广义小波框架

沈延锋^{①②}, 袁德辉^③, 杨守志^{②*}

① 德州学院数学科学学院, 德州 253023;

② 汕头大学数学系, 汕头 515063;

③ 韩山师范学院数学与信息技术系, 潮州 521041

E-mail: shyf8584@163.com, dhyuan@hstc.edu.cn, szyang@stu.edu.cn

收稿日期: 2014-04-26; 接受日期: 2014-08-24; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11071152) 和广东省自然科学基金 (批准号: 10151503101000025, S2011010004511 和 S2013010013101) 资助项目

摘要 通过将分数阶 Fourier 变换 (FrFT) 与传统小波框架 (WF) 相结合, 本文引入了一类新的框架, 即广义小波框架 (GWF). 首先介绍了分数阶 Fourier 变换、级数以及相关结论; 然后通过分析母小波的 Fourier 变换, 得到了 $L^2(\mathbb{R})$ 中广义小波框架的若干个充分条件和必要条件; 最后在参数选择为 $a=2$, $b=1$ 的特殊情形下, 给出了 $L^2(\mathbb{R})$ 中紧广义小波框架的一个充要条件.

关键词 广义小波框架 分数阶 Fourier 变换 Parseval 等式

MSC (2010) 主题分类 42C40, 26A33, 46F12

1 引言

时频分析方法提供了时间域与频率域的联合分布信息, 描述了信号频率随时间变化的关系. 目前应用比较广泛的时频分析工具是 Gabor 变换、小波变换、Wigner-Ville 变换以及 Hilbert-Huang 变换. 近年来, 为了方便处理那些能量在频率域也不能集中的信号, 如线性调频信号 (Chirp-like Signal) 等等, 人们相继提出了分数阶 Fourier 变换 (FrFT) [1-5] 以及分数阶小波变换 (FrWT) [6-8]. 直观上讲, FrFT 可以看成是 FT 的 θ 角旋转. 换言之, FrFT 是 FT 的一种扩展形式. 当 $\theta = \pi/2$ 时, FrFT 实际上就是传统的 Fourier 变换. 所谓的 FrWT 就是把 FrFT 与传统小波分变换 (WT) 相结合. FrFT 和 FrWT 作为两种新型的时频分析工具, 也已经应用到了信号处理和图像处理等领域中.

Shi 等人在文献 [8] 中定义了分数阶母小波,

$$\psi_{\theta,\tau,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) e^{-\frac{i}{2}(t^2-\tau^2)\cot\theta}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad s > 0, \quad (1.1)$$

并给出了分数阶小波变换的一些基本性质, 如: 线性性、内积公式以及 Parseval 等式等. 基于此母小波, Prasad 等人在文献 [9] 中引入了广义连续小波变换, 并且建立了其重构公式以及 Parseval 等式等性质. 假设 $\psi_{\theta,j,k}(t)$ 是 (1.1) 的离散形式, 即对函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 进行离散仿平移和 Chirp 调制而成,

$$\psi_{\theta,j,k}(t) = a^{j/2} \psi(a^j t - kb) e^{-i \frac{t^2 - (ka - jb)^2}{2} \cot\theta}, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

英文引用格式: Shen Y F, Yuan D H, Yang S Z. Generalized wavelet frames (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 349–363, doi: 10.1360/012015-10

其中 $b \in \mathbb{R}$, $a > 1$. 本文将引入一类广义小波框架 (GWF), $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. 然后研究 $L^2(\mathbb{R})$ 中广义小波框架的若干个充分条件和必要条件; 最后在一种特殊情形 ((1.2) 中 $a = 2$, $b = 1$) 下, 给出 $L^2(\mathbb{R})$ 中紧广义小波框架的一个充要条件.

下面介绍分数阶 Fourier 变换与级数. 函数 $f(x)$ 的 FrFT 定义为

$$\hat{f}^\theta(\xi) = (\mathcal{F}^\theta f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(\xi, t) f(t) dt, \quad (1.3)$$

其中核函数为

$$K^\theta(\xi, t) = \begin{cases} \sqrt{1 - i \cot \theta} e^{i \frac{t^2 + \xi^2}{2} \cot \theta - i \xi t \csc \theta}, & \theta \neq n\pi, \\ \delta(\xi - t), & \theta = 2n\pi, \\ \delta(\xi + t), & \theta = 2n\pi \pm \pi. \end{cases}$$

分数阶 Fourier 变换的概念是 1980 年 Namias 在文献 [3] 中引入的. 其中参数 θ 在文献 [2, 10] 中被解释为时频平面中的旋转角. 分数阶 Fourier 级数 (FrFS) 是 Fourier 级数的一种扩展形式, 具体地,

$$\phi_{\theta,k} = \sqrt{\frac{\sin \theta - i \cos \theta}{T}} e^{-i((t^2 + (k \sin \theta)^2)/2) \cot \theta + i k t \csc \theta}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

构成 $L^2(0, T)$ 空间的一组正交基, 其中 $\theta \in (0, 2\pi)$ 表示分数阶 Fourier 变换的旋转角. 有限支撑信号 $x(t)$ 的 FrFS 展开式有如下形式

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{\theta,k} \phi_{\theta,k}(t), \quad t \in [0, T), \quad (1.5)$$

其中 $C_{\theta,k}$ 称为 FrFS 展开系数并且

$$\begin{aligned} C_{\theta,k} &= \int_0^T x(t) \phi_{\theta,k}^*(t) dt \\ &= \sqrt{\frac{\sin \theta - i \cos \theta}{T}} \int_0^T x(t) e^{i((t^2 + (k \sin \theta)^2)/2) \cot \theta - i k t \csc \theta} dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

文献 [5] 给出 FrFS 下的 Parseval 等式:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |C_{\theta,k}|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt. \quad (1.7)$$

函数集 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 称为是可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的框架, 如果存在两个常数 $0 < A \leq B < \infty$ 使得

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (1.8)$$

对任意的 $f \in \mathcal{H}$ 成立. 常数 A 和 B 称为框架界. 如果 $A = B$, 则称为紧框架.

若 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的框架, 则框架算子

$$S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, f_k \rangle f_k \quad (1.9)$$

是有界、正定和可逆的. 于是对任意的 $f \in \mathcal{H}$, 显然有

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k. \quad (1.10)$$

如果 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 满足框架条件 (1.8), 即

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle| \leq B\|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (1.11)$$

称 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的广义小波框架 (GWF). 如果 $A = B$, 则称其为紧广义小波框架 (TGWF).

2 广义小波框架的几个充分条件和必要条件

假设 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的广义小波框架, 本节将给出它的几个必要和充分条件. 对于通常的小波框架的充要条件的刻画, 可以参考 [11, 12].

定理 2.1 设 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 由 (1.2) 给定, 其中 $a > 1$ 和 $b > 0$. 如果其构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的框架并且框架界为 A 和 B , 那么

$$A \leq \frac{2\pi \sin \theta}{b} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 \leq B, \quad \text{a.e.} \quad (2.1)$$

证明 由公式 (1.2) 及文献 [9, 命题 2.3], 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle &= a^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi(a^j t - kb)} e^{i \frac{t^2 - (ka^{-j}b)^2}{2} \cot \theta} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{\psi}_{\theta,j,k}^\theta(\xi)} d\xi \\ &= a^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} [\hat{f}^\theta(\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) e^{i \frac{a^{-2j}\xi^2}{2} \cot \theta}] e^{-i \frac{\xi^2 + (ka^{-j}b)^2}{2} \cot \theta + ika^{-j}b\xi \csc \theta} d\xi. \end{aligned}$$

令 $T := \frac{2\pi a^j}{b \csc \theta}$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) e^{i \frac{a^{-2j}\xi^2}{2} \cot \theta}} \right. \\ &\quad \times \left. e^{-i \frac{\xi^2 + (ka^{-j}b)^2}{2} \cot \theta + ika^{-j}b\xi \csc \theta} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^j |T_\theta|^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| T_\theta \int_0^T \left[\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right] e^{-i \frac{\xi^2 + (k(2\pi/T) \sin \theta)^2}{2} \cot \theta + ik(2\pi/T)\xi \csc \theta} d\xi \right|^2, \end{aligned}$$

其中 $T_\theta = \sqrt{\frac{\sin \theta - i \cos \theta}{T}}$. 根据 (1.7) 和 $|T_\theta|^2 = 1/T$, 上式可写为

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} \right|^2 d\xi$$

$$\times e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \Big|^2 d\xi. \quad (2.2)$$

从而再结合 (1.11) 和 (2.2) 得

$$\begin{aligned} A \|\hat{f}^\theta\|^2 &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} \right. \\ &\quad \left. \times e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \leq B \|\hat{f}^\theta\|^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

因此对任意的 $M > 0, M \in \mathbb{Z}$, 以及 $\xi_0 \in \mathbb{R}$, 成立

$$\begin{aligned} \sum_{j=-M}^M \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\xi_0 - \frac{T}{2}}^{\xi_0 + \frac{T}{2}} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} \right. \\ \left. \times e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \leq B \|\hat{f}^\theta\|^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

特别地, 考虑 $\hat{f}^\theta = (1/\sqrt{2\epsilon})\mathcal{X}_{[\xi_0 - \epsilon, \xi_0 + \epsilon]}$, $\epsilon > 0$. 对充分小的 ϵ , 上述不等式 (2.4) 也就是

$$\sum_{j=-M}^M \frac{2\pi}{b \csc \theta} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\xi_0 - \epsilon}^{\xi_0 + \epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi \leq B.$$

再令 $\epsilon \rightarrow 0$ 和 $M \rightarrow \infty$, 可以得到

$$\frac{2\pi \sin \theta}{b} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi_0)|^2 \leq B, \quad \text{a.e. } \xi_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

另一方面, 注意到 $\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi) \in L^2(\mathbb{R})$, 对任意的 $\xi_0, \eta > 0$, 选择 $M > 0$ 使得当 $j > M$ 时,

$$\frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{2a^M \xi_0 (1+a)^{-1}}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)|^2 d\xi < \eta. \quad (2.6)$$

选择 $0 < \epsilon < \min\{\frac{a-1}{a+1}\xi_0, \frac{T}{2}\}$, 则函数 $\hat{f} = (1/\sqrt{2\epsilon})\mathcal{X}_{[\xi_0 - \epsilon, \xi_0 + \epsilon]}$ 满足 $\hat{f}(\xi + \ell T) = 0$, 对任意的 $\ell \in \mathbb{Z}$ 且 $|\ell| \geq \epsilon/T + 1$ 和 $\xi \in [\xi_0 - \frac{T}{2}, \xi_0 + \frac{T}{2}]$ 成立. 于是有

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-\infty}^{-M} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\xi_0 - \frac{T}{2}}^{\xi_0 + \frac{T}{2}} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{-M} \frac{\pi}{\epsilon b \csc \theta} \int_{\xi_0 - \frac{T}{2}}^{\xi_0 + \frac{T}{2}} \left[\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}_{[\xi_0 - \epsilon, \xi_0 + \epsilon]}(\xi - \ell T) |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))|^2 \right] (a^j \epsilon/T + 1) d\xi \\ &\leq C \sum_{j=-\infty}^{-M} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \left\{ \int_{\frac{\xi_0 - \epsilon}{a^j}}^{\frac{\xi_0 + \epsilon}{a^j}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)|^2 d\xi + \int_{\xi_0 - \epsilon}^{\xi_0 + \epsilon} \frac{1}{2\epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

因为 $\epsilon < (a-1)/(a+1)\xi_0$, 所以区间 $[a^{-j}(\xi_0 - \epsilon), a^{-j}(\xi_0 + \epsilon)]$, $j \in \mathbb{Z}$ 是相互不交的. 从而有,

$$\sum_{j=-\infty}^{-M} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\frac{\xi_0 - \epsilon}{a^j}}^{\frac{\xi_0 + \epsilon}{a^j}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)|^2 d\xi \leq \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{2a^M \xi_0 (1+a)^{-1}}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)|^2 d\xi < \eta.$$

于是

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \\ & \leq \sum_{j=-M+1}^{\infty} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \\ & \quad + C\eta + \frac{C}{2\epsilon} \sum_{j=-\infty}^{-M} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\xi_0-\epsilon}^{\xi_0+\epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

再结合 (2.3) 和 (2.8), 有

$$\begin{aligned} I &:= \sum_{j=-M+1}^{\infty} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \\ &\geq A - C\eta - \frac{C}{2\epsilon} \cdot \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\xi_0-\epsilon}^{\xi_0+\epsilon} \sum_{j=-\infty}^{-M} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

另一方面, 对充分小的 $\epsilon > 0$, 显然有

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=-M+1}^{\infty} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \cdot \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\xi_0-\epsilon}^{\xi_0+\epsilon} \sum_{j=-M+1}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

其中 $\hat{f} = (1/\sqrt{2\epsilon})\chi_{[\xi_0-\epsilon, \xi_0+\epsilon]}$. 因此结合 (2.5), 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{b \csc \theta} \sum_{j=-M+1}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi_0)|^2 \\ & \geq A - C\eta - C \frac{2\pi}{b \csc \theta} \sum_{j=-\infty}^{-M} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi_0)|^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

对 $\xi_0 > 0$ 几乎处处成立. 因为 $\eta > 0$ 是任意的, 结合 (2.10) 和 (2.5), 可知

$$\frac{2\pi}{b \csc \theta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi_0)|^2 \geq A, \quad \text{a.e. } \xi > 0. \quad (2.11)$$

类似地可以证明, 对于 $\xi < 0$ 也有类似的结论. 定理证毕. $\square$

推论 2.2 在定理 2.1 的条件下, 函数 ψ 满足容许性条件,

$$C_{\psi, \theta} := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)|^2}{|\xi|} < \infty. \quad (2.12)$$

证明 根据定理 2.1, 有

$$A \leq \frac{2\pi \sin \theta}{b} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 \leq B, \quad \text{a.e.} \quad (2.13)$$

对不等式各项同时除以 $|\xi|$ 得

$$\frac{A}{|\xi|} \leq \frac{2\pi \sin \theta}{b} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2}{|\xi|} \leq \frac{B}{|\xi|}, \quad \text{a.e.}$$

再对不等式各项关于 ξ 积分得

$$2A \log a \leq \frac{2\pi \sin \theta}{b} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{1 \leq |\xi| \leq a} \frac{|\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq 2B \log a.$$

从而

$$\frac{Ab \log a}{\pi \sin \theta} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \frac{Bb \log a}{\pi \sin \theta}. \quad (2.14)$$

注意到 $\theta \in (0, \pi/2)$, 所以结论成立. $\square$

定理 2.3 设 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 由 (1.2) 给定, 其中 $a > 1$ 和 $b > 0$. 如果

$$B := \frac{2\pi}{b \csc \theta} \sup_{|\xi| \in [1, a]} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi + k2\pi \sin \theta/b)| < \infty, \quad (2.15)$$

那么 $\{\psi_{\theta,j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 是界为 B 的 Bessel 序列, 并且对于函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$, 成立

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle|^2 &= \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi + \frac{2\pi}{b \csc \theta} \\ &\quad \times \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + k2\pi a^j \sin \theta/b)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi]} \\ &\quad \times (a^{-j}\xi + k2\pi \sin \theta/b) d\xi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

进一步地, 如果

$$\begin{aligned} A := \frac{2\pi \sin \theta}{b} \inf_{|\xi| \in [1, a]} &\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 \right. \\ &\left. - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi + k2\pi \sin \theta/b))| \right) > 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

那么 $\{\psi_{\theta,j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 是界为 A 和 B 的 $L^2(\mathbb{R})$ 的广义小波框架.

证明 令 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 并假设 $\hat{f}$ 是紧支撑的连续函数. 定义

$$F_j(\xi) := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - k\ell T))} e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta},$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $T = \frac{2\pi a^j}{b \csc \theta}$. 则 F_j 是 T -周期的且 $F_j \in L^1(0, T)$. 事实上对固定的 $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^T |\hat{f}^\theta(\xi - \ell T) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-\ell T}^{(-\ell+1)T} |\hat{f}^\theta(\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)| d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}^\theta(\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)| d\xi \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

类似地, 用上面的方法还能得到 $F_j \in L^2(0, T)$ 以及

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}^{\theta}(\xi) \overline{\mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi)}] e^{i \frac{a^{-2j} \xi^2}{2} \cot \theta} e^{-i \frac{\xi^2 + (ka^{-j}b)^2}{2} \cot \theta + ika^{-j}b\xi \csc \theta} d\xi \\ &= \int_0^T F_j(\xi) e^{-i \frac{\xi^2 + (k(2\pi/T) \sin \theta)^2}{2} \cot \theta + ik(2\pi/T)\xi \csc \theta} d\xi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

令 $T_{\theta} = \sqrt{\frac{\sin \theta - i \cos \theta}{T}}$. 根据 Parseval 等式 (1.7) 和 $|T_{\theta}|^2 = \frac{1}{T}$ 得

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |F_j(\xi) e^{-i \frac{\xi^2 + (k(2\pi/T) \sin \theta)^2}{2} \cot \theta + ik(2\pi/T)\xi \csc \theta}| = \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T |F_j(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.19)$$

接下来在函数 f 满足 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 和 $\hat{f}$ 是紧支撑的连续函数情况下验证 (2.16). 因为

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle|^2 &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^{\theta}(\xi) \overline{\hat{\psi}_{\theta,j,k}^{\theta}(\xi)} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} [\hat{f}^{\theta}(\xi) \overline{\mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi)}] e^{i \frac{a^{-2j} \xi^2}{2} \cot \theta} \\ &\quad \times e^{-i \frac{\xi^2 + (ka^{-j}b)^2}{2} \cot \theta + ika^{-j}b\xi \csc \theta} d\xi \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_0^T \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}^{\theta}(\xi - \ell T) \overline{\mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} \right. \\ &\quad \times \left. e^{i \frac{a^{-2j}(\xi - \ell T)^2 + \xi^2 - (\xi - \ell T)^2}{2} \cot \theta} \right|^2 d\xi \triangleq (*). \end{aligned}$$

进一步地,

$$\begin{aligned} (*) &\leq \frac{2\pi}{b \csc \theta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^T \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}^{\theta}(\xi - kT) \overline{\mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - kT))}| \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\overline{\hat{f}^{\theta}(\xi - \ell T) \mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))}| \right) d\xi \\ &= \frac{2\pi}{b \csc \theta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^T \left(|\hat{f}^{\theta}(\xi - kT) \overline{\mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - kT))}| \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\overline{\hat{f}^{\theta}(\xi - \ell T) \mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))}| \right) d\xi \\ &= \frac{2\pi}{b \csc \theta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left(|\hat{f}^{\theta}(\xi) \overline{\mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi)}| \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\overline{\hat{f}^{\theta}(\xi - \ell T) \mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))}| \right) d\xi \triangleq (**), \end{aligned}$$

这里用到了 $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\overline{\hat{f}^{\theta}(\xi - \ell T) \mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))}|$ 是 T 周期的. 继续运算得

$$(**) = \frac{2\pi}{b \csc \theta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{f}^{\theta}(\xi) \overline{\mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi)} \times \overline{\hat{f}^{\theta}(\xi - \ell T) \mathcal{F}^{\theta}[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))} \right) d\xi$$

$$= \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi + \frac{2\pi}{b \csc \theta} R,$$

其中

$$R = \sum_{\ell \neq 0, j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi - \ell T)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi.$$

通过应用两次 Cauchy-Schwarz 不等式, 分别为积分和关于 k 求和, 有

$$\begin{aligned} R &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \neq 0} \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi - \ell T)|^2 |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \right]^{1/2} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\text{I})(\text{II}), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} (\text{I}) &= \left[\sum_{\ell \neq 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \right]^{\frac{1}{2}}, \\ (\text{II}) &= \left[\sum_{\ell \neq 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi - \ell T)|^2 |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

注意到 $(\text{II}) = (\text{I})$. 事实上只要把 (II) 中的 ξ 替换成 $\xi + \ell T$ 即可. 于是,

$$R \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \neq 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi.$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta, j, k} \rangle|^2 &\leq \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi + \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \\ &\quad \times \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \neq 0} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \\ &= \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi. \end{aligned}$$

注意到 $T = \frac{2\pi a^j}{b \csc \theta}$ 和假设条件 (2.15), 得

$$\sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta, j, k} \rangle|^2 \leq B \|\hat{f}^\theta\|^2 = B \|f\|^2.$$

这里的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 满足 $\hat{f}$ 连续且是紧支撑的. 因为这样的函数组成的集合在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是稠密的, 于是可以得到上述不等式对 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 也成立. 因此 $\{\psi_{\theta, j, k}\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 是界为 B 的 Bessel 序列. 对于 $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R})$, 应用类似于 (*) 和 (**) 的方法可以证明 (2.16). 另外如果 (2.17) 成立, 则

$$\begin{aligned} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta, j, k} \rangle|^2 &\geq \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi - \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \\ &\quad \times \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \neq 0} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{2\pi}{b \csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \neq 0} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| \right) d\xi \geq A \|f\|^2. \end{aligned}$$

再根据稠密性容易得证, 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 有

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta, j, k} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

定理证毕. $\square$

在 b 足够小的情况下, 下面将给出一个关于 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 形成广义小波框架的一个充分条件. 在这之前还需要如下引理.

引理 2.4 设 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. 若存在 $C > 0$ 使得

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq C \frac{|\xi|}{(1 + \xi^2)^{3/2}}, \quad \text{a.e.}, \quad (2.20)$$

则对任意的 $a > 1$ 和 $b > 0$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi + k2\pi \sin \theta/b)| \\ &\leq 16C^2 b^{4/3} \left(\frac{a^2}{a-1} + \frac{a}{a^{\frac{2}{3}}-1} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

证明 由分数阶 Fourier 变换定义, 得

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)| &= \left| \sqrt{\frac{\sin \theta - i \cos \theta}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi(t) e^{i((t^2 + (\xi \sin \theta)^2)/2) \cot \theta - it\xi \csc \theta} dt \right| \\ &= \left| \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-it\xi \csc \theta} dt \right| = \hat{\psi}(\xi/\sin \theta). \end{aligned}$$

根据假设条件 (2.20) 和 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 可得

$$|\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](\xi)| \leq C \frac{|\frac{\xi}{\sin \theta}|}{(1 + \frac{\xi^2}{\sin^2 \theta})^{\frac{3}{2}}} \leq C' \frac{|\xi|}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{a.e.}, \quad (2.22)$$

再应用文献 [11, 引理 11.2.5] 即得所需结论. $\square$

命题 2.5 设 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 由 (1.2) 给定, 其中 $a > 1$ 和 $b > 0$. 如果

- (i) $\inf_{|\xi| \in [1, a]} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 > 0$,
- (ii) 存在 $C > 0$ 使得

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq C \frac{|\xi|}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{a.e.}, \quad (2.23)$$

那么对任何一个充分小的 $b > 0$, $\{\psi_{\theta, j, k}\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 均能构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的广义小波框架.

证明 首先应用定理 2.3 证明 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 是广义 Bessel 序列, 其中 $b > 0$. 根据引理 2.4, 类似于文献 [11, 11.2.5] 的证明, 有

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^j \xi)|^2 \leq C^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|a^j \xi|^2}{(1 + a^{2j} \xi^2)^3} \leq \sup_{\xi \in [1, a]} C^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|a^j \xi|^2}{(1 + a^{2j} \xi^2)^3} \leq C^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{a^{2j+2}}{(1 + a^{2j})^3}.$$

第 2 个不等号成立是因为, 对于 $g(\xi) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|a^j \xi|^2}{(1+a^{2j} \xi^2)^3}$, 有 $g(a\xi) = g(\xi)$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^j \xi)|^2 &\leq C^2 \sum_{j=-\infty}^0 \frac{a^{2j+2}}{(1+a^{2j})^3} + C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{2j+2}}{(1+a^{2j})^3} \\ &\leq C^2 a^2 \sum_{j=-\infty}^0 a^{2j} + C^2 a^2 \sum_{j=1}^{\infty} (a^{-4})^j = C^2 \left(\frac{a^4}{a^2-1} + \frac{a^2}{a^4-1} \right). \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi \sin \theta}{b} \sup_{|\xi| \in [1, a]} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi + k2\pi \sin \theta/b)| \\ &\leq \frac{2\pi \sin \theta C^2}{b} \left[16b^{4/3} \left(\frac{a^2}{a-1} + \frac{a}{a^{2/3}-1} \right) + \frac{a^4}{a^2-1} + \frac{a^2}{a^4-1} \right] < \infty. \end{aligned}$$

因此 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 是广义 Bessel 序列. 另一方面, 当 b 足够小时, 根据引理 2 和条件 (i) 得

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi \sin \theta}{b} \inf_{|\xi| \in [1, a]} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \neq 0} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}(\xi - \ell T))| \right] \\ &\geq \frac{2\pi \sin \theta}{b} \inf_{|\xi| \in [1, a]} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j} \xi)|^2 - 16b^{4/3} \left(\frac{a^2}{a-1} + \frac{a}{a^{2/3}-1} \right) \right] > 0. \end{aligned}$$

由定理 2.3 可知结论成立. $\square$

3 一类特殊的紧框架

本节研究在 $a = 2, b = 1$ 情形下, $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 中紧广义小波框架 (TGWF) 的充要条件.

定理 3.1 设 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 由 (1.2) 给定, 其中 $a = 2$ 和 $b = 1$. 集合 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的 TGWF 当且仅当

$$2\pi \sin \theta \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j} \xi)|^2 = 1, \quad \text{a.e., } \xi \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

和

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j} \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}(\xi + k2\pi \sin \theta)) = 0, \quad \text{a.e., } \xi \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

对任意的 $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ 成立.

定理 3.1 的证明包含在如下两个引理中.

引理 3.2 设 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 由 (1.2) 给定, 其中 $a = 2$ 和 $b = 1$. 若 $\{\psi_{\theta, j, k}(t)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的 TGWF, 则 (3.1) 和 (3.2) 成立.

证明 应用定理 2.3 得,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle|^2 &= \frac{2\pi}{\csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)|^2 d\xi + \frac{2\pi}{\csc \theta} \\ &\quad \times \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}^\theta(\xi) \hat{f}^\theta(\xi + 2\pi k 2^j \sin \theta) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi) \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi]} \\ &\quad \times (2^{-j}\xi + k 2\pi \sin \theta) d\xi. \end{aligned}$$

利用文献 [13] 中周期点的概念, 记 2 周期的离散数据集为

$$\Lambda := \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \text{存在 } j, k \in \mathbb{Z} \text{ 满足 } \alpha = \frac{k}{2^j} \right\}.$$

这里的 α 称为是 2- 周期点. 定义集合

$$I_\alpha = \left\{ (j, k) \in \mathbb{Z}^2 : \alpha = \frac{k}{2^j} \right\}.$$

则上式等价于

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle|^2 &= \frac{2\pi}{\csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)|^2 d\xi + \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{\alpha \in \Lambda / \{0\}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \\ &\quad \times \overline{\hat{f}^\theta(\xi + \alpha 2\pi \sin \theta)} \left[\sum_{(j,k) \in I_\alpha} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^j\xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi] \right. \\ &\quad \left. \times (2^j\xi + k 2\pi \sin \theta) \right] d\xi. \end{aligned}$$

事实上, 不难得到 $\Lambda = \{\alpha : \alpha = \frac{k}{2^j}, k \in \{0\} \cup 2\mathbb{Z} + 1, j \in \mathbb{Z}\}$. 以及

$$I_\alpha = \left\{ (j + \ell, k) : k = 2^\ell(2n + 1), \ell \in \mathbb{N}, \alpha = \frac{2n + 1}{2^j} \right\}.$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{\theta,j,k} \rangle|^2 &= \frac{2\pi}{\csc \theta} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}^\theta(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)|^2 d\xi + \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{\alpha \in \Lambda / \{0\}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \\ &\quad \times \overline{\hat{f}^\theta(\xi + \alpha 2\pi \sin \theta)} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^\ell\xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^\ell(\xi + k 2\pi \sin \theta)) \right] d\xi \\ &\triangleq M(f) + R(f). \end{aligned} \quad (3.3)$$

令 $\xi_0 \in \mathbb{R}/\{0\}$, $\epsilon > 0$ 以及 $T = 2\pi \sin \theta$, 定义集合

$$H_\alpha(\epsilon) := [\xi_0 - \alpha T - \epsilon, \xi_0 - \alpha T + \epsilon], \quad \alpha \in \Lambda. \quad (3.4)$$

考虑 $f = f_1$, 其中 $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \chi_{H_\alpha(\epsilon)}(\xi)$, 则

$$M(f_1) = \frac{\pi}{\epsilon \csc \theta} \int_{\xi_0 - \epsilon}^{\xi_0 + \epsilon} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](a^{-j}\xi)|^2 d\xi \quad (3.5)$$

以及

$$R(f_1) = \frac{\pi}{\epsilon \csc \theta} \sum_{\alpha \in \Lambda/\{0\}} \int_{H_0(\xi) \cap H_\alpha(\xi)} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi + k2\pi \sin \theta)) \right] d\xi.$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned} |R(f_1)| &\leq \frac{\pi}{\epsilon \csc \theta} \left[\sum_{\alpha \in \Lambda/\{0\}} \int_{H_0(\xi) \cap H_\alpha(\xi)} \sum_{\ell=0}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\sum_{\alpha \in \Lambda/\{0\}} \int_{H_0(\xi) \cap H_\alpha(\xi)} \sum_{\ell=0}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi + k2\pi \sin \theta))|^2 d\xi \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

明显地, 如果 $|k| > 2\epsilon/T$, 那么 $\sharp(H_0(\epsilon) \cap H_\alpha(\epsilon)) = 0$, 这里的 $\sharp(X)$ 表示 X 的基数; 如果 $|k| \leq 2\epsilon/T$ 且 $k \in 2\mathbb{Z} + 1$, 则 $|k2\pi \sin \theta| \leq 2\epsilon$. 令 $Q := \lfloor \log_2 \frac{2\epsilon}{T} \rfloor$ 和 $Q_\ell := 2\epsilon 2^j/T$, 有

$$\begin{aligned} |R(f_1)| &\leq \frac{\pi}{\epsilon \csc \theta} \left[\sum_{\ell \geq Q} \sum_{|k| \leq Q_j; k \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\sum_{\ell \geq Q} \sum_{|k| \leq Q_j; k \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\xi-3\epsilon}^{\xi+3\epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi))|^2 d\xi \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

当 ϵ 充分小使得区间 $(2^j(\xi_0 - 3\epsilon), 2^j(\xi_0 + 3\epsilon))$ 彼此不交, 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq Q} \sum_{|k| \leq Q_j; k \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi &\leq \frac{2\epsilon}{T} \sum_{\ell \geq Q} a^j \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{2\epsilon}{T} \int_{|\xi| \geq 2^Q(\xi-\epsilon)} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

和

$$\sum_{\ell \geq Q} \sum_{|k| \leq Q_j; k \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\xi-3\epsilon}^{\xi+3\epsilon} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi))|^2 d\xi \leq \frac{2\epsilon}{T} \int_{|\xi| \geq 2^Q(\xi-3\epsilon)} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi.$$

从而, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} |R(f_1)| &\leq C \left[\int_{|\xi| \geq T/(2\epsilon)(\xi-\epsilon)} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\int_{|\xi| \geq T/(2\epsilon)(\xi-3\epsilon)} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

结合 (3.3), (3.5) 以及令 $\epsilon \rightarrow 0$, 可得 (3.1), 即

$$2\pi \sin \theta \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^{-j} \xi)|^2 = 1, \quad \text{a.e., } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

接下来证明 (3.2). 根据 (3.3) 和 (3.1), 得

$$R(f, g) = 0. \quad (3.8)$$

选定 $\alpha_0 = 2^{-j_0} k_0 \in \Lambda$ 且 $k_0 \in 2\mathbb{Z} + 1$. 令 $R(f) = R_1(f) + R_2(f)$, 其中

$$R_1(f) = \frac{2\pi}{\csc \theta} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + \alpha_0 2\pi \sin \theta)} \\ \times \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi + k_0 2\pi \sin \theta)) \right] d\xi, \\ R_2(f) = \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{\alpha \in \Lambda / \{0, k_0\}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + \alpha 2\pi \sin \theta)} \\ \times \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi + k 2\pi \sin \theta)) \right] d\xi.$$

假定 $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \epsilon/T < 1/4$ 并考虑函数 $f = f_2$, 其中

$$\hat{f}_2(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \chi_{[\xi_0 - \epsilon, \xi_0 + \epsilon] \cup [\xi_0 + \alpha_0 2\pi \sin \theta - \epsilon, \xi_0 + \alpha_0 2\pi \sin \theta + \epsilon]},$$

容易验证

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_1(f_2) = \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi + k_0 2\pi \sin \theta)), \quad (3.9)$$

对 $\xi_0 \in \mathbb{R}$ 几乎处处成立. 下面估计 $R_2(f)$. 令 $J_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $2^{J_0} > 4|\alpha_0|$. 如果 $k \neq 0$ 且 $j \leq J_0$, 有

$$|2^{-j}k - \alpha_0| \geq 2^{-j}|k - 2^{-J_0}\alpha_0| \geq \frac{3}{4}2^{-j} \geq \frac{2\epsilon}{T};$$

如果 $\alpha = 2^{-j}k$ 满足 $|\alpha T - \alpha_0 T| > 2\epsilon$, 有 $\overline{\hat{f}_2(\xi)}\hat{f}_2(\xi + \alpha T) = 0$. 因此选择足够大的自然数 J_1 , 得

$$R_2(f_2, g_2) = \frac{\pi}{\epsilon \csc \theta} \sum_{j=J_1+1}^{\infty} \sum_{|2^{-j}k - \alpha_0| > 2\epsilon; s \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + \alpha 2\pi \sin \theta)} \\ \times [\overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^j \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^j(\xi + k 2\pi \sin \theta))] d\xi \\ + \frac{\pi}{\epsilon \csc \theta} \sum_{j=J_0}^{J_1} \sum_{|2^{-j}k - \alpha_0| > 2\epsilon; s \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + \alpha 2\pi \sin \theta)} \\ \times [\overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^j \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^j(\xi + k 2\pi \sin \theta))] d\xi \\ \triangleq R_{2,1} + R_{2,2}.$$

类似于 (3.6), 对任意的 $\eta > 0$, 存在自然数 J_1 以及实数 C 满足

$$|R_{2,1}| \leq C \left[\int_{2^{J_1}(|\xi|-\epsilon)}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_{2^{J_1}(|\xi|-3\epsilon)}^{\infty} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} < O(\eta).$$

注意到 $R_{2,2}$ 中的求和均是有限的, 因此 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{2,2} = 0$. 从而,

$$0 = \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{\ell=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell \xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{1}{2}(\cdot)^2 \cot \theta \psi}](2^\ell(\xi + k_0 2\pi \sin \theta)) + O(\eta). \quad (3.10)$$

再根据 η 的任意性, 可以得到等式 (3.2). 引理得证. $\square$

引理 3.3 设 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 由 (1.2) 给定, 其中 $a = 2$ 和 $b = 1$. 若 (3.1) 和 (3.2) 成立, 则 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的 TGWF.

证明 首先需要验证如下级数的收敛性,

$$P(f) := \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + k2\pi 2^j \sin \theta)} \\ \times \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi + k2\pi \sin \theta) d\xi,$$

其中 $\hat{f}$ 是紧支撑的. 事实上不妨假设 $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-H, H]$, 那么存在 $J \in \mathbb{Z}$ 满足

$$|P(f)| = \frac{2\pi}{\csc \theta} \left| \sum_{j \leq J} \sum_{|k| \leq S_j} \int_{-H}^H \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + k2\pi 2^j \sin \theta)} \right. \\ \times \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi + k2\pi \sin \theta) d\xi \Big| \\ \leq \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{j \leq J} \sum_{|k| \leq S_j} \left[\int_{-H}^H |\hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + k2\pi 2^j \sin \theta/b)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\ \times \left[\int_{-H(1+1/(\pi \sin \theta))}^{H(1+1/(\pi \sin \theta))} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\ \leq C \sum_{j \leq J} 2^{-j} \|\hat{f}\|_\infty^2 \int_{-H(1+1/(\pi \sin \theta))}^{H(1+1/(\pi \sin \theta))} |\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\ \leq C \|\hat{f}\|_\infty^2 \|\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi]\|^2,$$

其中 $S_j = \frac{H}{\pi \sin \theta} 2^{-j}$. 注意到引理 3 中定义的 Λ 和 I_α , $P(f)$ 可以重写为

$$P(f) = \frac{2\pi}{\csc \theta} \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi + 2\pi \alpha \sin \theta)} \\ \times \left[\sum_{(j,k) \in I_\alpha} \overline{\mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi)} \mathcal{F}^\theta[e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi](2^{-j}\xi + k2\pi \sin \theta) \right] d\xi. \quad (3.11)$$

再根据条件 (3.1) 和 (3.2), 有

$$P(f) = \frac{2\pi}{\csc \theta} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\xi) \overline{\hat{f}^\theta(\xi)} d\xi = \|f\|^2. \quad (3.12)$$

因为紧支撑函数在 L^2 中是稠密的, 所以 (3.12) 对于 $f \in L^2$ 也是成立的. 故 $\{\psi_{\theta,j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的 TGWF. 引理得证. $\square$

参考文献

- 1 Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. IEEE Trans Signal Process, 1994, 42: 3084–3091
- 2 McBride A C, Kerr F H. On namias's fractional Fourier transforms. IMA J Appl Math, 1987, 39: 159–175
- 3 Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. J Inst Math Appl, 1980, 25: 241–265
- 4 Ozaktas H M, Kutay M A, Zalevsky Z. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing. New York: John Wiley & Sons, 2000
- 5 Pei S C, Yeh M H, Luo T L. Fractional Fourier series expansion for finite signals and dual extension to discrete-time fractional fourier transform. IEEE Trans Signal Proce, 1999, 47: 2883–2888

- 6 Bhatnagar G, Raman B. Encryption based robust watermarking in fractional wavelet domain. *Rec Adv Mult Sig Proc Commun*, 2009, 231: 375–416
- 7 Mendlovic D, Zalevsky Z, Mas D, et al. Fractional wavelet transform. *Appl Opt*, 1997, 36: 4801–4806
- 8 Shi J, Zhang N T, Liu X P. A novel fractional wavelet transform and its applications. *Sci China Inf Sci*, 2012, 55: 1270–1279
- 9 Prasad A, Manna S, Mahato A, et al. The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform. *J Comput Appl Math*, 2014, 259: 660–671
- 10 Kerr F H. Namias' fractional Fourier transforms on l^2 and applications to differential equations. *J Math Anal Appl*, 1988, 136: 404–418
- 11 Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. New York: Springer, 2003
- 12 施咸亮, 陈芳. 仿射框架的必要条件和充分条件. *中国科学 A 辑*, 2005, 35: 831–840
- 13 Chui C K, Shi X L. Orthonormal wavelets and tight frames with arbitrary real dilations. *Appl Comput Harmon Anal*, 2000, 9: 243–264

Generalized wavelet frames

SHEN YanFeng, YUAN DeHui & YANG ShouZhi

Abstract The main purpose of this paper is to discuss generalized wavelet frames (GWF), which is based on fractional Fourier transform and wavelet frames. By analyzing Fourier transformation of the mother wavelets, we show several sufficient conditions and necessary conditions for GWF of $L^2(\mathbb{R})$. At last, when the parameters are selected by $a = 2$ and $b = 1$ as a special condition, a necessary and sufficient condition is given for tight GWF.

Keywords generalized wavelet frames, fractional Fourier transform, Parseval's formula

MSC(2010) 42C40, 26A33, 46F12

doi: 10.1360/012015-10