半空间中次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理及应用

张艳慧^{①②}

① 北京工商大学数学系, 北京 100048;

② Department of Statistics, University College Cork, Cork, Ireland
E-mail: zhangyanhui@th.btbu.edu.cn

收稿日期: 2014-09-28; 接受日期: 2014-12-12

国家自然科学基金 (批准号: 11401162) 和爱尔兰自然科学基金 (批准号: 11/PI/1027) 资助项目

摘要 本文利用调和函数的 Carleman 公式, 结合 Levi 的方法, 在半空间中证明了次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理. 作为 Phragmén-Lindelöf 定理的应用, 本文引入了半空间中的 C 类函数, 并且得到了次调和函数属于 C 类函数的一个充分必要条件, 从而推广了 Ahlfors 和 Levi 等的经典结果.

关键词 Phragmén-Lindelöf 定理 调和函数的 Carleman 公式 调和控制函数 C 类函数

MSC (2010) 主题分类 31B05, 35B50, 49J25

1 引言和主要结果

在复分析中, 角形区域上解析函数的 Phragmén-Lindelöf 定理, 就是基于该解析函数的边界行为和无穷远点处的增长性质, 给出其在角形区域内的一个估计^[1]. Phragmén-Lindelöf 定理的条件比最大模原理的条件要弱, 且在其他各种无界域中都有应用, 所以一直受到国内外学者的广泛关注.

众所周知, 如果 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个解析函数, 那么, $\log |f(z)|$ 是 $\mathbb{C}$ 中的次调和函数, 从而, 次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理也相应成立 (参见文献 [2]). $\mathbb{R}^n$ 的锥中也有类似的次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理. 关于不同微分方程, 不同区域和不同增长条件下的 Phragmén-Lindelöf 定理请参见文献 [3–10].

近年来, Vitolo^[11,12] 对椭圆微分方程弱解的 Phragmén-Lindelöf 定理进行了详细的研究, Talvi^[13] 利用 Phragmén-Lindelöf 定理证明了一个唯一性定理.

Ahlfors^[3] 给出了半平面中解析函数的 Phragmén-Lindelöf 定理, 即下面的定理 1.1, 并将其形式上推广到 n 维变量的调和函数^[14].

定理 1.1 令 $u(z)$ 是上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{z = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ 中的调和函数. 记

$$m_u(r) = \frac{1}{2} \int_0^\pi u(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi, \quad U(r) = \int_0^r [u(t) + u(-t)] dt,$$

则

$$\frac{m_u(r)}{r} + \frac{1}{2} \int_{r_0}^r \frac{U(t)}{t^3} dt \quad (1.1)$$

是一个常数. 若 $u(z)$ 是 $\mathbb{C}_+$ 中的一个次调和函数, 则 (1.1) 是一个关于 r 递增的函数.

英文引用格式: Zhang Y H. Phragmén-Lindelöf theorems of subharmonic functions and their applications in the Half space (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1931–1938, doi: 10.1360/N012014-00198

这里引入的 $m_u(r)$ 显然是非负连续的. 引入类似于量 $m_u(r)$ 的思想来源于 Nevanlinna 兄弟所考虑的 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log^+ |f| \cos \theta d\theta$, 其中 $f(re^{i\theta})$ 是解析函数^[14], $\log^+ |f| \cos \theta = \max\{\log |f| \cos \theta, 0\}$.

Levi 借用亚纯函数 Carleman 公式的证明过程, 用较简单的方法证明了类似于定理 1.1 的次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理^[2].

经典的 Phragmén-Lindelöf 定理的研究目标是考察解析函数 $f(z)$ 的最大模 $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, 对比于 $m_f(r)$, 显然有 $M_f(r) \geq \frac{1}{2}m_f(r)$. 因此,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r)}{r} > 0.$$

但是我们并不能确定 $\frac{\log M_f(r)}{r}$ 的极限是否存在.

注意到调和函数 $u(z)$ 的最大模 $M_u(r) = \max_{|z|=r} |u(z)|$, 大于 $m_u(r)$ 和一个固定常数的乘积. 因此可以断定,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_u(r)}{r} > 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} M_u(r)r^{n-1} > 0$$

至少有一个是成立的. 在复平面中可以通过对其中的一个取逆使得另外一个成立. 但是在高维情形却有本质上的不同.

通常用到的 Phragmén-Lindelöf 定理的条件会减弱一些, 参见文献 [14]. 对于半平面中的调和函数, 它也是一个非常重要的定理, 从而, Ahlfors 将定理 1.1 推广到 n 维变量的调和函数, 即如下定理:

定理 1.2 令 $u(x)$ 是半空间 $\mathbb{H} = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n > 0\}$ 的区域 Ω 中的正调和函数. 假设 u 在 Ω 的所有边界点上是 0. 记

$$m(r) = \int_{\Delta_r} u \cos \varphi dw,$$

其中 Δ_r 是 Ω 和球 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$ 的交集, $\sin \varphi = \frac{x_n}{r}$, dw 是半径为 1 的球表面积元素的中心投影, 则极限

$$\eta_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{r}, \quad \eta_2 = \lim_{r \rightarrow 0} m(r)r^{n-1}$$

存在, 且至少有一个为正.

- (1) 若 $\eta_1 = 0$, 则函数 $\frac{m(r)}{r}$ 是非降的;
- (2) 若 $\eta_2 = 0$, 则函数 $m(r)r^{n-1}$ 是非增的.

文献 [15] 得到半空间 $\mathbb{H}$ 中调和函数的 Carleman 公式, 即如下的引理 1.1:

引理 1.1 若 $u(x)$ 是 $\mathbb{H}$ 中的调和函数, 连续到边界, $d\sigma(x)$ 是 $\mathbb{H}$ 中球上的面积元素, 则

$$\int_{\{x: |x|=R, x_n>0\}} u(x) \frac{nx_n}{R^{n+1}} d\sigma(x) + \int_{\{x: r<|x'|<R, x_n=0\}} u(x') \left(\frac{1}{|x'|^n} - \frac{1}{R^n} \right) dx' = A_u(r, R), \quad (1.2)$$

其中

$$A_u(r, R) := - \left(\frac{c_1}{r^n} + \frac{c_2}{R^n} \right)$$

是一个只与 r 和 R 有关的函数, 且函数 $c_1(r)$ 和 $c_2(r)$ 分别如下定义:

$$c_1 := \int_{\{x: |x|=r, x_n>0\}} \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\partial u(x)}{\partial r} \right) x_n d\sigma(x), \quad c_2 := \int_{\{x: |x|=r, x_n>0\}} \left(\frac{u(x)}{r} - \frac{\partial u(x)}{\partial r} \right) x_n d\sigma(x),$$

这里

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{r} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

文献 [16] 利用调和函数的 Carleman 公式 (1.2), 证明了若半空间中一个调和函数的正部满足一个缓慢增长条件, 则该函数可以由其边界超平面上的积分表示出来. 受到文献 [2, 3, 15, 16] 的启发, 一个自然的问题是, 在半空间中是否可以应用调和函数的 Carleman 公式得到次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理? 虽然 Ahlfors 利用半圆上调和函数的 Poisson 积分公式给出了相应的高维空间中调和函数的情形, 但还只是形式上的推广. 本文应用调和函数的 Carleman 公式, 结合 Levi^[2] 的方法得到了半空间中次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理, 将 Levi 和 Nevanlinna 兄弟的方法和结果推广到高维空间, 并且给出了关于次调和函数的类似于 Ahlfors 在定理 1.2 中的加权均值 $m(r)$ 的清楚表达式, 从而推广了 Ahlfors^[3, 14], Levi^[2] 和 Nevanlinna 兄弟的结果. 作为 Phragmén-Lindelöf 定理的应用, 本文给出了半空间中具有正调和控制函数的次调和函数的积分表达式, 并且得到了次调和函数属于 C 类函数的一个充分必要条件.

高维空间中的 Phragmén-Lindelöf 定理是一个非常有用的工具, 主要用于描述无穷可微函数类, 特别应用于分布理论的测试空间和相应的偏微分方程中.

2 半空间中次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理

我们将由 Nevanlinna 兄弟公式化的 Phragmén-Lindelöf 定理 1.1 推广至半空间 $\mathbb{H}$ 中的次调和函数. 调和函数的 Carleman 公式 (引理 1.1) 为定理 2.1 的证明提供了一个简洁的方法.

定理 2.1 令 $v(x)$ 是 $\mathbb{H}$ 中的次调和函数, 记

$$m_v(r) = \int_{\{x: |x|=r, x_n>0\}} \frac{nx_n v(x)}{r^{n+1}} d\sigma(x), \quad V(r) = \int_{\{x: 0<|x|<r, x_n=0\}} n[v^+(x') + v^+(-x')] dx',$$

则

$$m_v(r) + \int_{\{x: r<|x|<R, x_n=0\}} \frac{V(x')}{|x'|^{n+1}} dx'$$

是关于 r 的非降函数. 如果 $v(x)$ 是调和函数, 则

$$m_v(r) + \int_{\{x: r<|x|<R, x_n=0\}} \frac{V(x')}{|x'|^{n+1}} dx' = m_v(R)$$

与 r 无关.

注 2.1 定理 1.1 (参见文献 [14, 定理 1]) 利用半圆上调和函数 $u(z)$ 的 Poisson 公式推导出其加权均值 $m(r)$, 并通过整圆上 $u(z)$ 的 Poisson 公式进行计算而得到. 后来, Ahlfors 在文献 [3, 定理 5] 中只是形式上给出了定理 1.1 在半空间 $\mathbb{H}$ 上关于调和函数的推广. 定理 2.1 直接利用半空间 $\mathbb{H}$ 中调和函数的 Carleman 公式^[15], 不仅给出了次调和函数 $v(x)$ 的加权均值 $m_v(r)$ 的清楚表达式, 而且简化了定理 1.1 的证明, 从而推广了 Ahlfors^[3, 14] 和 Levi^[2] 的结果.

定理 2.1 的证明 令 $u(x)$ 是闭上半空间 $\overline{\mathbb{H}}$ 中的调和函数. 由 Carleman 公式的证明^[15], 有

$$\begin{aligned} & \int_{\{x: |x|=R, x_n>0\}} \frac{nx_n u(x)}{R^{n+1}} d\sigma(x) + \int_{\{x: \rho<|x|<R, x_n=0\}} \left(\frac{1}{|x'|^n} - \frac{1}{R^n} \right) [u^+(x') + u^+(-x')] dx' \\ & + A_u(\rho, R) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$A_u(\rho, R) = \frac{c_1(\rho)}{R^n} + c_2(\rho), \quad (2.2)$$

且

$$\begin{aligned} c_1(\rho) &= \int_{\{x:|x|=R, x_n>0\}} \left(\frac{nx_n}{R^{n+1}} - x_n \frac{\partial u(x)}{\partial \rho} \right) d\sigma(x), \\ c_2(\rho) &= - \int_{\{x:|x|=r, x_n>0\}} \left(\frac{(n-1)x_n}{\rho^{n+1}} - x_n \frac{\partial u(x)}{\partial \rho} \right) d\sigma(x), \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \rho} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

若 $u(0) = 0$, 则积分

$$\int_{\{x:0<|x|<r, x_n=0\}} \frac{u^+(x') + u^+(-x')}{|x'|^n} dx' < \infty,$$

且当 $\rho \rightarrow 0$ 时, $A_u(\rho, r)$ 趋于一个常数. 从而对 (2.1) $\rho \rightarrow 0$ 取极限, 有

$$\int_{\{x:|x|=r, x_n>0\}} \frac{nx_n u(x)}{r^{n+1}} d\sigma(x) + \int_{\{x:\rho<|x|<r, x_n=0\}} \left(\frac{1}{|x'|^n} - \frac{1}{r^n} \right) [u^+(x') + u^+(-x')] dx' = A.$$

由剩余项 $A_u(\rho, R)$ 的清楚表达式 (2.2), 对于固定值 $r < R$, 有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [A_u(\rho, R) - A_u(\rho, r)] = 0.$$

由 (2.1) 减去方程

$$\int_{\{x:|x|=r, x_n>0\}} \frac{nx_n u(x)}{r^{n+1}} d\sigma(x) + \int_{\{x:\rho<|x|<r, x_n=0\}} \left(\frac{1}{|x'|^n} - \frac{1}{r^n} \right) [u^+(x') + u^+(-x')] dx' + A_u(\rho, r) = 0,$$

且令 $\rho \rightarrow 0$ 取极限, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\{x:|x|=R, x_n>0\}} \frac{nx_n u(x)}{R^{n+1}} d\sigma(x) - \int_{\{x:|x|=r, x_n>0\}} \frac{nx_n u(x)}{r^{n+1}} d\sigma(x) + \int_{\{x:r<|x|<R, x_n=0\}} \frac{u^+(x') + u^+(-x')}{|x'|^n} dx' \\ & - \int_{\{x:0<|x|<R, x_n=0\}} \frac{u^+(x') + u^+(-x')}{R^n} dx' + \int_{\{x:0<|x|<r, x_n=0\}} \frac{u^+(x') + u^+(-x')}{r^n} dx' = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

对于 $r < R$, 有

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{V(x')}{|x'|^{n+1}} dx' &= \frac{1}{n} \frac{V(r)}{r^n} - \frac{1}{n} \frac{V(R)}{R^n} + \frac{1}{n} \int_r^R \frac{dV(|x'|)}{|x'|^n} \\ &= \frac{V(r)}{r^n} - \frac{V(R)}{R^n} + \int_r^R \frac{u(|x'|) + u(-|x'|)}{|x'|^n} dx'. \end{aligned}$$

从而, (2.3) 可写成如下形式:

$$m_v(R) - m_v(r) + \int_r^R \frac{V(x')}{|x'|^{n+1}} dx' = 0. \quad (2.4)$$

若 $v(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的次调和函数, 在任意半球 $\{x: x_n > 0, |x| < R\}$ 中用 $v(x)$ 的调和控制函数 $u(x)$ 代替 $v(x)$, 类似于恒等式 (2.4), 如下不等式成立,

$$m_u(r) \leq m_u(R) + \int_r^R \frac{U(x')}{|x'|^{n+1}} dx',$$

其中

$$U(r) = \int_{\{x: 0 < |x| < r, x_n = 0\}} n[u^+(x') + u^+(-x')] dx'.$$

或者选择任意小的 $\rho < r$, 有

$$m_u(r) + \int_{\rho}^r \frac{U(x')}{|x'|^{n+1}} dx' \leq m_u(R) + \int_{\rho}^R \frac{U(x')}{|x'|^{n+1}} dx'$$

成立. 定理 2.1 得证. $\square$

定理 2.2 如果 $\mathbb{H}$ 中的次调和函数 $v(x)$ 在超平面 $\partial\mathbb{H}$ 上有非正值, 则 $m_v(r)$ 和 $m_v^+(r)$ 都是非降函数. 特别地, 条件

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} m_v^+(r) = 0,$$

表明 $u^+(x) \equiv 0$, 即函数 $u(x)$ 在 $\mathbb{H}$ 中处处非正, 其中

$$m_v^+(r) = \max\{m_v(r), 0\}, \quad u^+(x) = \max\{u(x), 0\}.$$

证明 假设次调和函数 $v(x)$ 在超平面 $\partial\mathbb{H}$ 上有非正值, 则 $\int_{\rho}^r \frac{V(x')}{|x'|^{n+1}} dx'$ 关于 r 不递增, 因此, $m_v(r)$ 关于 r 不降. 因为函数 $u^+(x)$ 也是次调和的, 所以,

$$m_v^+(r) = \int_{\{x: |x|=r, x_n=0\}} \frac{nx_n u^+(x)}{r^{n+1}} d\sigma(x)$$

关于 r 不递减, 从而定理 2.2 得证. $\square$

3 半空间中次调和函数 Phragmén-Lindelöf 定理的应用

定义 3.1 半空间 $\mathbb{H}$ 中的调和函数 $u(x)$ 称作次调和函数 $v(x)$ 的调和控制函数, 如果 $v(x) \leq u(x)$ 对任意的 $x \in \mathbb{H}$ 成立.

定义 3.2 半空间 $\mathbb{H}$ 中的次调和函数 $v(x)$ 属于 C 类, 如果

$$|v(x)| < (\sigma + \varepsilon)|x| \quad (3.1)$$

对充分大的 $|x|$ 成立, 这里 $0 < \sigma < +\infty$ 是一个常数;

$$\int_{\partial\mathbb{H}} \frac{v^+(x')}{1 + |x'|^n} dx' < \infty. \quad (3.2)$$

由 Hörmander 的结果 (参见文献 [17, 定理 3.1.8' 和 3.3.16]), 可直接得到如下半空间中次调和函数 $v(x)$ 的 Riesz 表示公式.

定理 3.1 令 $v(x)$ 是半空间 $\mathbb{H}$ 中的次调和函数, 有一正的调和控制函数 $u(x)$, 则存在 $\mathbb{H}$ 上的正测度 $d\mu$ 和超平面 $\partial\mathbb{H}$ 上的正测度 $d\sigma_i, i = 1, 2$, 满足

$$\int_{\mathbb{H}} \frac{d\mu(y)}{1 + |y|^n} < \infty, \quad (3.3)$$

$$\int_{\partial\mathbb{H}} \frac{d\sigma_i(y')}{1 + |y'|^n} < \infty, \quad i = 1, 2, \quad (3.4)$$

且存在一常数 a , 使得 $v(x)$ 有如下表达式:

$$v(x) = \int_{\mathbb{H}} G_{\mathbb{H}}(x, y) d\mu(y) - \int_{\partial\mathbb{H}} P_{\mathbb{H}}(x, y') d\sigma_1(y') + \int_{\partial H} P_{\mathbb{H}}(x, y') d\sigma_2(y') + ax_n, \quad (3.5)$$

其中

$$G_{\mathbb{H}}(x, y) = \frac{1}{(n-2)w_{n-1}} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{|x-y^*|^{n-2}} \right], \quad x, y \in \mathbb{H}, \quad x \neq y$$

是半空间 $\mathbb{H}$ 的 Green 函数, 这里 $y^* = \{y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n\}$ 是 y 关于超平面 $\partial\mathbb{H}$ 的反射;

$$P_{\mathbb{H}}(x, y) = -\frac{\partial G_{\mathbb{H}}(x, y')}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0} = \frac{2x_n}{w_{n-1}} \frac{1}{|x-y'|^n}$$

是半空间 $\mathbb{H}$ 的 Poisson 核, 这里 $w_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $(n-1)$ - 维单位球的表面积; 测度 $d\mu = \Delta v$; 对于 $\mathbb{H}$ 中的任一连续函数 $\phi(x)$, 有

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \int_{\mathbb{H}} v(x', x_n) \phi(x', x_n) dx = \int_{\partial\mathbb{H}} v(x') d\sigma_1(x'),$$

即 $d\sigma_1(x')$ 是当 $x_n \rightarrow 0$ 时 $v(x', x_n)$ 的弱极限;

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \int_{\mathbb{H}} u(x', x_n) \phi(x', x_n) dx = \int_{\partial\mathbb{H}} v(x') d\sigma_2(x'),$$

即 $d\sigma_2(x')$ 是 $u(x', x_n)dx'$ 当 $x_n \rightarrow 0$ 时的弱极限.

由文献 [18] 可直接得到如下引理:

引理 3.1 对于定理 3.1 中具有表达式 (3.5) 的次调和函数 $v(x)$, 有 $v(x) = o(|x|)$, $|x| \rightarrow \infty$ 在 $\mathbb{H} \setminus G$ 处处成立, 其中 $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, \rho_j)$, $\rho_j > 0$, $B(x_j, \rho_j)$ 是 $\mathbb{H}$ 中以 x_j 为中心、 ρ_j 为半径的球.

由引理 3.1 可直接得到如下关于 C 类函数的重要结果.

引理 3.2 每一个 C 类函数 $v(x)$ 有如下性质:

$$\begin{aligned} v(x) &= \sigma_+ x_n + o(|x|), \quad x_n \geq 0, \\ v(x) &= \sigma_- x_n + o(|x|), \quad x_n \leq 0 \end{aligned}$$

在 $\mathbb{H} \setminus G$ 处处成立, 其中 $0 < \sigma_{\pm} < +\infty$ 均为常数.

令 D 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中单位球 S 上的一个区域, 这里总是假设区域 D 关于球 S 的边界 ∂D 不是经典位势理论意义下的极点集. 令

$$K^D = \{x = (r, \theta) \in \mathbb{R}^n, 0 < r < \infty, \theta \in D\}$$

是由区域 D 生成的一个锥, 记其截锥为 $K_r^D = K^D \cap B(0, r)$. 二次方程 $\mu(\mu+n-2) = \lambda_0$ 的正根 μ^+ 称作区域 D 的特征常数. Deny 和 Lelong [19] 在截锥 K_r^D 中得到如下次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理:

定理 3.2 令 $v(x)$ 是锥 K^D 中的一个次调和函数. 记 $M(r, v) = \sup_{x \in K_r^D} |v(x)|$. 如果

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} M(r, v) \leq 0,$$

则当 $\sup_{x \in \partial K_r^D} v(x) \leq A$ 时有 $v(x) \leq A$, $x \in K_r^D$.

此外, Yoshida 有一个较强的 n 维 Phragmén-Lindelöf 定理 (参见文献 [20, 推论 3]), 所考虑的角可以扩大到 Wolf 的结果 (参见文献 [21]), 依靠均值定理得以证明. 而其所考虑的区域, 可以作为 Deny 和 Lelong^[19] 的与角无关的 Phragmén-Lindelöf 定理 3.2 的一个推论.

下面应用 Deny 和 Lelong 的次调和函数 Phragmén-Lindelöf 定理, 得到了次调和函数属于 C 类的一个充分必要条件.

定理 3.3 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的次调和函数 $v(x)$ 属于 C 类的充要条件是, $v(x)$ 在上半空间 $\mathbb{H}$ 和下半空间 $-\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$ 中分别有调和控制函数.

证明 若 $v(x)$ 在 $\mathbb{H}$ 中有调和控制函数, 设为 $u(x)$, 则由定理 3.1, 分别存在 $\mathbb{H}$ 和 $\partial\mathbb{H}$ 上满足 (3.3) 和 (3.4) 的正测度 $d\mu, d\sigma_1, d\sigma_2$ 和一个正常数 σ , 使得 $v(x)$ 有表达式 (3.5).

由引理 3.2, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$|v(x)| < (\sigma + \varepsilon)|x|, \quad \sigma = \max(\sigma_+, \sigma_-), \quad x \in \mathbb{H} \setminus G \quad (3.6)$$

对充分大的 $|x|$ 成立. 由次调和函数的 Phragmén-Lindelöf 定理 3.2, (3.6) 在 $B(x_j, \rho_j)$ 内成立, 从而 (3.1) 得证.

记 $v(x')dx' = d\sigma_2(x') - d\sigma_1(x')$, 其中 $d\sigma_1(x')$ 和 $d\sigma_2(x')$ 是 (3.4) 中的测度, 因此, (3.5) 可写成如下形式:

$$v(x) = \int_{\mathbb{H}} G_{\mathbb{H}}(x, y)v(y)dy + \int_{\partial\mathbb{H}} P_{\mathbb{H}}(x, y')v(y')dy' + dy'.$$

此外, 有

$$\int_{\mathbb{H}} \frac{|v(x)|}{1+|x|^n} dx < \infty, \quad \int_{\partial\mathbb{H}} \frac{|v(x')|}{1+|x'|^n} dx' < \infty,$$

或者, 等价地, 有

$$\int_{\mathbb{H}} \frac{v^+(x)}{1+|x|^n} dx < \infty, \quad \int_{\partial\mathbb{H}} \frac{v^+(x')}{1+|x'|^n} dx' < \infty,$$

即 (3.2) 成立.

所以, $v(x)$ 属于 C 类. 充分性得证.

反之, 令 $v(x)$ 是属于 C 类的次调和函数. 由 (3.2) 有

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{H}} \frac{v^+(x')}{1+|x'|^n} dx' < \infty, \quad (3.7)$$

从而, (3.7) 定义了 $\mathbb{H}$ 中的一个正调和函数 $u(x)$, 其在超平面 $\mathbb{H}$ 上的边界值为 $v^+(x)$. 记

$$h(x) = v(x) - u(x),$$

则 $h(x)$ 是 $\mathbb{H}$ 中的次调和函数, 且 $|h(x')| \leq 1$ 在 $\partial\mathbb{H}$ 上处处成立. 由 Phragmén-Lindelöf 定理 3.2,

$$h(x) \leq e^{\sigma x_n}, \quad x_n \geq 0.$$

因此,

$$v(x) \leq \int_{\partial\mathbb{H}} \frac{v^+(x')}{1+|x'|^n} dx' + \sigma x_n,$$

即函数 $v(x)$ 在上半空间 $\mathbb{H}$ 中有一个正的调和控制函数.

类似可证, $v(x)$ 在下半空间 $\mathbb{H}$ 中也存在一个正的调和控制函数. 必要性得证. $\square$

致谢 作者非常感谢与北京师范大学邓冠铁教授的有益讨论.

参考文献

- 1 Phragmén E, Lindelöf E. Sur une extension d'un principe classique de l'analys et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. *Acta Math*, 1908, 31: 381–406
- 2 Levi B Y. *Lectures on Entire Functions*. Providence: Amer Math Soc, 1996
- 3 Ahlfors L V. Remarks on Carleman's formula for functions in a Half plane. *SIAM J Numer Anal*, 1966, 2: 183–187
- 4 Evgrafov M A. *Asymptotic Estimates and Entire Functions*. 3rd ed. Moscow: Nauka, 1979
- 5 SSèn M E, Jackson H L, Rippon P J. On minimally thin and rarefied sets in $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$. *Hiroshima Math J*, 1985, 15: 393–410
- 6 Hayman W K, Kennedy P B. *Subharmonic Functions*, vol. I. London: Academic Press, 1976
- 7 Kondrat'ev V A, Landis E M. Qualitative theory of second order linear differential equations. In: *Partial Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1991, 87–192
- 8 Koosis P. *The Logarithmic Integral*, vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- 9 Polya G, Szego G. *Problems and Theorems in Analysis*, I. Berlin: Springer-Verlag, 1972
- 10 Tsuji M. *Potential Theory in Mondern Function Theory*. New York: Chelsea Publishing, 1975
- 11 Dolcetta I, Vitolo A. A qualitative Phragmén-Lindelöf theorem for fully nonlinear elliptic equations. *J Differential Equations*, 2007, 243: 578–592
- 12 Vitolo A. On the Phragmén-Lindelöf principle for second order elliptic equations. *J Math Anal Appl*, 2004, 300: 244–259
- 13 Talvila E. Growth estimates and Phragmén-Lindelöf principles for half space problems. PhD Thesis. Waterloo: University of Waterloo, 1997
- 14 Ahlfors L V. On Phragmén-Lindelöf's principle. *Trans Amer Math Soc*, 1937, 41: 238–244
- 15 Zhang Y H, Deng G T, Kou K I. On the lower bound for a class of harmonic functions in the half space. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2012, 32: 1487–1494
- 16 Zhang Y H, Kou K I, Deng G T. Integral representation and asymptotic behavior of harmonic functions in half space. *J Differential Equation*, 2014, 257: 2753–2764
- 17 Hörmander L. *Notions of Convexity*. Boston: Birkhäuser, 1994
- 18 Zhang Y H, Deng G T. Growth properties for a class of subharmonic functions in half space (in Chinese). *Acta Math Sinica Chin Ser*, 2008, 51: 319–326
- 19 Deny J, Lelong P. Sur une gènèralisation de l'indicatrice de Phragmén-Lindelöf. *C R Acad Sci Paris*, 1947, 224: 1046–1048
- 20 Yoshida H. A boundedness criterion for subharmonic functions. *J Lond Math Soc (2)*, 1981, 24: 148–160
- 21 Wolf F. An extension of the Phragmén-Lindelöf theorem. *J Lond Math Soc (2)*, 1939, 14: 208–216

Phragmén-Lindelöf theorems of subharmonic functions and their applications in the Half space

ZHANG YanHui

Abstract In this paper, the Phragmén-Lindelöf theorems of subharmonic functions in the half space are proved, by use of the Carleman's formula of harmonic functions and the methods of Levi. An explicit expression of weighted mean $m(r)$ for subharmonic functions is also presented. As an application, functions of class C are introduced in the half space and a sufficient and necessary condition of a subharmonic that belongs to the class C is derived, which generalizes some classic results of Ahlfors and Levi.

Keywords Phragmén-Lindelöf theorem, Carleman's formula of harmonic functions, harmonic majorant, functions of C class

MSC(2010) 31B05, 35B50, 49J25

doi: 10.1360/N012014-00198