

定义 3 设 $a = (a_1, \dots, a_n) \in (E^n, \prec)$.

若 a 的坐标全不是 1 且有等于 0 者, 则称 a 为 0 型元. 若 a 的坐标全不是 0 且有等于 1 者, 则称 a 为 1 型元. $(E^n, \prec)$ 中的反链对 (A, B) 称 $(0, 1)$ 型的, 若 A 中 $(B$ 中)的元都是 0 型(1 型)元.

以下用 $E(n, 01)$ 表示 $(E^n, \prec)$ 中全体 $(0, 1)$ 型无公根反链对之集.

定理 1 $|E(n, 01)| = |N(n, C)|$.

定理 2 $|F(n, R)| = |E(n)|$.

定理 3 $|F(n, M)| = |N(n, C)| + 2$.

最后, 用 $ATC(n)$ 表示 $(W(n), \subset)$ 中全体反链之集, 则可证明

定理 4 $4|ATC(n)| - 2 \leq |F(n, M)| \leq |ATC(n)|^2 + 2$.

推论 $|ATC(n)| \leq \frac{1}{4}(|F(n, M)| + 2)$.

$|ATC(n)| \geq \sqrt{|F(n, M)|} - 2$.

参 考 文 献

- 1 Mukaidono M. Regular ternary logic functions-ternary logic functions suitable for treating ambiguity. Proc IEEE 13th Int Symp Multiple-Valued Logic, 1983, 286~291
- 2 Mukaidono M. Regular ternary logic functions. IEEE Trans Comput, 1986, C-35:179~183

王国俊

(陕西师范大学数学系, 西安 710062)

再论有限群中元的阶之集

设 G 为有限群, $\pi_e(G)$ 为 G 的元的阶之集. 对正整数集的任一子集 m , 令 $h(m)$ 为

满足 $\pi_e(G) = m$ 的有限群 G 的同构类类数. 文献[1]中作者提出了如下猜想: 对正整数集的所有子集, $h(m) \in \{0, 1, \infty\}$. 最近, Mazurov^[2] 证明了如下结果: 如果 $m = \pi_e(L_3(5))$, 则 $h(m) = 2$. 于是他给出了上述猜想的一个否定回答. 本文将给出 $h(m) = 2$ 的另一个例子.

定理 设 G 是有限群. 则 $\pi_e(G) = \pi_e(L_3(9))$, 当且仅当 $G \cong L_3(9)$ 或 $L_3(9). 2_1$.

由于没有找到集合 m 满足 $h(m) = 3$, 我们提出如下问题.

问题 是否存在一个正整数 k , 使得对正整数集的任一子集 m , 总有 $h(m) \in \{0,$

$1, 2, \dots, k, \infty\}$? 如果存在, 这样的界 k 为多少?

参 考 文 献

- 1 Praeger C E, Shi W J. A characterization of some alternating and symmetric groups. *Comm Algebra*, 1994, 22(5): 1 507~1 530
- 2 Mazurov V D. On the set of orders of elements in a finite group. *Algebra and Logic*, 1994, 33(1): 49~55

千吉良直纪

(日本筑波大学数学研究所, Ibaraki 305)

施武杰

(西南师范大学数学研究所, 重庆 630715)

周期半群环的单位元的存在性 *

Ponizovskii 在文献[1]中提出下面的问题:

问题 什么样的半群环是有单位元的环?

李方在文献[2]中研究了纯正半群环的情形, 本文考虑周期半群环的情形, 将周期半群环的单位元存在性问题归结到幂等元生成的子半群环的单位元存在性问题, 符号同文献[2].

本文的主要结果如下:

定理 设 S 是周期半群. 则 RS 含单位元当且仅当 $R\langle E(S) \rangle$ 含单位元, 且存在 $E(S)$ 的一个有限子集 U , 使得 $S = SU = US$, 在此条件下, 有 $I_{RS} = I_{R\langle E(S) \rangle}$.

此定理的证明难点在于下面的引理的证明.

引理 设 S 是周期半群. 若 RS 含单位元, 则 $R\langle E(S) \rangle$ 含单位元.

引理的证明大意: 假设集合 $A = \{T: T \text{ 是周期半群, } RT \text{ 含单位元, 但 } R\langle E(T) \rangle \text{ 不}$

含单位元 $\} \neq \emptyset$, 我们由此推出矛盾:

令 $B = \{|\text{supp}(I_{RT})|: T \in A\}$. 则 B 中必存在最小元 k . 设 $L \in A$, 使得 $|\text{supp}(I_{RL})| = k$, 令 $S = \langle \text{supp}(I_{RL}) \rangle$, 则 $S \in A$, 且 $I_{RL} = I_{RS}$.

令 $C = \{D: D \text{ 是 } S \text{ 的理想, } \emptyset = D \cap \text{supp}(I_{RS})\}$. 若 $C \neq \emptyset$, 则由佐恩引理知 C 中必存在极大元 M , 且令 $S_1 = S/M$. 若 $C = \emptyset$, 则令 $S_1 = S$. 易知 $S_1 \in A$, 且 $|\text{supp}(I_{RS_1})| = k$. 由 S_1 的定义可证 S_1 的所有非零理想的交 K 非平凡, 因而 K 是 0-极小理想或极小理想. 由此可证 $R\langle E(S_1) \rangle$ 含单位元. 与 $S_1 \in A$ 矛盾.

致谢 感谢郭聿琦教授的悉心指导.

参 考 文 献

- 1 Ponizovskii J S. Semigroup ring. *Semigroup Forum*,

* 国家自然科学基金资助项目