用于计算高耸塔架的整体空间桁架法

上海同济大学电视塔设计组

上海电视塔是在无产阶级文化大革命取得了伟大胜利,国内外大好形势下,为了更广泛深入地宣传马列主义毛泽东思想,大力发展电视广播事业而兴建的。电视塔总高210.55米,在125.55米以上为天线架,安装三组电视(包括彩色电视)天线和一组调频天线。塔体采用六边形结构(图1),顶部外接圆直径为6米,底部为40米。天线架为四边形结构。塔架所有柱子和横杆均采用钢管,钢管由钢板卷成型后再焊接而成。斜杆采用由圆钢组成的柔性交叉体系。在塔体部分的斜杆设有花兰螺旋,并予加应力至800—1000公斤/厘米²。塔体下面为机房,平面亦为六边形。塔体的柱子和横杆采用16锰钢,斜杆采用30硅钛钢,天线架采用3号钢。

我国工人阶级和技术人员遵照毛主席的教导:“中国人民有志气,有能力,一定要在不远的将来,赶上和超过世界先进水平”。在塔架的节点采用全焊连接,革除了费钢的法兰盘,做到了安全、省钢和美观。另外,为了减少高空作业,提高安装质量,采用了156米塔架在地面上水平拼装,整体起扳(图2),其余部分也是在地面拼装后整体提升至设计标高,再同整体起扳的部分连接。

目前,对于高耸塔架的计算大多采用平面桁架法或分层空间桁架法^{*}。平面桁架法把塔架分解成几个平面桁架,分别求出这些桁架的内力,再把内力组合起来,得到塔架的内力。这一方法由于忽略了塔架各个塔面的折角和各杆件间的变形协调关系,对于塔柱为折线形的,或者属超静定体系的塔架,计算误差比较大。分层空间桁架法也是把塔架各

图1 电视塔简图

层间的杆件变形协调关系忽略掉,而把塔架每一层独立地按超静定体系来解算,也带来了一定的误差。

最精确的计算方法,是整体空间桁架法,

本文1973年12月24日收到。

^{*} 参看北京工业建筑设计院编《塔桅钢结构设计》，1972年出版。魏琰、傅志镇、徐蜀云：《电视塔网架式塔架结构分析》，1963年10月。

图2 整体起扳示意图

就是把整个塔架作为一个超静定体系，根据平衡条件和变形协调条件列出联立方程式，然后求解塔架的内力和变形。但是，这种方法需求解大量的联立方程式，而方程式中又包含大量的系数，所以只有应用电子计算机才能迅速而又精确地进行解算。

我们在上海电视塔的设计工作中，除采用了分层空间桁架法进行初算外，还用整体空间桁架法作比较精确的计算。为了减少计算工作量并保证计算结果的精确度，在计算程序中利用了有限福利叶变换以及三角函数的正交性，同时采用了迁移矩阵法来进行解算。这一方法具有下列三个特点：

(1) 所有联立方程式中的系数都由电子计算机自动算出来；

(2) 把所选择的位移未知量通过参变量来表示，利用数学上的正交关系即对称性和反对称性，使未知量能分成互不相关的几组，从而大大地减少解算时间；

(3) 利用塔架各层杆件布置的规律性，使联立方程式也具有一定的规律性，而且每条方程式所包含的未知量很少，因而解算工作简单而精确度也比较高。

这一方法适用于具有刚性交叉斜杆的塔架以及斜杆的预拉应力达使用时最大应力的一半以上的柔性交叉斜杆塔架*。

一、平衡方程式的建立

对于一个边数为 N 的塔架，每个节点有三个位移未知量，即 u （沿横截面外接圆的径向）、 v （沿外接圆的切向）、和 w （竖向），如

图3所示。 u 以向外为正， v 以逆时针方向或逆钟向为正（从上往下看）， w 以向上为正。

图3 塔架的位移、节点和杆件的编号

设 i 表示塔架层次， k 表示横截面中节点编号（按反钟向顺序编），每个节点的位移 $u_{i,k}$ 、 $v_{i,k}$ 和 $w_{i,k}$ 可用有限福利叶变换通过参变量 $u_i^{(n)}$ 、 $\tilde{u}_i^{(n)}$ 、 $v_i^{(n)}$ 、 $\tilde{v}_i^{(n)}$ 、 $w_i^{(n)}$ 和 $\tilde{w}_i^{(n)}$ 来表示：

$$\begin{aligned} u_{i,k} &= \sum_{n=0}^{n_1} u_i^{(n)} \cos \frac{2nk\pi}{N} + \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{u}_i^{(n)} \sin \frac{2nk\pi}{N} \\ v_{i,k} &= \sum_{n=1}^{n_2} v_i^{(n)} \sin \frac{2nk\pi}{N} + \sum_{n=0}^{n_1} \tilde{v}_i^{(n)} \cos \frac{2nk\pi}{N} \\ w_{i,k} &= \sum_{n=0}^{n_1} w_i^{(n)} \cos \frac{2nk\pi}{N} + \sum_{n=1}^{n_2} \tilde{w}_i^{(n)} \sin \frac{2nk\pi}{N} \end{aligned} \quad (1)$$

* 对于未加预应力或者预应力比较小的柔性交叉斜杆塔架，由于受压斜杆退出工作后杆件布置成为不对称，所以不能利用式(1)的福利叶变换。对于这种塔架，可先用一般方法鉴别出受压的斜杆并予以撤除后，直接用节点位移 $u_{i,k}$ 、 $v_{i,k}$ 和 $w_{i,k}$ 作为未知量，用下面的式(2)~(6)求出平衡方程(7)。

上式中 当 N 为奇数时:

$$n_1 = n_2 = \frac{N-1}{2};$$

当 N 为偶数时:

$$n_1 = \frac{N}{2}, \quad n_2 = \frac{N}{2} - 1.$$

容易看出,式(1)中右边第一组各项对 x 轴对称,第二组各项对 x 轴反对称.

塔架中每根杆件的变形可通过杆件两端的位移 $u_{i,k}$ 、 $v_{i,k}$ 和 $w_{i,k}$ 来表示,亦即是可通

过参变量 $u_i^{(n)}$ 、 $\tilde{u}_i^{(n)}$ 、 $v_i^{(n)}$ 、 $\tilde{v}_i^{(n)}$ 、 $w_i^{(n)}$ 和 $\tilde{w}_i^{(n)}$ 来表示.

对于每个节点 (i, k) , 计算五根杆件(图 3 中的杆 1、2、3、4 和 5)的变形. 当全部考虑每层的 N 个节点后,就把该层的 $5N$ 根杆件都计算在内.

设 R_i ——第 i 层横截面的外接圆半径,

r_i ——第 i 层横膈中圆环的外接圆半径,

H_i ——第 i 层的层高,

由图 3 可得:

$$\left. \begin{aligned} \text{杆 1:} \quad l &= 2R_i \sin \frac{\pi}{N} \\ l\Delta l &= 2R_i \sin \frac{\pi}{N} \left[(u_{i,k} + u_{i,k-1}) \sin \frac{\pi}{N} + (v_{i,k} - v_{i,k-1}) \cos \frac{\pi}{N} \right] \\ \text{杆 2:} \quad l &= \sqrt{(R_i - R_{i-1})^2 + H_i^2} \\ l\Delta l &= (R_i - R_{i-1})(u_{i,k} - u_{i-1,k}) + H_i(w_{i,k} - w_{i-1,k}) \\ \text{杆 3:} \quad l &= \sqrt{R_i^2 + R_{i-1}^2 - 2R_i R_{i-1} \cos \frac{2\pi}{N} + H_i^2} \\ l\Delta l &= u_{i-1,k-1} \left(R_{i-1} - R_i \cos \frac{2\pi}{N} \right) + u_{i,k} \left(R_i - R_{i-1} \cos \frac{2\pi}{N} \right) \\ &\quad + (R_{i-1}v_{i,k} - R_iv_{i-1,k-1}) \sin \frac{2\pi}{N} + H_i(w_{i,k} - w_{i-1,k-1}) \\ \text{杆 4:} \quad l &= \sqrt{R_i^2 + R_{i-1}^2 - 2R_i R_{i-1} \cos \frac{2\pi}{N} + H_i^2} \\ l\Delta l &= u_{i-1,k+1} \left(R_{i-1} - R_i \cos \frac{2\pi}{N} \right) + u_{i,k} \left(R_i - R_{i-1} \cos \frac{2\pi}{N} \right) \\ &\quad - (R_{i-1}v_{i,k} - R_iv_{i-1,k+1}) \sin \frac{2\pi}{N} + H_i(w_{i,k} - w_{i-1,k+1}) \\ \text{杆 5:} \quad l &= R_i - r_i \\ \Delta l &= 0 \quad (\text{当 } n=1 \text{ 时}) \\ \Delta l &= u_{i,k} \quad (\text{当 } n \neq 1 \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

每根杆件的变形能为

$$U_1 = \frac{S\Delta l}{2} = \frac{EF}{2l^3} (l\Delta l)^2. \quad (3)$$

把式(1)和式(2)代入式(3),得每根杆件的变形能. 将整个塔架所有杆件的变形能求和,得

$$U_{\text{内}} = \sum_i \sum_k \sum_j U_{1j}, \quad (4)$$

式中: i ——层次(共 m 层), k ——每层节点

编号(共 N 个节点), j ——每个节点中杆件编号(共 5 根).

设 $P_{u_{i,k}}$ 、 $P_{v_{i,k}}$ 和 $P_{w_{i,k}}$ 分别表示在节点 i, k 上的外力沿 u 、 v 和 w 方向的分力, 则外力势能为:

$$U_{\text{外}} = - \sum_i \sum_k (P_{u_{i,k}} \cdot u_{i,k} + P_{v_{i,k}} \cdot v_{i,k} + P_{w_{i,k}} \cdot w_{i,k}), \quad (5)$$

塔架的势能为

$$U = U_{\text{内}} + U_{\text{外}} \quad (6)$$

塔架的平衡方程可用最小势能原理求得。把式(6)的 U 对每一种位移分量取偏微商,并使其等于零,就可得到一组联立方程式。

从式(2)可见,第 i 层各杆件的变形能只同附标 i 和 $i-1$ 有关,亦即是,第 i 层的节点位移 u_i 、 v_i 和 w_i 只出现在第 i 层和第 $i+1$ 层杆件的变形能算式中。

另外,从式(3)可见,每根杆件的变形能同 $(l\Delta l)^2$ 有关,亦即是同式(2)中各变形算式右边的平方有关。

因此, $U_{\text{内}}$ 中包含 u_i 的项为: u_i^2 、 $u_i u_{i-1}$ 、 $u_i u_{i+1}$ 、 $u_i v_i$ 、 $u_i v_{i-1}$ 、 $u_i v_{i+1}$ 、 $u_i w_i$ 、 $u_i w_{i-1}$ 和 $u_i w_{i+1}$ 。

从式(1)可以看出,上述这些包含 u_i 的项,其系数可分成下列几种

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \cos \frac{2nk\pi}{N} \cos \frac{2n'k'\pi}{N}, \\ & \sum_{k=1}^N \sin \frac{2nk\pi}{N} \sin \frac{2n'k'\pi}{N}, \\ & \sum_{k=1}^N \sin \frac{2nk\pi}{N} \sin \frac{2n'k'\pi}{N}. \end{aligned}$$

当 $n \neq n'$ 时,利用三角函数的正交性可以证明上列系数全都等于零。因此,只余下 $n = n'$ 的各项。对于这些项,可得到:

$$\sum_{k=1}^N \cos \frac{2nk\pi}{N} \cos \frac{2nk'\pi}{N} \neq 0 \quad (\text{当 } k \neq k' \text{ 或 } k = k' \text{ 时}) \quad (a)$$

$$\sum_{k=1}^N \sin \frac{2nk\pi}{N} \sin \frac{2nk'\pi}{N} \neq 0 \quad (\text{当 } k \neq k' \text{ 或 } k = k' \text{ 时}) \quad (b)$$

$$\sum_{k=1}^N \cos \frac{2nk\pi}{N} \sin \frac{2nk'\pi}{N} \neq 0 \quad (\text{当 } k \neq k' \text{ 时}) \\ = 0 \quad (\text{当 } k = k' \text{ 时}) \quad (c)$$

从式(2)还可看出,当对塔架横截面 N 个

节点求和后, u_i^2 、 $u_i u_{i-1}$ 、 $u_i u_{i+1}$ 、 $u_i w_i$ 、 $u_i w_{i-1}$ 和 $u_i w_{i+1}$ 各项只余下上列系数中的(a)和(b),而 $u_i v_i$ 、 $u_i v_{i-1}$ 和 $u_i v_{i+1}$ 各项只余下上列系数中的(c)。

因此,式(1)中的 $3N$ 个参变量可分成互不相关的 N 组:

当 N 为奇数时

(1)	$u_i^{(0)}$	$\tilde{v}_i^{(0)}$	$w_i^{(0)}$
(2)	$u_i^{(1)}$	$v_i^{(1)}$	$w_i^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(n_1)	$u_i^{(n_1-1)}$	$v_i^{(n_1-1)}$	$w_i^{(n_1-1)}$
$(n_1 + 1)$	$u_i^{(n_1)}$	$v_i^{(n_1)}$	$w_i^{(n_1)}$
$(n_1 + 2)$	$\tilde{u}_i^{(1)}$	$\tilde{v}_i^{(1)}$	$\tilde{w}_i^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(N)	$\tilde{u}_i^{(n_2)}$	$\tilde{v}_i^{(n_2)}$	$\tilde{w}_i^{(n_2)}$

当 N 为偶数时

(1)	$u_i^{(0)}$	$\tilde{v}_i^{(0)}$	$w_i^{(0)}$
(2)	$u_i^{(1)}$	$v_i^{(1)}$	$w_i^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(n_1)	$u_i^{(n_1-1)}$	$v_i^{n_1}$	$w_i^{(n_1-1)}$
$(n_1 + 1)$	$u_i^{(n_1)}$	$\tilde{v}_i^{(n_1)}$	$w_i^{(n_1)}$
$(n_1 + 2)$	$\tilde{u}_i^{(1)}$	$\tilde{v}_i^{(1)}$	$\tilde{w}_i^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(N)	$\tilde{u}_i^{(n_2)}$	$\tilde{v}_i^{(n_1-1)}$	$\tilde{w}_i^{(n_2)}$

也就是说,可以列出 N 个互不相关的联立方程式组,每组中联立方程式的数目只为原来未知量总数的 $1/N$,这样就使解算工作大大加快,精确度也有所提高。

如果应用“群论”来处理这个结构的对称性质,就可以立即得到上面的结论。

现在回到塔架的平衡方程式。由于当 $n \neq n'$ 时, u_i 、 v_i 和 w_i 的系数都等于零,所以 $U_{\text{内}}$ 中包含 $u_i^{(1)}$ 的项为 $u_i^{(1)2}$ 、 $u_i^{(1)} u_{i-1}^{(1)}$ 、 $u_i^{(1)} u_{i+1}^{(1)}$ 、 $u_i^{(1)} v_i^{(1)}$ 、 $u_i^{(1)} v_{i-1}^{(1)}$ 、 $u_i^{(1)} v_{i+1}^{(1)}$ 、 $u_i^{(1)} w_i^{(1)}$ 、 $u_i^{(1)} w_{i-1}^{(1)}$ 和 $u_i^{(1)} w_{i+1}^{(1)}$ 。其它项都消失了。

将式(6)的 U 对 $u_i^{(1)}$ 取偏微商,并使其等于零,可得到:

把式(9)代入式(10)中,就可把 u_{m-1} 、 v_{m-1} 和 w_{m-1} 表为

$$\begin{aligned} u_{m-1} &= T_{11}^{m-2} u_{m-2} + T_{12}^{m-2} v_{m-2} \\ &\quad + T_{13}^{m-2} w_{m-2} + T_{14}^{m-2}, \\ v_{m-1} &= T_{21}^{m-2} u_{m-2} + T_{22}^{m-2} v_{m-2} \\ &\quad + T_{23}^{m-2} w_{m-2} + T_{24}^{m-2}, \\ w_{m-1} &= T_{31}^{m-2} u_{m-2} + T_{32}^{m-2} v_{m-2} \\ &\quad + T_{33}^{m-2} w_{m-2} + T_{34}^{m-2}. \end{aligned}$$

这样进行下去,一直到第1层,得到

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= T_{11}^0 u_0 + T_{12}^0 v_0 + T_{13}^0 w_0 + T_{14}^0 \\ v_1 &= T_{21}^0 u_0 + T_{22}^0 v_0 + T_{23}^0 w_0 + T_{24}^0 \\ w_1 &= T_{31}^0 u_0 + T_{32}^0 v_0 + T_{33}^0 w_0 + T_{34}^0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

当所有塔脚都同基础连结时, $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, 所以得

$$\begin{aligned} u_1 &= T_{14}^0, \\ v_1 &= T_{24}^0, \\ w_1 &= T_{34}^0. \end{aligned}$$

将这些数值代入第2层 u_2 、 v_2 和 w_2 的表达式中,就可求出 u_2 、 v_2 和 w_2 . 这样逐步向上层计算,可求得所有的位移值 u 、 v 和 w , 然后从式(2)求出各杆件的变形和内力.

2. 塔架在整体架设时的计算

塔架在整体架设时,只有两只塔脚同基础连接,所以边界条件比较复杂. 由于这时塔架外力是静定的,所以两只塔脚的支承反力可以求出,于是就变成一个悬空的塔架受一个自相平衡的力系作用的问题. 对于第零层的杆件,取杆2、3和4(图3)的截面积为零. 这样,第零层的平衡方程(7)就只有 u_0 、 v_0 、 w_0 和 u_1 、 v_1 、 w_1 . 另外还有从 u_1 、 v_1 、 w_1 到 u_0 、 v_0 、 w_0 的迁移矩阵(即式11). 消去 u_1 、 v_1 、 w_1 就得到只包含 u_0 、 v_0 、 w_0 的三个方程.

当 $n \geq 2$ 时,这三个方程的系数行列式不为零,因此可以解出 u_0 、 v_0 、 w_0 .

$$P_{w_1} = - \frac{M_A}{\sum_{k=0}^{N_{P1}-1} \cos^2 \left(k \frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right)} \cdot \frac{\cos \theta_A}{R_A} - \frac{G_A}{N_{P1}}$$

当 $n \leq 1$ 时,这三个方程中有二个是线性相关的,即它的系数行列式的秩为1. 虽然如此,由于所有的力自相平衡,这三个方程仍旧是协调的,解是存在的,但不唯一,有二个线性无关解可以任意叠加.

因此,总共有6个线性无关解可以任意叠加. 这6个解的物理意义是很明显的,它们相当于刚体空间运动的6个自由度.

随意假定这六个任意解,不会影响到塔架的内力. 在程序编排中,我们规定当 $n \leq 1$ 时, $v_0 = w_0 = 0$.

这样,就可解出所有的位移值 u 、 v 和 w , 然后从式(2)求出各杆件的变形和内力.

三、由几个区段组成的塔架的计算

对于由几个区段组成的塔架(图1),每个区段可单独解算,而把上部结构的作用通过顶层弯矩 M 、切力 Q 和轴力 G 来表示. 例如,计算最下区段 A_0A 时,先求出顶层(第 n_1 层)的 M_A 、 Q_A 和 G_A , 然后用下列各式算出顶层的外力

$$\begin{aligned} P_{u_1} &= \frac{Q_A}{N_{P1}} \cos \theta_A \\ P_{u_2} &= \frac{Q_A}{N_{P1}} \cos \left(\frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right) \\ &\vdots \\ P_{u_{N_{P1}}} &= \frac{Q_A}{N_{P1}} \cos \left[(N_{P1} - 1) \frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right] \\ P_{v_1} &= - \frac{Q_A}{N_{P1}} \sin \theta_A \\ P_{v_2} &= - \frac{Q_A}{N_{P1}} \sin \left(\frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right) \\ &\vdots \\ P_{v_{N_{P1}}} &= - \frac{Q_A}{N_{P1}} \sin \left[(N_{P1} - 1) \frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{w_2} &= - \frac{M_A}{\sum_{k=0}^{N_{P1}-1} \cos^2 \left(k \frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right)} \cdot \frac{\cos \left(\frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right)}{R_A} - \frac{G_A}{N_{P1}} \\
 &\vdots \\
 P_{w_{N_{P1}}} &= - \frac{M_A}{\sum_{k=0}^{N_{P1}-1} \cos^2 \left(k \frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right)} \cdot \frac{\cos \left[(N_{P1} - 1) \frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right]}{R_A} - \frac{G_A}{N_{P1}}
 \end{aligned}$$

塔架第 i 层的顺风向位移和转角为

$$y_i = \frac{u_{i,1}}{\cos \theta_A},$$

$$\varphi_i = \frac{-w_{i,1} + w_{i,K_A}}{R_i \left\{ \cos \theta_A - \cos \left[(K_A - 1) \frac{2\pi}{N_{P1}} + \theta_A \right] \right\}}$$

式中当 N_{P1} 为奇数时, $K_A = \frac{N_{P1} + 1}{2}$; 当

N_{P1} 为偶数时, $K_A = \frac{N_{P1}}{2} + 1$.

对于中间区段 AB , 计算方法和 A_0A 区段相同, 只是把 M_A 、 Q_A 、 G_A 改为第 n_2 层的 M_B 、 Q_B 、 G_B , 同时 N_{P1} 、 θ_A 、 R_A 改为 N_{P2} 、 θ_B 、 R_B .

对于顶部单根桅杆 BE , 可采用一般材料力学公式

$$y_i = \frac{Q_i H_i^3}{3EJ_i} + \frac{M_i H_i^2}{2EJ_i} + \varphi_{i-1} H_i + y_{i-1},$$

$$\varphi_i = \frac{Q_i H_i^2}{2EJ_i} + \frac{M_i H_i}{EJ_i} + \varphi_{i-1}.$$

四、同其他方法的比较

本文所介绍的方法把整个塔架作为一个超静定体系来求解, 满足所有的平衡条件和变形协调条件, 所以精确度比较高. 由于本

法应用电子计算机解算, 一般只需几分钟便可输出结果, 不但给出所有杆件 (包括横杆和横膈) 的内力, 而且还给出塔架的位移和转角; 而分层空间桁架法只给出塔柱和斜杆的计算公式, 横杆和横膈的内力须按节点法另行计算, 塔架的位移和转角也须另按公式计算, 所以工作量比较大. 另外, 本法能迅速地算出塔架的内力和变形, 这就为更进一步研究塔架的实际工作和动力性能提供一个精确的方法.

根据前面推导的公式, 我们编制了用于 709 型计算机的源程序, 这一程序可计算任意边数、任意层数、任意区段数的塔架. 计算时只需把输入数据 (塔架几何尺寸、杆件截面积、和荷载) 输入计算机, 经过几分钟 (计算速度为 110,000 次/秒) 的运算后输出结果.

用本法计算上海电视塔, 同用分层空间桁架法计算所得结果比较, 塔柱内力相差最大为 2.8%, 一般在 1% 以内. 个别斜杆内力相差达 9.1%, 有的甚至更大, 但大多数相差较小.

致谢: 本文得到大连工学院数理系力学教研组和上海计算技术研究所的大力帮助, 特此致谢.