基于时刻表的城市地铁客流均衡分配模型及方法

陈伯阳, 四兵锋*, 蒋明清, 杨小宝

北京交通大学城市交通复杂系统理论与技术教育部重点实验室, 北京 100044

* E-mail: bfsi@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2014-12-31; 接受日期: 2015-07-12; 网络出版日期: 2015-11-24

国家重点基础研究发展计划(“973”计划)(批准号: 2012CB725400)和国家自然科学基金(批准号: 71210001, 71571013)资助项目

摘要 运用网络扩展技术, 结合城市地铁线网结构和列车时刻表信息, 对空间网络的物理站点和区段在时间维度上进行扩展, 同时, 考虑了乘客在不同线路之间换乘的实际约束, 构造了城市地铁的时空网络拓扑结构, 并给出了针对地铁时空扩展网络的改进最短路搜索算法. 在此基础上, 分析和研究了地铁乘客路径选择行为的时效性, 考虑了乘车时间、换乘因素以及车内拥挤因素, 构建了基于地铁时空扩展网络的路径广义费用模型, 提出了基于时刻表的地铁网络客流平衡分配模型, 并给出了求解算法. 最后, 通过一个简单算例对模型及算法的可行性和有效性进行了分析和验证.

关键词
地铁网络
时刻表
时空网络
用户平衡
最短路

1 引言

目前, 我国城市均采用自动售检票系统(AFC)对地铁乘客进行出行管理, 通过该系统, 可准确记录乘客的进出站信息, 从而可推算出地铁网络的实时 O-D 数据. 然而, 目前 AFC 系统采用不同线路间“一票换乘”的无缝换乘模式, 无法得到乘客的换乘信息以及路径信息. 随着一些城市地铁网络规模的不断扩大, 乘客地铁出行的路径选择的范围也随之越来越大. 在这样的条件下, 准确把握地铁乘客的路径选择, 并科学地计算 O-D 需求在地铁网络上的时空分布, 对于城市地铁“多运营商、多线路”网络一体化运营管理具有重要意义.

目前, 已有的一些研究^[1-3]直接借鉴了城市道路网络的静态配流方法, 而没有考虑地铁网络的特征. 有的研究^[4]考虑了地铁出行的特点, 在路径费用中考虑了车内时间、换乘时间和换乘次数等因素, 并采用

传统模型提出了城市地铁客流分配方法. 然而, 这些方法均没有考虑城市地铁客流的动态特征, 所得到的配流结果也只是 O-D 需求在网络上的空间分布, 而无法得到客流需求在地铁网络上的时间分布. 相对于传统的静态交通配流, 动态配流的特点是把路段阻抗与流量的二维问题拓展为路段阻抗与流量及时间的三维问题. 在过去的几十年中, 国内外专家学者对常规公交的动态配流问题进行了大量研究, 提出了很多模型. 例如, Alfa 和 Chen^[5]考虑了乘客选择公交线路的随机性, 建立了一个数学模型来计算公交需求的时空分布, 但该模型只针对一条公交线路; Tian 等人^[6]基于 Alfa 和 Chen 的研究, 考虑了车内拥挤因素, 分析了公交平衡流的特性, 提出了一个离散排队模型, 但该模型只适用于有一个目的地的公交网络; Friedrich 等人^[7]采用分支定界法来确定乘客可能选择的公交路径集合, 在此基础上, 提出了一个基于时刻表的公交动态配流模型; Poon^[8]假设所有乘客

引用格式: 陈伯阳, 四兵锋, 蒋明清, 等. 基于时刻表的城市地铁客流均衡分配模型及方法. 中国科学: 技术科学, 2015, 45: 1269–1278
Chen B Y, Si B F, Jiang M Q, et al. Schedule-based equilibrium assignment model and algorithm for urban subway network (in Chinese). Sci Sin Tech, 2015, 45: 1269–1278, doi: 10.1360/N092014-00426

可得到准确的公交出行信息, 考虑了车内时间、等车时间、换乘时间和换乘惩罚等因素, 构造了公交出行的广义费用函数, 提出了基于时刻表的平衡模型和算法, 并采用仿真方法进行了求解; Nielsen 和 Frederiksen^[9]考虑了公交站点上的拥挤对需求分布的影响, 基于乘客先到先上的原则, 提出了动态用户平衡模型, 该模型可描述车辆到达和离开站点的随机性; Schmöcker 等人^[10]考虑了公交车辆的能力约束, 给出了由于车辆过于拥挤而导致乘客无法上车的概率, 提出了基于发车间隔的动态流量分配模型; 同样的, Hamdouch 和 Lawphongpanich^[11]考虑了公交时刻表以及公交车辆的容量限制, 建立了针对公交网络的动态用户平衡模型; Nuzzolo 等人^[12]采用历时图对公交网络进行了描述, 考虑了公交车辆的容量限制, 提出了一个基于时刻表的动态配流模型. 然而, 已有文献很少对城市地铁网络的动态配流问题展开研究.

目前, 地铁乘客均需要刷卡进站和出站, 通过对地铁 AFC 系统的刷卡数据进行统计分析, 可以得到任意时间段内的不同站间的动态 O-D 矩阵. 乘客进入到地铁网络中后, 需要等待进站的列车, 列车进站后在站台的乘客会批量乘车出行, 因此, 乘客在地铁网络中的出行是随着列车的运行而实现的. 通常, 由于地铁列车的运行特性, 列车的进出站时间可以按照列车时刻表来运行, 所以, 乘客在地铁网络中的出行也是遵循列车时刻表来完成的. 可以看出, 相对于城市地面公交系统而言, 城市地铁网络的动态 O-D 需求、列车时刻表信息更加容易采集, 并且这两者之间的关联性更容易推导. 通过基于时刻表的地铁网络动态客流分配方法, 可得出不同时段内的各班次列车的载客量以及站台的等车人数, 这对于城市地铁网络的一体化运营管理具有非常重要的现实意义.

本文基于已有研究, 充分考虑了城市地铁网络的结构特征以及地铁客流的时效性, 提出了针对地铁网络的基于时刻表的客流平衡分配模型及算法. 首先, 基于地铁网络的空间拓扑结构, 结合列车时刻表数据, 采用图论方法, 提出了地铁时空网络拓展模型, 基于乘客出行行为分析, 对时空网络中的有效路径进行定义, 同时, 还给出了针对地铁时空扩展网络的改进最短路搜索算法. 其次, 充分考虑了影响乘客出行选择的主要因素, 基于地铁时空扩展网络, 构建了基于地铁时空扩展网络的路径广义费用模型, 在此基础上, 提出了基于时刻表的地铁网络客流平衡

分配模型, 并采用 MSA 算法进行求解. 最后, 通过一个简单算例对模型及算法进行了验证和分析.

2 基于时刻表的地铁时空网络

构建基于列车时刻表的城市地铁时空扩展网络的核心是: 将城市地铁线路空间网络基于列车运行时刻表进行时间维的扩展, 在原始二维空间网络上加入一个时间轴, 时空网络中的每个节点都代表了列车实际运行的时空点, 而时空网络中的弧则表示乘客在地铁出行中不同时间之间的关系. 换句话说, 地铁时空网络描述了运营线路的各次列车在时间上的关联. 构建地铁时空拓展网络的步骤如下.

步骤 1: 对物理站点在时间轴上进行扩展, 扩展方法为根据列车发车时刻表, 对所有经过该物理站点的所有线路的各个车次, 对到站时点和离站时点分别用扩展节点表示.

步骤 2: 将同一物理节点上的同一线路的同次列车的到站时点和离站时点通过停车弧连接起来.

步骤 3: 通过列车运行弧, 将相同线路的同班次列车在相邻站点的离站时点和到站时点连接起来.

步骤 4: 将同一物理站点的不同线路列车的到站时点和离站时点通过换乘弧连接起来.

在此, 用图 $G(N, A, L, T)$ 表示拓展后的地铁时空网络, 其中 N 表示地铁站点集合; A 表示地铁运行区段集合, 在这里, 区段的概念表示地铁网络中相邻站点之间的物理连接; L 表示线路集合; T 表示所有列车进站、离站的时点集合. 在地铁时空扩展网络中, 包括 3 个基本元素.

(1) 时空节点

在时空拓展网络中, 每个节点有 3 个标签: 一个标签表示物理站点名, 一个表示所属线路, 还有一个是时间状态. 一般情况下, 如果经过一个站点的线路有 x 条, 每条线路有 y 次列车, 则该物理站点将拓展为 $x \times y$ 个时空节点. 可用符号 i_l^t 表示通过站点 i 的属于线路 l 的列车在 t 时点的时空节点, 其中 $i \in N, l \in L, t \in T$.

(2) 时空弧

在时空拓展网络中, 包含 3 种类型的时空弧, 即列车运行弧、换乘弧和停车弧.

① 用符号 a_{i_1, i_2}^l 表示属于线路 l 的列车在区间 a

上从时点 t_1 到时点 t_2 的列车运行弧, 其中 $a \in A, l \in L, t_1, t_2 \in T$, 这类时空弧的两个端点为时空节点 $i_{t_1}^l$ 和 $j_{t_2}^l$, $i, j \in N$ 对应于列车运行区间 a 的两个物理站点.

② 用符号 $i_{t_1, t_2}^{l_1, l_2}$ 表示换乘站点 i 处在时点 t_1 和 t_2 之间从线路 l_1 换乘到 l_2 的换乘弧, 其中 $i \in N, l_1, l_2 \in L, t_1, t_2 \in T$, 这类时空弧的两个端点为时空节点 $i_{t_1}^{l_1}$ 和 $i_{t_2}^{l_2}$, 且这两个端点所对用的时点 t_1 和 t_2 须满足如下条件:

$$t_1 + t_i^{l_1, l_2} < t_2, \tag{1}$$

其中, $t_i^{l_1, l_2}$ 表示在换乘站点 i 从线路 l_1 换乘到线路 l_2 所需要的步行时间. 该条件实际上就是不同线路之间的换乘条件.

③ 用符号 i_{t_1, t_2}^l 表示线路 l 的列车在时点 t_1 进入站点 i 并于时点 t_2 驶离该站点的停车时空弧, 其中 $l \in L, i \in N, t_1, t_2 \in T$, 这类时空弧的两个端点为时空节点 $i_{t_1}^l$ 和 $i_{t_2}^l$.

(3) 时空路径

在时空扩展网络中, 任意一对 O-D 站点之间的一串连通的时空弧的有序排列叫做 O-D 之间的时空路径, 时空路径一般是由运行弧、换乘弧和等车弧组成的. 在时空拓展网络中, 并不是所有的时空连通路程都是可行路径. 可行路径除了要满足连通条件外, 其时空关系还必须与实际情况相符合. 可行的时空路径需满足以下 3 个条件.

① 换乘弧不能连续出现, 或者属于同一物理站点的时空节点不可以连续出现超过 2 次, 也就是说, 在同一站点不允许发生 2 次换乘. 例如, 包含时空节点序列 $i_{t_1}^{l_1} \rightarrow i_{t_2}^{l_2} \rightarrow i_{t_3}^{l_3}$ 的连通路程就不是可行路径.

② 属于同一线路的列车运行弧不能间断出现, 或者属于同一线路的时空节点不能间隔出现, 也就是说, 乘客不会在乘坐某条线路后, 换乘另一条线路, 然后再换回该线路. 例如, 包含时空节点序列 $i_{t_1}^{l_1} \rightarrow i_{t_2}^{l_2} \rightarrow j_{t_3}^{l_2} \rightarrow j_{t_4}^{l_1}$ 的连通路程就不是可行路径.

③ 通常, 乘客在地铁出行中, 换乘次数不会超过 3 次, 因此, 时空网络中的可行路径上所包含的换乘弧的总数也不能超过 3 次.

在此, 用一个简单例子来说明地铁时空网络的构建过程. 在北京地铁中, 假设乘客从 4 号线的国家图书馆站(国图站)出发到达 2 号线和平门站, 假定只

考虑地铁 2 号线和 4 号线, 换乘站为西直门站或宣武门站, 地铁物理线网如图 1 所示.

可以看出, 在物理网络中, 乘客从起点到终点需要至少一次换乘, 存在 2 条空间换乘路径, 即乘客可在西直门站或宣武门站进行换乘, 换乘方式均为从 4 号线换乘为 2 号线. 假定列车停站时间包含在列车运行时间内, 即乘客需在列车离站时间之前到达站台方可乘车. 此外, 根据实际调查, 乘客在西直门站由 4 号线换乘 2 号线的时间为 7 min, 在宣武门站由 4 号线换乘 2 号线的时间为 4 min. 这 2 条线路在某时段内的列车时刻表由表 1 和 2 给出.

根据前面提出的地铁时空拓展网络构建方法, 结合表 1 和 2 给出列车时刻表信息, 对图 1 所示的空间网络进行扩展. 首先, 对物理节点在时间轴上进行扩展, 根据表 1 和 2 所给的 2 号线和 4 号线的列车运行时刻信息, 4 个物理节点国家图书馆站、和平门站、西直门站和宣武门站可以扩展为 24 个时空节点, 如图 2(a)所示. 然后, 将同一线路的同次列车在相邻物理节点上的离站时点通过列车运行弧连接起来, 如图 2(b)所示. 最后, 将同一物理站点上的满足换乘条件(1)的不同线路列车的时空点通过换乘弧连接起来, 形成地铁时空扩展网络, 如图 2(c)所示. 从上面的地

图 1 地铁空间网络

表 1 某时段内地铁 2 号线列车时刻表

车次	西直门站		宣武门站		和平门站	
	进站	离站	进站	离站	进站	离站
1	5:22	5:24	5:33	5:35	5:36	5:37
2	5:27	5:29	5:38	5:40	5:41	5:42
3	5:32	5:34	5:43	5:45	5:46	5:47
4	5:37	5:39	5:48	5:50	5:51	5:52

表 2 某时段内地铁 4 号线列车时刻表

车次	国家图书馆站		西直门站		宣武门站	
	进站	离站	进站	离站	进站	离站
1	5:18	5:19	5:23	5:25	5:35	5:37
2	5:24	5:25	5:29	5:31	5:41	5:43
3	5:30	5:31	5:35	5:37	5:47	5:49
4	5:36	5:37	5:41	5:43	5:53	5:55

图2 地铁时空扩展网络的构建

(a) 时空节点; (b) 列车运行弧; (c) 换乘弧; (d) 时空路径

铁时空网络中可以看出, 在 5:19~5:52 这一时段内, 乘客从国图站出发到和平门站, 共有 6 条时空路径可以选择, 如图 2(d)所示。

3 时空弧的费用分析

根据前面的介绍, 在地铁时空网络中, 存在 3 类时空弧, 分别为列车运行弧、换乘弧和停车弧, 下面分别对这 3 类时空弧上的费用进行分析。

(1) 列车运行弧

列车运行弧上的费用就是乘客在列车行驶中所承担的费用, 此类费用由 2 部分组成, 分别是列车行驶时间和车内拥挤。列车行驶时间可由时刻表确定, 列车在运行弧 a_{i_1, i_2}^l 上的列车行驶时间 $t_{a, l}^{i_1, i_2}$ 可由下式计算:

$$t_{a, l}^{i_1, i_2} = t_2 - t_1. \quad (2)$$

如果列车内乘客数量较大, 受列车容量的限制,

会引起车内乘客不同程度的拥挤。具体来说, 当乘客数量小于列车座位数时, 没有拥挤; 当乘客数量超过座位数且不断增大的时候, 乘客的不舒适感将不断增强。列车运行弧 a_{i_1, i_2}^l 上的拥挤系数 $\rho_{a, l}^{i_1, i_2}$ 可由下式计算^[2]:

$$\rho_{a, l}^{i_1, i_2}(x_{a, l}^{i_1, i_2}) = \begin{cases} 0, & x_{a, l}^{i_1, i_2} \leq Z_l, \\ \frac{\alpha(x_{a, l}^{i_1, i_2} - Z_l)}{Z_l}, & \text{if } C_l \leq x_{a, l}^{i_1, i_2} < Z_l, \\ \frac{\alpha(x_{a, l}^{i_1, i_2} - Z_l)}{Z_l} + \frac{\beta(x_{a, l}^{i_1, i_2} - C_l)}{C_l}, & x_{a, l}^{i_1, i_2} > C_l, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $x_{a, l}^{i_1, i_2}$ 表示时空网络上的列车运行弧 a_{i_1, i_2}^l 上的流量; Z_l 和 C_l 分别表示线路 l 的列车座位数和列车最大容量; α 和 β 是参数, 可由实际数据统计回归得到。

综合考虑列车运行时间和车内拥挤, 则乘客在列车运行弧上的费用 $c_{a,l}^{t_1,t_2}$ 可由下式计算:

$$c_{a,l}^{t_1,t_2} = (t_2 - t_1)(1 + \rho_{a,l}^{t_1,t_2}). \quad (4)$$

(2) 换乘弧

在时空扩展网络中, 换乘弧上的费用包括换乘时间和换乘次数两个因素, 换乘弧上的换乘时间 $t_i^{t_1,t_2}$ 可表示为

$$t_{i,t_1,t_2}^{t_1,t_2} = t_2 - t_1. \quad (5)$$

此外, 对乘客而言, 换乘时间相对于乘车时间其心理费用更大, 也就是说, 换乘时间对乘客的感知费用要大于其实际时间. 因此, 换乘弧上的换乘时间的感知费用 $\tilde{t}_i^{t_1,t_2}$ 可表示为

$$\tilde{t}_{i,t_1,t_2}^{t_1,t_2} = \theta \cdot t_{i,t_1,t_2}^{t_1,t_2}, \quad (6)$$

其中, $\theta > 0$ 为参数, 可通过调查数据进行拟合估计.

换乘次数所产生的乘客感知费用表现在: 乘客每增加 1 次换乘, 就要付出除换乘时间感知费用以外的心理费用. 假定用 ω 表示乘客增加 1 次换乘的额外费用(可通过对调查数据的统计分析获取). 这样, 综合考虑以上因素, 换乘弧上的总费用 $c_{i,t_1,t_2}^{t_1,t_2}$ 由下式进行计算:

$$c_{i,t_1,t_2}^{t_1,t_2} = \tilde{t}_{i,t_1,t_2}^{t_1,t_2} + \omega = \theta(t_2 - t_1) + \omega. \quad (7)$$

(3) 停车弧

停车弧上的费用就是列车停站时所花费的时间, 同列车运行弧上的费用类似, 这种弧上的费用由两部分组成, 分别是列车停站时间和车内拥挤. 同样的, 乘客在停车弧上的费用 $c_{i,l}^{t_1,t_2}$ 可由下式计算:

$$c_{i,l}^{t_1,t_2} = (t_2 - t_1)(1 + \rho_{i,l}^{t_1,t_2}). \quad (8)$$

4 基于时空网络的平衡配流模型及算法

采用上面的地铁时空网络拓展方法, 可将乘客地铁出行中的时间和空间变换通过时空路径来表示, 这样, 地铁网络的动态客流分配问题就可以转换为简单的静态配流问题.

首先, 为了描述的方便, 对时空网络中的每个节点均用一个符号来表示, 如 m ; 用 $m \rightarrow n$ 表示连接时空节点 m 和 n 的时空弧; 用 c_{mn} 表示时空弧 $m \rightarrow n$ 上的费用. 同一般的交通网络类似, 在地铁时空扩展网络中, 乘客流量需满足以下 2 个基本约束条件:

(1) 时空弧 $m \rightarrow n$ 上的流量 x_{mn} 和 O-D 对 $r-s$ 之间的时空路径 k 上的流量 f_k^{rs} 之间满足如下关系:

$$x_{mn} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \delta_{mn,k}^{rs}. \quad (9)$$

(2) O-D 需求 q^{rs} 和时空路径流量 f_k^{rs} 之间满足如下守恒关系:

$$q^{rs} = \sum_k f_k^{rs}, \quad (10)$$

其中, $\delta_{mn,k}^{rs}$ 为时空路径和时空弧之间的关联因子, 如果时空弧 $m \rightarrow n$ 属于 O-D 对 $r-s$ 之间的时空路径 k , 则 $\delta_{mn,k}^{rs} = 1$; 否则, $\delta_{mn,k}^{rs} = 0$.

在时空扩展网络中, 当时空路径流量 f_k^{rs} 与其所对应的时空路径费用 C_k^{rs} 满足下面的关系式时, 网络达到平衡状态:

$$\mu^{rs} - C_k^{rs} \begin{cases} = 0, & f_k^{rs} > 0, \\ \leq 0, & f_k^{rs} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中, μ^{rs} 表示平衡状态下 O-D 对 $r-s$ 之间的最小出行费用; 在时空网络中, 乘客的路径出行费用是乘客出行经过的各个时空弧的出行费用的加和, 因此, 时空路径费用 C_k^{rs} 可通过时空弧的费用 c_{mn} 来表示, 即:

$$C_k^{rs} = \sum_{mn} c_{mn} \delta_{mn,k}^{rs}. \quad (12)$$

不同时空弧上的费用计算方法分别由(4), (7)和(8)式给出.

同样的, 可构建如下的数学优化模型来描述基于时空拓展网络的动态平衡配流问题:

$$\min Z(x) = \sum_{mn} \int_0^{x_{mn}} c_{mn}(w) dw, \quad (13a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k f_k^{rs} = q^{rs}, \quad \forall r, s, \quad (13b)$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \quad \forall r, s, k, \quad (13c)$$

$$x_{mn} = \sum_{rs} \sum_k f_k^{rs} \cdot \delta_{mn,k}^{rs}, \quad \forall m, n, \quad (13d)$$

关于上述模型的等价性和唯一性证明可参考文献[13], 在此不再赘述.

可采用连续平均算法(MSA)^[13]求解用户平衡配流模型(13a)~(13d)式, 具体步骤如下.

步骤 1: 初始化. 设时空网络中所有时空弧的流量均为 0, 根据上面给出的最短路搜索算法得出时空网络中各 O-D 对之间的最小可行费用路径, 将各时段的 O-D 客流需求 q^{rs} 全部分配到所对应的最小可行

费用路径上, 得到时空路径流量 $f_k^{rs(1)}$. 根据路径流量与弧流量之间的关系(9)式得到时空网络上的时空弧流量 $x_{mn}^{(1)}$, 令迭代次数 $i=1$.

步骤 2: 根据当前的时空弧上分配的流量, 计算其费用, 不同时空弧上的费用计算方法分别由(4)、(7)和(8)式给出.

步骤 3: 根据当前的各时空弧上的费用, 采用最短路搜索算法得出时空网络中各 O-D 对之间的新的最小可行费用路径, 将各时段的 O-D 客流需求 q^{rs} 全部分配到所对应的最小可行费用路径上, 得到时空路径流量, 再根据路径流量与弧流量之间的关系(9)式得到时空网络上的时空弧流量 $y_{mn}^{(i)}$.

步骤 4: 更新流量. 根据下式计算新的弧流量为

$$x_{mn}^{(i+1)} = x_{mn}^{(i)} + \frac{1}{i}(y_{mn}^{(i)} - x_{mn}^{(i)}), \quad \forall m, n. \quad (14)$$

步骤 5: 收敛性判断. 如果满足以下式子, 则停止计算; 否则令 $i = i + 1$, 返回步骤 2.

$$\max_{\forall m, n} \{x_{mn}^{(i+1)} - x_{mn}^{(i)}\} \leq \varepsilon, \quad (15)$$

其中, ε 为预先设定的充分小的一个正数.

MSA 算法实际上是一个方向搜索算法, 在每次迭代中, 需要确定搜索方向和步长, 该算法通过求解最短路问题来确定搜索方向, 因此, 最短路径是本算法的核心. 然而, 在时空扩展网络中, 无法采用传统的最短路搜索算法(如 Dijkstra's 算法)获得 O-D 间的最小费用, 原因是, 传统的最短路算法并不考虑节点处发生的换乘费用, 也无法满足前面给出的时空路径所满足的换乘约束条件. 因此, 本文提出了如下的基于时空网络的可行最短路搜索算法:

首先, 用 s_{mn} 表示时空弧 $m \rightarrow n$ 的类型, 如果 $m \rightarrow n$ 为换乘弧, 则 $s_{mn}=0$, 否则 $s_{mn}=1$; 设置以下记录:

- (1) 标号 b_m , 表示沿着当前可行最短路径从起始点 r 到节点 m 的最小费用;
- (2) 紧前节点 p_m , 表示沿着当前可行最短路径到达节点 m 且最靠近 m 的节点;
- (3) 换乘次数 e_m , 表示沿着当前可行最短路径到达节点 m 的换乘次数;
- (4) 节点集 Ω , 表示需要进一步扫描的时空节点集合;
- (5) 线路集 Φ_m , 表示沿着当前可行最短路径从

起始点 r 到节点 m 的线路集合.

步骤 1: 初始化. 置所有时空节点的标号为一个很大的正数, 置所有的紧前节点为零, 置线路集 Φ_m 为空, 将起始点 r 放入节点集 Ω 中, 并令 $b_r=0$, 换乘次数 $e_m=0$.

步骤 2: 从节点集 Ω 任选一个节点, 例如 m , 扫描所有从 m 节点出发只经过一条弧便可到达的节点, 例如 n 节点, 执行如下操作:

① 如果 $s_{mn}=1$ 时, 判断 $b_n > b_m + c_{mn}$ 是否成立. 如果成立, 则令 $b_n = b_m + c_{mn}$, 修改 $p_n = m$, 令 $e_n = e_m$, 将 n 加入到 Ω 中, 如果时空弧 $m \rightarrow n$ 所对应的线路 l 没有在 Φ_n 中, 就将线路 l 加入到 Φ_n 中; 如果不满足 $b_n > b_m + c_{mn}$, 则不做任何改变.

② 如果 $s_{mn}=0$ 且 $e_m \leq 3$, 判断时空弧 $g \rightarrow m$ 的属性, 其中 $g=p_m$, 如果 $s_{gm}=0$, 不做任何改变; 如果 $s_{gm}=1$ 且时空节点 n 所对应的线路 l 没有在 Φ_m 中, 判断 $b_n > b_m + c_{mn}$ 是否成立, 如果成立, 则令 $b_n = b_m + c_{mn}$, 修改 $p_n = m$, 将 n 加入到 Ω 中, 将线路 l 加入到 Φ_n 中, 且令 $e_n = e_m + 1$; 如果不满足 $b_n > b_m + c_{mn}$, 则不做任何改变.

③ 如果从节点 m 出发只经过一条弧便可到达的所有节点均被扫描, 则从 Ω 中删除 m , 转入下一步.

步骤 3: 当节点集 Ω 中不再有需要检查的节点时, 算法停止; 否则, 转入步骤 2.

5 算例分析

采用图 1 所示的简单地铁网络来说明本文模型及算法的有效性, 时刻表信息由表 1 和 2 给出, 拓展后的地铁时空网络如图 2 所示, 可以看出, 对于这个简单的时空网络, 从起点到终点共有 6 条时空路径可以选择, 如图 2(d)所示. 假定在研究时段内, 于 5:19 由国图站进入地铁网络 5:47 到达和平门站的 O-D 需求为 200 人, 于 5:19 由国图站进入 5:52 到达和平门站的需求为 100 人, 而在 5:25 由国图站进入 5:52 到达和平门站的需求为 600 人. 需要预先设定模型中的相关参数, 包括(2)式中的参数 α , β , Z_i 和 C_i 以及(7)式中的参数 θ 和 ω . 根据文献[14], 这些参数的取值如表 3 所示.

基于上面给出的 O-D 需求及相应参数, 采用上面提出的连续平均算法和可行最短路搜索算法进行地铁客流的平衡分配, 计算可得出以下结果: 各线路

表 3 参数预设值

参数	α	β	Z_l	C_l	θ	ω
取值	0.1	2.0	100	250	1.3	4

上各班次列车在各区间的乘车人数(即列车运行弧流量); 各线路各次列车在各站点的等车人数(即换乘弧流量); 不同 O-D 对各路径的客流及费用.

首先, 分析算法的收敛性. 对于图 2(c)所示的时空网络, 各换乘弧的流量对应了不同时空路径的流量. 图 3 给出了本算例中各时空路径流量迭代计算的情况, 可以看出, MSA 算法求解平衡配流问题具有较好的收敛性质, 尤其对于规模较小的网络. 如果网络规模较大, 可采用收敛速度较快的 Frank-Wolfe 算法进行求解, 具体求解过程可参考文献^[13].

表 4 给出了根据上述已知数据, 采用 MSA 算法求解图 4 所示的时空网络所得到的各时空弧的平衡流量以及所对应的费用. 在该表中, 列车运行弧的流量就是各线路的各次列车在不同区间上的乘客量, 例如, 4 号线从国图 5:19 出发 5:25 到西直门的平均列车乘客数量为 300 人, 所对应的乘车费用为 8.40 min. 通过换乘弧流量则可以得出各线路的各次列车在不同站点上的等车人数, 例如, 从 4 号线换乘的等待 5:34 到西直门站的 2 号线列车的平均人数为 146.97 人次, 所对应的换乘费用为 15.70 min.

对于本文的简单网络, 各换乘弧的流量对应了不同时空路径的流量, 因此, 根据基于时刻表的平衡配流方法, 还可以得到各 O-D 对之间各条时空路径上的平衡流量及费用, 表 5 给出了相关的计算结果.

表 4 平衡条件下各时空弧平衡流量及费用

时空弧属性				平衡流量	费用(min)
类别	线路	站点	时间段	(人次)	
列车运行弧	4 号线	国图-西直门	5:19~5:25	300.00	11.76
列车运行弧	4 号线	西直门-宣武门	5:25~5:37	152.53	14.57
列车运行弧	4 号线	国图-西直门	5:25~5:31	600.00	24.72
列车运行弧	4 号线	西直门-宣武门	5:31~5:43	298.10	22.82
列车运行弧	2 号线	西直门-宣武门	5:34~5:45	146.97	13.01
列车运行弧	2 号线	宣武门-和平门	5:45~5:47	200.00	2.80
列车运行弧	2 号线	西直门-宣武门	5:39~5:50	302.40	22.23
列车运行弧	2 号线	宣武门-和平门	5:50~5:52	700.00	9.68
换乘弧	4 号线-2 号线	西直门	5:25~5:34	146.97	15.70
换乘弧	4 号线-2 号线	西直门	5:31~5:39	301.90	14.40
换乘弧	4 号线-2 号线	西直门	5:25~5:39	0.50	22.20
换乘弧	4 号线-2 号线	宣武门	5:37~5:45	53.03	14.40
换乘弧	4 号线-2 号线	宣武门	5:43~5:50	298.10	13.10
换乘弧	4 号线-2 号线	宣武门	5:37~5:50	99.50	20.90

从表中的配流结果可以看出, 在平衡状态下, 同一 O-D 对之间不同时空路径的出行费用基本相等, 这一结果验证了模型及算法的有效性. 同时, 还可以看出, 对于同一 O-D 的不同路径, 尽管实际所花费的时间是相同的, 但是不同的路径所分配的流量具有较大差异. 这是因为对于乘客而言, 在其地铁出行中, 所关心的因素除了实际花费时间外, 还会考虑车内拥挤和换乘所产生的额外费用, 不同的时空路径具有不同的拥挤和换乘特征, 因此, 平衡流量存在差异.

下面, 分析模型中不同参数的取值对于平衡流量的影响. 如前所述, 模型需要输入的参数包括 α , β , Z_l , C_l , θ 和 ω , 其中 Z_l 和 C_l 分别表示列车能力; α 和 β 表示乘客对车内拥挤的敏感程度; θ 和 ω 分别表示对换乘时间和换乘次数的敏感程度. 通常, 列车能力不发生变化, 故主要分析乘客对车内拥挤和换乘的敏

图 3 (网络版彩图)算法收敛性

表 5 O-D 对之间时空路径平衡流量及费用

时空 路径	花费 时间 (min)	列车行 驶时间 (min)	换乘 时间 (min)	平衡 流量 (人次)	平衡 费用 (min)
1	28	19	9	146.97	43.27
2	33	20	13	301.90	70.82
3	27	19	8	0.50	60.87
4	28	20	8	53.03	43.32
5	33	19	14	298.10	71.03
6	27	20	7	99.50	59.91

感度变化对平衡流量的影响,而在本算例中,所有路径均只有一次换乘,不存在换乘次数的差异,所以只针对参数 α 、 β 和 θ 展开分析.图4分别给出了其他条件不变,这3个参数取不同值时,时空路径5和6上平衡流量的变化趋势.从表5中可以看出,时空路径5和6为同一O-D的2条路径,且路径5上的列车运行时间较小,而路径6上的换乘时间较少.如果将这两条路径看作竞争关系,则图4表示了不同条件下两条路径的需求变化.

从图4(a)中可以看出,随着参数 α 由小到大的变化,路径5上的平衡流量由小变大,而路径6上的流量由大变小,当 α 超过一定值时,这两条路径上的流

量基本相等且不再变化.这是因为,当 α 取值较小时,意味着乘客在选择路径时,不考虑车内拥挤的影响,换乘对乘客的路径选择影响大,而路径6上的换乘时间短,因此,路径6上的流量较大.随着 α 的增加,也就是说车内拥挤对乘客路径选择的影响越来越大,则乘客更倾向于选择列车运行时间短的线路,因此路径6上的流量将会转移到路径5上.当 α 增加到一定程度时,也就是说乘客只关心车内拥挤因素,由于这两条路径上的列车能力相同,所以,在平衡条件下,这两条路径上的流量基本相等且不再随着 α 的增加而变化.

从图4(b)中可以看出,参数 β 的变化对于路径5和路径6上的流量的影响趋势基本和参数 α 相同,只不过路径流量随 β 的变化不是非常显著.这可以解释为,从(2)式中可以看出,车内拥挤因素所导致的额外费用主要取决于参数 α ,而 β 对拥挤系数的影响很小,故在一定范围内, β 的变化对路径平衡流量的影响相对 α 来说较小.

从图4(c)中可以看出,当 θ 低于某值时,这两条路径上的流量基本相等且不变,而当 θ 达到某值时,随着 θ 由小到大的变化,路径5上的平衡流量由大变小,而路径6上的流量由小变大.这是因为当 θ 低于

图 4 (网络版彩图)平衡流量随参数的变化趋势
(a) 参数 α ; (b) 参数 β ; (c) 参数 θ

某值时, 意味着乘客在路径选择中不考虑换乘因素, 而这两条路径的其他条件不变, 因此, 平衡流量不会发生变化. 当 θ 足够大时, 换乘因素其决定作用, 随着 θ 值的增加, 换乘对于乘客而言越来越重要, 由于路径 6 上的换乘时间较少, 因此, 路径 5 上的流量会逐渐转移到路径 6 上.

6 结论

通过时空网络拓展, 结合列车运行时刻表, 将地铁物理网络转化为时空网络, 并采用用户平衡理论和方法进行地铁客流的动态分配. 根据已有的研究, 现有 UE 配流算法可以应用在节点数为几千个的大规模网络中, 虽然经过时空扩展后, 网络规模会变得很大, 不过采用目前的算法进行求解应该问题不大. 由

于应用到实际网络中, 需要大量的数据以及参数估计, 而目前我们还无法获得相应的数据, 因此, 还无法通过数据来验证模型和算法的实际效果, 如果将来能够得到实际数据, 可以将算法应用于大规模网络, 以得出更加有价值的结果.

进一步, 基于地铁时空扩展网络, 考虑了乘车时间、换乘因素以及车内拥挤因素, 构建了基于地铁时空扩展网络的路径广义费用模型, 提出了基于时刻表的地铁网络客流平衡分配模型, 并给出了求解算法. 通过一个简单算例, 对本文所提出的地铁平衡配流方法进行了验证和分析, 同时, 对模型中的相关参数进行了灵敏度分析. 计算结果包括: 各线路上各班次列车在区间上的乘客数、各线路上各班次列车在各站台上的等车人数, 这些信息对于城市地铁科学运营管理具有非常重要的价值.

参考文献

- 1 吴祥云, 刘灿齐. 轨道交通客流量均衡分配模型与算法. 同济大学学报(自然科学版), 2004, 32: 1158–1162
- 2 四兵锋, 毛保华, 刘智丽. 无缝换乘条件下城市轨道交通网络客流分配模型及算法. 铁道学报, 2007, 29: 12–18
- 3 刘剑锋, 孙福亮, 柏赞, 等. 城市轨道交通乘客路径选择模型及算法. 交通运输系统工程与信息, 2009, 9: 81–86
- 4 林湛, 蒋明清, 刘剑锋, 等. 城市轨道交通客流分配的改进 Logit 模型及方法. 交通运输系统工程与信息, 2012, 12: 145–151
- 5 Alfa A S, Chen M. Temporal distribution of public transport demand during the peak period. Eur J Oper Res, 1995, 83: 137–153
- 6 Tian Q, Huang H J. Commuting equilibria on a mass transit system with capacity constraints. In: Transportation and Traffic Theory 2007, London, 361–383
- 7 Friedrich M, Hofsaess I, Wekeck S. Timetable-based transit assignment using branch and bound techniques. Trans Res Record: J Trans Res Board, 2001, 1752: 100–107
- 8 Poon M H. A dynamic schedule-based model for congested transit networks. Trans Res-B, 2004, 38: 343–368
- 9 Nielsen O A, Frederiksen R D. Optimization of timetable-based, stochastic transit assignment models based on MSA. Ann Oper Res, 2006, 144: 263–285
- 10 Schmöckera J D, Bell M G H, Kurauchi F. A quasi-dynamic capacity constrained frequency-based transit assignment model. Trans Res-B, 2008, 42: 925–945
- 11 Hamdoucha Y, Lawphongpanich S. Schedule-based transit assignment model with travel strategies and capacity constraints. Trans Res-B, 2008, 42: 663–684
- 12 Nuzzolo A, Crisalli U. The schedule-based modeling of transportation systems: Recent developments. In: Schedule-Based Modeling of Transportation Networks, Operations Research/Computer Science Interfaces Series, 2009, 46: 1–26
- 13 四兵锋, 高自友. 交通运输网络流量分析及优化建模. 北京: 人民交通出版社, 2013
- 14 Si B F, Zhong M, Liu J F, et al. Development of a transfer-cost based Logit assignment model for Beijing rail transit network using automated fare collection data. J Adv Trans, 2013, 47: 297–318

Schedule-based equilibrium assignment model and algorithm for urban subway network

CHEN BoYang, SI BingFeng, JIANG MingQing & YANG XiaoBao

MOE Key Laboratory for Urban Transportation Complex Systems Theory and Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

The physical space network is expanded in the time dimension by using network expansion technology, combined with the subway network structure and the train schedule information. Simultaneously, the rules of practical passenger transfer between different lines are taken into account. The space-time network is then proposed for urban subway system and an improved shortest search algorithm for such space-time network is also given. On the basis of these, the time characteristic of subway passenger route choice is analyzed and the factors such as travel time, transfer and in-vehicle congestion are all considered. The generalized cost model is formulated based on space-time expansion network. Furthermore, schedule-based equilibrium assignment model with its algorithm is proposed for urban subway network. Finally, a numerical example is provided to illustrate the model and algorithm.

subway network, schedule, time-space network, user equilibrium, shortest path

doi: 10.1360/N092014-00426