中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 7 期: 975～1024
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综 述

无界区域问题的谱和拟谱方法

献给林群教授 80 华诞

郭本瑜[①②③]

① 上海师范大学数理学院, 上海 200234;
② 上海高校科学计算重点实验室, 上海 200234;
③ 上海高校计算科学 E- 研究院, 上海 200234
E-mail: byguo@shnu.edu.cn

收稿日期: 2014-08-22; 接受日期: 2015-04-20
国家自然科学基金 (批准号: 11171227)、教育部博士点基金 (批准号: 20123127110001)、上海高校 E- 研究院基金 (批准号: E03004) 和上海市教育委员会重点学科建设 (批准号: J50101) 资助项目

摘要 本文综述无界区域问题和外部问题谱及拟谱方法的研究成果和最新发展趋势. 第一类数值方法基于应用 Hermite 多项式和函数及 Laguerre 多项式和函数的正交逼近和插值理论. 第二类数值方法基于经过适当变量变换的 Jacobi 正交逼近和插值理论. 第三类数值方法是上述正交逼近和插值方法与区域分解等其他方法的各种组合. 本文还总结了 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 无理正交逼近和插值理论的主要结果, 它们是有关数值方法的理论基础.

关键词 谱和拟谱方法 无界区域上的微分方程 外部问题
MSC (2010) 主题分类 65M70, 41A10, 41M05

1 引言

许多实际问题是定义在无界区域上的. 已有许多数值方法计算此类问题, 最简单的一种方法是通过人工边界条件将需要计算的问题限制在一个有界子区域上. 对于某些问题, 我们可以推导出人工边界上的精确边界条件, 但对非线性问题和复杂区域问题则难以推导出精确的人工边界条件. 因此, 直接逼近这类问题就显得很有意义.

谱和拟谱方法的最大优点是它们的高精度, 参见文献 [1–16], 以及最近的综述文献 [17].

在过去十五年中, 无界区域问题和外部问题的谱和拟谱方法研究发展非常迅速, 可参见综述文献 [17–19] 及其参考文献. 第一类数值方法基于采用 Hermite 多项式和函数及 Laguerre 多项式和函数的正交逼近与插值理论. 第二类数值方法基于 Jacobi 正交逼近和插值理论. 我们可以通过变量变换将定义在无界区域上的问题变换成有界区域上的问题, 然后应用 Jacobi 谱和拟谱方法. 我们也可以采用各类由 Jacobi 多项式和函数诱导的无理正交逼近和插值方法. 第三类数值方法是上述正交逼近和插值方法与区域分解等其他方法的各种组合, 它们是处理非典型问题、复杂区域问题和外部问题等的最恰当方法.

英文引用格式: Guo B Y. Spectral and pseudospectral methods for unbounded domains (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 975–1024, doi: 10.1360/N012014-00149

在本文中, 我们综述计算无界区域问题和外部问题的谱和拟谱方法的研究成果和最新发展趋势, 我们也总结了 Hermite、Laguerre 和 Jacobi 无理正交逼近和插值理论的主要结果, 它们是有关数值方法的理论基础.

本文的纲要如下. 第 2 节介绍 Hermite 谱和拟谱方法: 包括应用 Hermite 多项式的谱和拟谱方法, 应用 Hermite 函数的谱和拟谱方法, 带增长型权函数的谱和拟谱方法, 拟合无穷远处渐近性态的谱和拟谱方法; 第 3 节介绍 Laguerre 谱和拟谱方法: 包括应用 Laguerre 多项式的谱和拟谱方法, 应用 Laguerre 函数的谱和拟谱方法, 应用带任意参数的 Laguerre 逼近的谱和拟谱方法, 拟合渐近性态的谱和拟谱方法; 第 4 节介绍区域分解的 Laguerre 谱和拟谱方法: 包括 Laguerre-Legendre 组合谱和拟谱方法, 非典型微分方程的谱和拟谱方法, 外部问题的谱和拟谱方法; 第 5 节介绍无界区域问题的 Jacobi 谱和拟谱方法: 包括应用 Jacobi 逼近的谱和拟谱方法, Legendre 和 Chebyshev 无理谱和拟谱方法, Jacobi 无理谱方法.

2 Hermite 谱和拟谱方法

本节考虑全直线 $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ 上的 Hermite 谱和拟谱方法. 它们的数学基础是 Hermite 正交逼近和插值理论.

2.1 应用 Hermite 多项式的谱和拟谱方法

记权函数为 $\chi(x)$, $H_\chi^r(\mathbb{R})$ 表示加权的 Sobolev 空间, 其范数为 $\|v\|_{r,\chi,\mathbb{R}}$. 加权空间 $L_\chi^2(\mathbb{R})$ 的内积和范数分别记为 $(u,v)_{\chi,\mathbb{R}}$ 和 $\|v\|_{\chi,\mathbb{R}}$. 若权函数 $\chi(x)\equiv 1$, 则省略下标 χ.

令权函数 $\omega(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$. 在标准的 Hermite 谱和拟谱方法中, 我们选取 Hermite 多项式 $H_l(x)$, $l\geqslant 0$ 作为基函数, 它们构成了一个 $L_\omega^2(\mathbb{R})$ 中的完备正交系.

N 表示任意的非负整数. $\mathcal{P}_N(\mathbb{R})$ 表示所有次数不超过 N 的代数多项式的集合. 空间 $L_\omega^2(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $P_{N,\mathbb{R}}:L_\omega^2(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_N(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(P_{N,\mathbb{R}}v-v,\phi)_{\omega,\mathbb{R}}=0,\quad \forall\,\phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}).$$

本文用 c 表示一个与整数 N 和任何函数无关的正常数. 我们稍微修正 Guo [20] 的早期结果得到: 对任意的 $v\in H_\omega^r(\mathbb{R})$ 和整数 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 有

$$\|\partial_x^k(P_{N,\mathbb{R}}v-v)\|_{\omega,\mathbb{R}}\leqslant cN^{\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega,\mathbb{R}}.$$

函数 v 在 $H_\omega^m(\mathbb{R})$ 中的正交投影恰好与 $P_{N,\mathbb{R}}v$ 一致.

在实际计算中, Hermite 拟谱方法更实用, 它仅需要计算未知函数在 Hermite 插值点上的值, 且易于处理非线性问题.

用 $\xi_{N,j}$, $0\leqslant j\leqslant N$ 表示 $H_{N+1}(x)$ 的零点, 对应的 Christoffel 数为 $w_{N,j}$, $0\leqslant j\leqslant N$. 对任意函数 $v\in C(\mathbb{R})$, 它的 Hermite-Gauss 插值 $I_{N,\mathbb{R}}v\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$I_{N,\mathbb{R}}v(\xi_{N,j})=v(\xi_{N,j}),\quad 0\leqslant j\leqslant N.$$

Guo 和 Xu [21] 证明了, 若 $v\in H_\omega^r(\mathbb{R})$, 且整数 $r\geqslant 1$, $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k(I_{N,\mathbb{R}}v-v)\|_{\omega,\mathbb{R}}\leqslant cN^{\frac{1}{3}+\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega,\mathbb{R}}.$$

我们举例说明 Hermite 谱方法. 设常数 $\mu > 0$, 并考虑如下 Burgers 方程:

$$\begin{cases} \partial_s V + V\partial_y(V) - \mu\partial_y^2 V = g, & -\infty < y < \infty, \quad 0 < s \leqslant T, \\ V(y,0) = V_0(y), & -\infty < y < \infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

V 在无穷远处满足某些条件.

我们可以直接逼近方程 (2.1), 但是这个问题在带权函数 $\omega(x)$ 的 Sobolev 空间中不适定, 而在实际计算中则必须有此权函数. 为了弥补这个缺陷, 我们引入下列相似变换:

$$x = \frac{y}{2\sqrt{\mu(1+s)}}, \quad t = \ln(1+s)$$

和

$$U(x,t) = \mathrm{e}^{x^2} V(2\sqrt{\mu}x\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}, \mathrm{e}^t - 1), \quad f(x,t) = \mathrm{e}^{x^2+t} g(2\sqrt{\mu}x\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}, \mathrm{e}^t - 1). \tag{2.2}$$

于是, 方程 (2.1) 变换成

$$\begin{cases} \partial_t U + \dfrac{1}{2}U + \dfrac{1}{2}x\partial_x U + \dfrac{1}{4\sqrt{\mu}}\mathrm{e}^{x^2+\frac{t}{2}}\partial_x(\mathrm{e}^{-2x^2}U^2) - \dfrac{1}{4}\partial_x^2 U = f, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant \ln(1+T), \\ U(x,0) = \mathrm{e}^{x^2} V_0(2\sqrt{\mu}x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.3}$$

计算问题 (2.3) 的 Hermite 谱格式是寻找数值解 $u_N(t) \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R})$, $0 \leqslant t \leqslant \ln(1+T)$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t u_N(t), \phi)_{\omega,\mathbb{R}} + \dfrac{1}{2}(u_N(t), \phi)_{\omega,\mathbb{R}} - \dfrac{1}{4\sqrt{\mu}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}(\mathrm{e}^{-x^2}u_N^2(t), \partial_x\phi)_{\omega,\mathbb{R}} + \dfrac{1}{4}(\partial_x u_N(t), \partial_x\phi)_{\omega,\mathbb{R}} \\ \quad = (f(t), \phi)_{\omega,\mathbb{R}}, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}), \quad 0 < t \leqslant \ln(1+T), \\ u_N(0) = P_{N,\mathbb{R}} U_0. \end{cases}$$

计算问题 (2.3) 的 Hermite 拟谱格式是寻找数值解 $u_N \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R})$, $0 \leqslant t \leqslant \ln(1+T)$, 使得

$$\begin{cases} \partial_t u_N + \dfrac{1}{2}u_N + \dfrac{1}{2}x\partial_x u_N + \dfrac{1}{4\sqrt{\mu}}\mathrm{e}^{x^2+\frac{t}{2}}\partial_x(\mathrm{e}^{-2x^2}u_N^2) - \dfrac{1}{4}\partial_x^2 u_N = f, \\ \qquad x = \xi_{N,j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad 0 < t \leqslant \ln(1+T), \\ u_N(x,0) = I_{N,\mathbb{R}} U_0(x). \end{cases}$$

Xu 和 Guo [22] 还发展了多维空间中的 Hermite 谱和拟谱方法, 并应用于生态方程的数值计算.

令参数 $\beta > 0$, 并引入带比例因子的 Hermite 多项式 $H_l^\beta(x) = H_l(\beta x)$, $l \geqslant 0$, 它们构成了一个以 $\omega_\beta(x) = \mathrm{e}^{-\beta^2 x^2}$ 为权函数的正交系. 相应地, 我们定义从 $L^2_{\omega_\beta}(\mathbb{R})$ 到 $\mathcal{P}_N(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $P_{N,\beta,\mathbb{R}}$. 若 $v \in H^r_{\omega_\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k(P_{N,\beta,\mathbb{R}}v - v)\|_{\omega_\beta,\mathbb{R}} \leqslant c(\beta^2 N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_\beta,\mathbb{R}}.$$

函数 v 在 $H^m_{\omega_\beta}(\mathbb{R})$ 中的正交投影与 $P_{N,\beta,\mathbb{R}}v$ 一致.

我们记插值点 $\xi_{N,j}^\beta = \frac{1}{\beta}\xi_{N,j}$ 和权 $w_{N,j}^\beta = \frac{1}{\beta}w_{N,j}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. 我们按常规方式定义 Hermite-Gauss 插值 $I_{N,\beta,\mathbb{R}}v \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R})$. 若 $v \in H^r_{\omega_\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $r \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k(I_{N,\beta,\mathbb{R}}v - v)\|_{\omega_\beta,\mathbb{R}} \leqslant c(\beta^2 N)^{\frac{1}{3}+\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_\beta,\mathbb{R}}.$$

在实际计算中, 可以调节参数 β 使得数值解更好地拟合真解. 然而, 如何选择最佳参数 β 仍然是一个没有解决的问题. 粗略地讲, 应该根据问题的具体定解条件选择恰当的参数 β, 而这些定解条件则决定了真解在无穷远处的渐近性态. 数值实验表明, 若当 $|x| \to \infty$ 时, 真解较快地趋向于零, 则宜选择较大的参数 β.

2.2 应用 Hermite 函数的谱和拟谱方法

标准的 Hermite 谱方法已经应用于许多问题, 但它不是计算某些问题的最合适方法. 例如, 非线性波动方程通常具有在理论分析和实际计算中扮演重要角色的守恒律, 而权函数 $\omega(x)$ 可能会破坏此类性质. 一些学者将 $L^2(\mathbb{R})$ 中正交的 Hermite 函数作为基函数, 使得对应的数值格式带有与原问题弱形式所具有的同样权函数. 因此, 数值解保持了真解所满足的一些守恒律. 这个特点也简化了实际计算和数值分析.

带比例因子的 Hermite 函数如下:

$$\tilde{H}_l^\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} H_l^\beta(x), \quad l \geqslant 0.$$

它们构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 中的完备正交系. 令 $\mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}) = \mathrm{span}\{\tilde{H}_l^\beta(x), 0 \leqslant l \leqslant N\}$. 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}} v - v, \phi)_{\mathbb{R}} = 0, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}).$$

对整数 $r \geqslant 0$, 引入空间 $H_{A,\beta}^r(\mathbb{R}) = \{v \mid \|v\|_{H_{A,\beta}^r(\mathbb{R})} < \infty\}$, 其范数为

$$\|v\|_{H_{A,\beta}^r(\mathbb{R})} = \left(\sum_{k=0}^{r} \|(\beta^4 x^2 + \beta^2)^{\frac{r-k}{2}} \partial_x^k u\|_{\mathbb{R}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $v \in H^k(\mathbb{R}) \cap H_{A,\beta}^r(\mathbb{R})$, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k (\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}} v - v)\|_{\mathbb{R}} \leqslant c(\beta^2 N)^{\frac{k-r}{2}} \|v\|_{H_{A,\beta}^r(\mathbb{R})}.$$

在谱方法的数值分析中, 我们需要其他投影. 为此, 定义正交投影 $\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}^1 v : H_{A,\beta}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{Q}_N^\beta(\mathbb{R})$ 如下:

$$(\partial_x(\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}^1 v - v, \partial_x \phi)_{\mathbb{R}} + \beta^4 (\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}^1 v - v, x^2 \phi)_{\mathbb{R}} = 0, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}).$$

若 $v \in H_{A,\beta}^k(\mathbb{R}) \cap H_{A,\beta}^r(\mathbb{R})$, 且整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}} v - v\|_{H_{A,\beta}^k(\mathbb{R})} \leqslant c(\beta^2 N)^{\frac{k-r}{2}} \|v\|_{H_{A,\beta}^r(\mathbb{R})}, \quad k = 0, 1.$$

Guo 等人 [23] 首次得到 $\beta = 1$ 的上述结论, 并应用于 Dirac 方程的数值解. Xiang 和 Wang [24] 得到 $\beta > 0$ 的结果, 并应用于描述生物种群发展和消失的广义 Ginzburg-Landau 方程. Xiang 和 Wang [25] 还把上述结果推广到了多维情形. Tang [26] 应用 $\beta = 1$ 的上述逼近方法数值模拟 Gaussian 型函数. Boyd [27] 则较早地考虑了应用标准 Hermite 函数展开的收敛性.

下面选取如下插值点和权:

$$\tilde{\xi}_{N,j}^\beta = \xi_{N,j}^\beta, \quad \tilde{w}_{N,j}^\beta = \mathrm{e}^{\beta^2 \tilde{\xi}_{N,j}^2} w_{N,j}^\beta, \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

对任意的 $v \in C(\mathbb{R})$, 对应的插值 $\tilde{I}_{N,\beta,\mathbb{R}}v \in \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$\tilde{I}_{N,\beta,\mathbb{R}}v(\tilde{\xi}^{\beta}_{N,j}) = v(\tilde{\xi}^{\beta}_{N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

Zhang 和 Guo [28] 证明了, 若 $v \in H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $r \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\tilde{I}_{N,\beta,\mathbb{R}}v - v\|_{k,\mathbb{R}} \leqslant c(\beta^k+1)(\beta^2 N)^{\frac{1}{3}+\frac{k-r}{2}}\|v\|_{H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})}.$$

Guo 等人 [23] 首先证明了 $\beta = 1$ 的上述结果.

作为应用例子, 设 m 和 λ 是某些常数, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} g_1(\psi_1(x,t),\psi_2(x,t)) &= \mathrm{i}(|\psi_2(x,t)|^2 - |\psi_1(x,t)|^2)\psi_1(x,t), \\ g_2(\psi_1(x,t),\psi_2(x,t)) &= \mathrm{i}(|\psi_1(x,t)|^2 - |\psi_2(x,t)|^2)\psi_2(x,t). \end{aligned}$$

我们考虑 Dirac 方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t\psi_1 + \partial_x\psi_2 + \mathrm{i}m\psi_1 + 2\lambda g_1(\psi_1,\psi_2) = f_1, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \partial_t\psi_2 + \partial_x\psi_1 - \mathrm{i}m\psi_2 + 2\lambda g_2(\psi_1,\psi_2) = f_2, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \psi_1 \to 0, \quad \psi_2 \to 0, & \text{当 } |x| \to \infty, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \psi_1(x,0) = \psi_{1,0}(x), \quad \psi_2(x,0) = \psi_{2,0}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

计算问题 (2.4) 的 Hermite 谱格式是寻找数值解 $\psi_{1,N}(t), \psi_{2,N}(t) \in \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t\psi_{1,N}(t) + \partial_x\psi_{2,N}(t) + \mathrm{i}m\psi_{1,N}(t) + 2\lambda g_1(\psi_{1,N}(t),\psi_{2,N}(t)),\phi)_{\mathbb{R}} \\ \quad = (f_1(t),\phi)_{\mathbb{R}}, \quad \forall\,\phi \in \mathcal{Q}^{\beta}_N(\mathbb{R}), \quad 0 < t \leqslant T, \\ (\partial_t\psi_{2,N}(t) + \partial_x\psi_{1,N}(t) - \mathrm{i}m\psi_{2,N}(t) + 2\lambda g_2(\psi_{1,N}(t),\psi_{2,N}(t)),\phi)_{\mathbb{R}} \\ \quad = (f_2(t),\phi)_{\mathbb{R}}, \quad \forall\,\phi \in \mathcal{Q}^{\beta}_N(\mathbb{R}), \quad 0 < t \leqslant T, \\ \psi_{1,N}(0) = \tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}\psi_{1,0}, \quad \psi_{2,N}(0) = \tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}\psi_{2,0}. \end{cases}$$

计算问题 (2.4) 的 Hermite 拟谱格式是寻找数值解 $\psi_{1,N}(t), \psi_{2,N}(t) \in \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} \partial_t\psi_1 + \partial_x\psi_2 + \mathrm{i}m\psi_1 + 2\lambda g_1(\psi_1,\psi_2) = f_1, \quad x = \tilde{\xi}^{\beta}_{N,j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \partial_t\psi_2 + \partial_x\psi_1 - \mathrm{i}m\psi_2 + 2\lambda g_2(\psi_1,\psi_2) = f_2, \quad x = \tilde{\xi}^{\beta}_{N,j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \psi_{1,N}(0) = \tilde{I}_{N,\beta,\mathbb{R}}\psi_{1,0}, \quad \psi_{2,N}(0) = \tilde{I}_{N,\beta,\mathbb{R}}\psi_{2,0}. \end{cases}$$

应用 Hermite 函数的谱方法特别适用于计算 Schrödinger 型方程. 文献 [29–31] 构造了数值模拟 Bose-Einstein 凝聚的 Hermite-Laguerre 拟谱方法和 Hermite-Laguerre-Fourier 拟谱方法. 文献 [32,33] 则研究了数值求解 Schrödinger 方程等的谱微分变换矩阵.

2.3 带增长型权函数的谱和拟谱方法

在许多实际问题中, 如无限带状区域上的热传导和统计物理中的一些问题, 它们的解在无穷远处呈现指数型衰减. 此时宜选取无穷远处指数型衰减的基函数和在无穷远处趋向无穷的权函数.

令权函数 $\bar{\omega}_\beta(x)=\mathrm{e}^{\beta^2x^2}$. 带比例因子的基函数如下:

$$\bar{H}_l^\beta(x)=\frac{1}{\sqrt{2^l l!}}\mathrm{e}^{-\beta^2x^2}H_l^\beta(x),\quad l\geqslant 0.$$

它们构成了 $L^2_{\bar{\omega}_\beta}(\mathbb{R})$ 中的完备正交系. 令 $\bar{\mathcal{Q}}_{N,\beta}(\mathbb{R})=\mathrm{span}\{\bar{H}_l^\beta(x),0\leqslant l\leqslant N\}$. 空间 $L^2_{\bar{\omega}_\beta}(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $\bar{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}:L^2_{\bar{\omega}_\beta}(\mathbb{R})\to\bar{\mathcal{Q}}_{N,\beta}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(\bar{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}v-v,\phi)_{\bar{\omega}_\beta,\mathbb{R}}=0,\quad \forall\,\phi\in\bar{\mathcal{Q}}_{N,\beta}(\mathbb{R}).$$

若 $v\in H^k(\mathbb{R})\cap H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$\|\bar{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}v-v\|_{k,\bar{\omega}_\beta,\mathbb{R}}\leqslant c(\beta^2N)^{\frac{k-r}{2}}\|v\|_{r,\bar{\omega}_\beta,(\mathbb{R})}.$$

函数 v 在空间 $H^m_{\bar{\omega}_\beta}(\mathbb{R})$ 中的正交投影与 $\bar{P}_{N,\beta,\mathbb{R}}v$ 是一致的.

下面选取如下插值点和权:

$$\bar{\xi}^\beta_{N,j}=\xi^\beta_{N,j},\quad \bar{w}^\beta_{N,j}=\mathrm{e}^{2\beta^2(\bar{\xi}^\beta_{N,j})^2}w^\beta_{N,j},\quad 0\leqslant j\leqslant N.$$

对任意的 $v\in C(\mathbb{R})$, 对应的插值 $\bar{I}_{N,\beta,\mathbb{R}}v\in\bar{\mathcal{Q}}_{N,\beta}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$\bar{I}_{N,\beta,\mathbb{R}}v(\bar{\xi}^\beta_{N,j})=v(\bar{\xi}^\beta_{N,j}),\quad 0\leqslant j\leqslant N.$$

若 $v\in H^r_{\bar{\omega}_\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $r\geqslant 1$, $0\leqslant k\leqslant r$, 则

$$\|\bar{I}_{N,\mathbb{R}}v-v\|_{H^k_{\bar{\omega}_\beta}(\mathbb{R})}\leqslant c(\beta^2N)^{\frac{1}{6}+\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{H^r_{\bar{\omega}_\beta}(\mathbb{R})}.$$

Funaro 和 Kavian [34] 首先考虑了 $\beta=\frac{1}{2}$ 的上述正交逼近, 并应用于抛物型方程的数值解. Fox 等人[35] 证明了 $\beta>0$ 的上述结果, 并提出了计算二维 Fokker-Planck 方程的 Hermite 谱 - 有限差分混合方法. Guo 和 Wang [36] 建立了 $\beta=1$ 的上述逼近结果, 并构造了计算无限带状区域上热传导问题的 Hermite-Legendre 混合谱方法. Wang 和 Guo [37] 首先估计了 $\beta=1$ 上述插值误差, 其收敛阶为 $N^{\frac{1}{3}+\frac{k-r}{2}}$. Aguirre 和 Rivas [38] 改进为 $N^{\frac{1}{6}+\frac{k-r}{2}}$ 阶. Tang 等人[39] 则构造了描述湍流中微粒弥散运动方程的谱方法.

文献 [40,41] 提出了一类采用时间依赖基函数的 Hermite 谱方法. 例如, 我们考虑如下问题:

$$\begin{cases}\partial_tU+\partial_xF(U)-\mu\partial_x^2U=f, & x\in\mathbb{R},\quad 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}\tag{2.5}$$

设 δ 和 δ_0 为某些正常数, $\beta(t)=\frac{1}{4\mu\delta_0(\delta t+1)}$, $V_N(t)=\{\mathrm{e}^{-\beta(t)x^2}\phi\mid\phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R})\}$. 计算问题 (2.5) 的谱方法是寻找数值解 $u_N(t)\in V_N(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_tu_N(t),\phi)_{\mathbb{R}}+(\partial_xF(u_N(t)),\phi)_{\mathbb{R}}+\mu(\partial_xu_N(t),\partial_x\phi)_{\mathbb{R}}=(f(t),\phi)_{\mathbb{R}}, & \forall\,\phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}),\quad 0<t\leqslant T,\\ (u_N(0),\phi)_{\mathbb{R}}=(U_0,\phi)_{\mathbb{R}}, & \forall\,\phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}).\end{cases}\tag{2.6}$$

这种方法具有类似于相似变换 (2.2) 的优点, 即保留了正定双线性形式, 因此, 格式 (2.6) 具有很好的稳定性和最优误差估计. 此外, 可以在简单的经典框架中方便地推导出格式 (2.6), 而不附加由变换 (2.2) 引导出来的额外项. 如果真解并非 e^{-x^2} 型衰减, 我们就令 $\beta(t)=\frac{1}{4\nu\delta_0(\delta(T-t)+1)}$.

2.4 拟合无穷远处渐近性态的谱和拟谱方法

在实际问题中, 当 $|x|$ 很大时, 真解可能具有类似 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}\alpha}$ 的渐近性态, 其中 α 是一个实数. 此时宜在正交逼近和插值中采用类似于 $(1+x^2)^{-\gamma}$, $\gamma>\alpha+\frac{1}{2}$ 的权函数.

Zhang 和 Guo [28] 引入了新的广义 Hermite 函数

$$\hat{H}_l^{\beta,\gamma}(x)=(1+x^2)^{\frac{\gamma}{2}}\tilde{H}_l^{\beta}(x),\quad \beta>0,\quad l\geqslant 0.$$

令权函数 $\hat{\omega}_\gamma(x)=(1+x^2)^{-\gamma}$. 上述广义 Hermite 函数的全体构成了一个 $L^2_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})$ 中的完备正交系. 记 $\hat{\mathcal{Q}}_{N,\beta,\gamma}(\mathbb{R})=\mathrm{span}\{\hat{H}_l^{\beta,\gamma}(x),0\leqslant l\leqslant N\}$. 空间 $L^2_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $\hat{P}_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}:L^2_{\hat{\omega}_\gamma}(\Lambda)\to\hat{\mathcal{Q}}_{N,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(\hat{P}_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v-v,\phi)_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}=0,\quad \forall\,\phi\in\hat{\mathcal{Q}}_{N,\beta,\gamma}(\mathbb{R}).$$

若 $v\in H^r_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})$, 且整数 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$\|\hat{P}_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v-v\|_{k,\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}\leqslant c(\beta^2N)^{\frac{k-r}{2}}\|(1+x^2)^{-\frac{\gamma}{2}}v\|_{H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})}.$$

空间 $H^1_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $\hat{P}^1_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}:H^1_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})\to\hat{\mathcal{Q}}_{N,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(\partial_x(\hat{P}^1_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v-v),\partial_x\phi)_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}+(\hat{P}^1_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v-v,\phi)_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}=0,\quad \forall\,\phi\in\hat{\mathcal{Q}}_{N,\beta,\gamma}(\mathbb{R}).$$

若 $v\in H^1_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R}),(1+x^2)^{-\frac{\gamma}{2}}v\in H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $1\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$\|\hat{P}^1_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v-v\|_{1,\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}\leqslant c(\beta^2N)^{\frac{1-r}{2}}\|(1+x^2)^{-\frac{\gamma}{2}}v\|_{H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})}.$$

下面考虑插值. 令

$$\hat{\xi}^\beta_{N,j}=\tilde{\xi}^\beta_{N,j},\quad \hat{w}^{\beta,\gamma}_{N,j}=(1+(\hat{\xi}^\beta_{N,j})^2)^{-\gamma}\tilde{w}^\beta_{N,j},\quad 0\leqslant j\leqslant N.$$

对任意的 $v\in C(\mathbb{R})$, 新的插值 $\hat{I}_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v\in\hat{\mathcal{Q}}_{N,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$\hat{I}_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v(\hat{\xi}^\beta_{N,j})=v(\hat{\xi}^\beta_{N,j}),\quad 0\leqslant j\leqslant N.$$

若 $v\in H^k_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})$, $(1+x^2)^{-\frac{\gamma}{2}}v\in H^r_{A,\beta}(\mathcal{R})$, 且整数 $r\geqslant 1$, $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$\|\hat{I}_{N,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v-v\|_{k,\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}\leqslant c(\beta^k+1)(\beta^2N)^{\frac{1}{3}+\frac{k-r}{2}}\|(1+x^2)^{-\frac{\gamma}{2}}v\|_{H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})}.$$

作为一个应用例子, 设 λ 是正常数, $f\in L^2_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})$, $\gamma>\alpha+\frac{1}{2}$, 并考虑如下问题:

$$\begin{cases}-\partial_x^2U(x)+\lambda U(x)=f(x), & x\in\mathbb{R},\\ U(x)|x|^{-\alpha}\to 0, & \text{当 } |x|\to\infty.\end{cases}\tag{2.7}$$

令 $V(\mathbb{R})=H^1_{\hat{\omega}_\gamma}(\mathbb{R})$. 我们引入双线性形式

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\mathbb{R}}(u,v)=&\int_{\mathbb{R}}\partial_xu(x)\partial_xv(x)(1+x^2)^{-\gamma}dx-2\gamma\int_{\mathbb{R}}\partial_xu(x)v(x)x(1+x^2)^{-\gamma-1}dx\\&+\lambda\int_{\mathbb{R}}u(x)v(x)(1+x^2)^{-\gamma}dx,\quad \forall\,u,v\in V(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

为简便计, 记

$$c_\gamma = \begin{cases} -\gamma, & \text{当 } -1 \leqslant \gamma \leqslant 0, \\ \gamma(2\gamma+1), & \text{否则}. \end{cases}$$

于是, 对任意的 $u, v \in V(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} &|\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\mathbb{R}}(u,v)| \leqslant \left(\frac{1}{2}+|\gamma|\right)\|\partial_x u\|^2_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\|\partial_x v\|^2_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}} + \left(\frac{\lambda}{2}+|\gamma|\right)\|v\|^2_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}, \\ &\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\mathbb{R}}(v,v) \geqslant \|\partial_x v\|^2_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}} + (\lambda - c_\gamma)\|v\|^2_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

当 $\lambda > c_\gamma$ 时, 问题 (2.7) 的弱形式是寻找解 $U \in V(\mathbb{R})$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\mathbb{R}}(U,\phi) = (f,\phi)_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}, \quad \forall\, \phi \in V(\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

令 $V_N(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R}) \cap \hat{\mathcal{Q}}_{N,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$. 计算 $\lambda > c_\gamma$ 的问题 (2.8) 的谱格式是寻找数值解 $u_N \in V_N(\mathbb{R})$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\mathbb{R}}(u_N,\phi) = (f,\phi)_{\hat{\omega}_\gamma,\mathbb{R}}, \quad \forall\, \phi \in V_N(\mathbb{R}).$$

若 $\lambda \leqslant c_\gamma$, 则可采用变量变换 $y = \theta x$, $\theta > 0$, 以及 $V(y) = U(\frac{y}{\theta})$, $F(y) = f(\frac{y}{\theta})$. 于是, 问题 (2.7) 变换成

$$\begin{cases} -\partial_y^2 V(y) + \dfrac{\lambda}{\theta^2}V(y) = \dfrac{1}{\theta^2}F(y), & y \in \mathbb{R}, \\ V(y)\theta^\alpha |x|^{-\alpha} \to 0, & \text{当 } |y| \to \infty. \end{cases}$$

若 θ 足够小, 则满足 $\frac{\lambda}{\theta^2} > c_\gamma$.

上述方法应用于 sine-Gordon 方程的数值解, 也可以应用它计算 Harry-Dym 方程和无限管状区域上不可压缩流体等问题.

对所逼近的函数, 当 $x \to -\infty$ 时的渐近行为可能与当 $x \to \infty$ 时的渐近行为不一样. 最近, Guo 和 Zhang [42] 提出了另外一类广义 Hermite 谱方法, 它拟合 $x \to \pm\infty$ 时的不同渐近行为. 为此, 对任意的实数 α 和 γ, 令

$$F_{\alpha,\gamma}(x) = \left(1 + \frac{2}{\pi}\arctan x\right)^\alpha \left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan x\right)^\gamma.$$

新的广义 Hermite 函数如下:

$$\hat{H}_l^{\alpha,\beta,\gamma}(x) = F_{\alpha,\gamma}(x) H_l^\beta(x), \quad \beta > 0, \quad l \geqslant 0.$$

可以验证

$$\hat{H}_l^{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} o((1+|x|)^{-\gamma-\frac{1}{2}}), & \text{当 } x \to +\infty, \\ o((1+|x|)^{-\alpha-\frac{1}{2}}), & \text{当 } x \to -\infty. \end{cases}$$

令权函数 $\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}(x) = F_{\alpha,\gamma}^{-2}(x)$. 我们有

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{\alpha,\gamma}(x) &= \mathcal{O}((1+|x|)^{2\gamma}), \quad \text{当 } x \to +\infty, \\ \hat{\omega}_{\alpha,\gamma}(x) &= \mathcal{O}((1+|x|)^{2\alpha}), \quad \text{当 } x \to -\infty. \end{aligned}$$

所有函数 $\hat{H}_l^{\alpha,\beta,\gamma}(x)$ 构成了一个 $L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R})$ 中的完备正交系. 令

$$\hat{\mathcal{Q}}_{N,\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{R}) = \operatorname{span}\{\hat{H}_l^{\alpha,\beta,\gamma}(x), 0 \leqslant l \leqslant N\}.$$

空间 $L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}: L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R}) \to \hat{\mathcal{Q}}_{N,\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v - v, \phi)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} = 0, \quad \forall \phi \in \hat{\mathcal{Q}}_{N,\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{R}).$$

若 $v \in H^k_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R}), F^{-1}_{\alpha,\gamma}v \in H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v - v\|_{k,\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} \leqslant c(\beta^2 N)^{\frac{k-r}{2}} \|F^{-1}_{\alpha,\gamma}v\|_{H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})}.$$

空间 $H^1_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $\hat{P}^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}: H^1_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R}) \to \hat{\mathcal{Q}}_{N,\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(\partial_x(\hat{P}^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v - v), \partial_x\phi)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} + (\hat{P}^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v - v, \phi)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} = 0, \quad \forall \phi \in \hat{\mathcal{Q}}_{N,\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{R}).$$

若 $v \in H^1_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R}), F^{-1}_{\alpha,\gamma}v \in H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\hat{P}^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v - v\|_{1,\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} \leqslant c(\beta^2 N)^{\frac{1-r}{2}} \|F^{-1}_{\alpha,\gamma}v\|_{H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})}.$$

下面讨论插值. 令

$$\hat{\xi}^{\beta}_{N,j} = \tilde{\xi}^{\beta}_{N,j}, \quad \hat{w}^{\alpha,\beta,\gamma}_{N,j} = F^{-2}_{\alpha,\gamma}(\hat{\xi}^{\beta}_{N,j})\tilde{w}^{\beta}_{N,j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

对任意的 $v \in C(\Lambda)$, 插值 $\hat{I}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v \in \hat{\mathcal{Q}}_{N,\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$\hat{I}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v(\hat{\xi}^{\beta}_{N,j}) = v(\hat{\xi}^{\beta}_{N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

若 $v \in H^r_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R})$, $F^{-1}_{\alpha,\gamma}v \in H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})$, 且整数 $r \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\hat{I}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}v - v\|_{k,\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} \leqslant c(\beta^k + 1)(\beta^2 N)^{\frac{1}{3}+\frac{k-r}{2}} \|F^{-1}_{\alpha,\gamma}v\|_{H^r_{A,\beta}(\mathbb{R})}.$$

作为一个应用例子, 下面考虑 Fisher 方程

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_x^2 U - aU(1-U) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T, \\ U(x,0) = U_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中正常数 a 度量昆虫强度. 方程 (2.9) 的弱形式依赖于异宿轨道解 $U(x,t)$ 在无穷远处的渐近性态. 我们假设

$$U(x,t)\partial_x U(x,t)\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}(x) \to 0, \quad 当\ |x| \to \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

令 $V(\mathbb{R}) = H^1_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R})$. 方程 (2.9) 的弱形式是寻找解 $U \in L^\infty(0,T; L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}}(\mathbb{R})) \cap L^2(0,T; V(\mathbb{R}))$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t U(t) - aU(t) + aU^2(t), v)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} + (\partial_x U(t), \partial_x(v\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}))_{\mathbb{R}} \\ \quad = (f(t), v)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} \quad \forall v \in V(\mathbb{R}), \quad 0 < t \leqslant T, \\ U(x,0) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.10}$$

令 $V_N(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R}) \cap \hat{\mathcal{Q}}_{N,\alpha,\beta,\gamma}(\mathbb{R})$. 计算问题 (2.10) 的谱格式是寻找数值解 $u_N(t) \in V_N(\mathbb{R})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t u_N(t) - au_N(t) + au_N^2(t), \phi)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}} + (\partial_x u_N(t), \partial_x(\phi\hat{\omega}_{\alpha,\gamma}))_{\mathbb{R}} \\ \quad = (f(t), \phi)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma},\mathbb{R}}, \quad \forall \phi \in V_N(\mathbb{R}), \quad 0 < t \leqslant T, \\ u_N(0) = \hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}U_0 \ 或\ \hat{P}^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}}U_0. \end{cases}$$

3 Laguerre 谱和拟谱方法

本节考虑半直线区域 $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$ 上的 Laguerre 谱和拟谱方法. 它们的数学基础是 Laguerre 正交逼近和插值理论.

3.1 应用 Laguerre 多项式的谱和拟谱方法

记权函数为 $\chi(x)$, $H_\chi^r(\mathbb{R}^+)$ 表示加权的 Sobolev 空间, 其范数为 $\|v\|_{r,\chi,\mathbb{R}^+}$. 空间 $L_\chi^2(\mathbb{R}^+)$ 的内积和范数分别记为 $(u,v)_{\chi,\mathbb{R}^+}$ 和 $\|v\|_{\chi,\mathbb{R}^+}$. 当权函数 $\chi(x)\equiv 1$ 时, 就省略下标 χ.

令权函数 $\omega_{\alpha,\beta}(x)=x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x}$, 其中 $\alpha>-1$, $\beta>0$. 带比例因子的广义 Laguerre 多项式如下:

$$\mathcal{L}_l^{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{l!}x^{-\alpha}\mathrm{e}^{\beta x}\partial_x^l(x^{l+\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}),\quad l\geqslant 0.$$

它们构成 $L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系.

记至多 N 次的全体多项式集合为 $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$. 空间 $L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的正交投影 $P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}: L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)\to\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v-v,\phi)_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+}=0,\quad \forall\,\phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+).$$

Guo 和 Zhang [43] 证明了, 若 $\partial_x^r v\in L^2_{\omega_{\alpha+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k(P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v-v)\|_{\omega_{\alpha+s,\beta},\mathbb{R}^+}\leqslant c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r,\beta},\mathbb{R}^+},$$

其中 $c_{\alpha,\beta}$ 是一个与 α 和 β 有关的正常数, 具有明显表达式.

为了设计和分析微分方程的广义 Laguerre 谱方法, 我们需要各种不同类型的非一致加权 Sobolev 空间中的正交投影. 为此, 令 $\alpha,\gamma>-1$, $\beta,\delta>0$, 并引入空间

$$H^1_{\omega_{\alpha,\beta},\omega_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)=\{v\mid v\text{ 在 }\mathbb{R}^+\text{ 上可测且 }\|v\|_{H^1_{\omega_{\alpha,\beta},\omega_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)}<\infty\},$$

其范数为 $\|v\|_{H^1_{\omega_{\alpha,\beta},\omega_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)}=(\|\partial_x v\|^2_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+}+\|v\|^2_{\omega_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+})^{\frac{1}{2}}$.

正交投影 $P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}: H^1_{\omega_{\alpha,\beta},\omega_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)\to\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\partial_x(P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v),\partial_x\phi)_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+}+(P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v,\phi)_{\omega_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}=0,\quad\forall\,\phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+).$$

作为一个特殊且重要的特例, 我们假定 $-1<\gamma\leqslant\alpha\leqslant\gamma+2$, $\beta=\delta$ 或者 $\gamma>-1$, $-1<\alpha\leqslant\gamma+2$, $\beta<\delta$. 若 $v\in H^1_{\omega_{\alpha,\beta},\omega_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r v\in L^2_{\omega_{\alpha+r-1,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$\|P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v\|_{H^1_{\omega_{\alpha,\beta},\omega_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)}\leqslant c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\beta N)^{\frac{1-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r-1,\beta},\mathbb{R}^+},$$

其中 $c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ 是一个与 α,β,γ 和 δ 有关的正常数, 具有明显表达式.

有时需要考虑被逼近函数的边界条件. 为此令

$${}_0H^1_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)=\{v\in H^1_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)\mid v(0)=0\},\quad {}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)=\{\phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)\mid\phi(0)=0\}.$$

正交投影 ${}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}: {}_0H^1_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)\to{}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\partial_x({}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v-v),\partial_x\phi)_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+}=0,\quad\forall\,\phi\in{}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+).$$

若 $\partial_x v \in L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r v \in L^2_{\omega_{\alpha+r-1,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且 $v(0)=0$, 则对整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$,

$$\|\partial_x({}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v)\|_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} \leqslant c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{\frac{1-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r-1,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

若 $v \in L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且 $|\alpha|<1$, 则

$$\|{}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v\|_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} \leqslant c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{\frac{1-r}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r-1,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

用 $\xi^{\alpha,\beta}_{G,N,j}$ 和 $\xi^{\alpha,\beta}_{R,N,j}, 0 \leqslant j \leqslant N$ 分别表示 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}_{N+1}(x)$ 和 $x\mathcal{L}^{\alpha+1,\beta}_N(x)$ 的零点. 对应的 Christoffel 数分别为 $w^{\alpha,\beta}_{G,N,j}$ 和 $w^{\alpha,\beta}_{R,N,j}, 0 \leqslant j \leqslant N$. 对任意的 $v \in C(\mathbb{R}^+)$, 广义 Laguerre-Gauss 插值 $\mathcal{I}_{G,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$\mathcal{I}_{G,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v(\xi^{\alpha,\beta}_{G,N,j}) = v(\xi^{\alpha,\beta}_{G,N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

对任意的 $v \in C(\bar{\mathbb{R}}^+)$, 广义 Laguerre-Gauss-Radau 插值 $\mathcal{I}_{R,N,\alpha,\beta}v \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$\mathcal{I}_{R,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v(\xi^{\alpha,\beta}_{R,N,j}) = v(\xi^{\alpha,\beta}_{R,N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

Guo 等人[44] 证明了, 若 $\partial_x^k v \in L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且 $\partial_x^r v \in L^2_{\omega_{\alpha+r,\beta}}(\mathbb{R}^+) \cap L^2_{\omega_{\alpha+r-1,\beta}}(\mathbb{R}^+) \cap L^2_{\omega_{r+\alpha-k,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 则对整数 $r \geqslant 1$ 和 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(\mathcal{I}_{G,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v)\|_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} \leqslant{}& c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{\frac{2k-r-1}{2}}(\beta^{-1}(\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r-1,\beta},\mathbb{R}^+} + N^{-\frac{1}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r-k,\beta},\mathbb{R}^+})\\ &+ (1+\beta^{-\frac{1}{2}})(\ln N)^{\frac{1}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r,\beta},\mathbb{R}^+}).\end{aligned}$$

若 $\partial_x^k v \in L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+), \partial_x^r v \in L^2_{\omega_{\alpha+r,\beta}}(\mathbb{R}^+) \cap L^2_{\omega_{\alpha+r-1,\beta}}(\mathbb{R}^+) \cap L^2_{\omega_{\alpha+r-k,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且 $r > \alpha+1$ 或 $|\alpha|<1$, 则对整数 $r \geqslant 1$ 和 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(\mathcal{I}_{R,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v)\|_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} \leqslant{}& c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{\frac{2k-r-1}{2}}(\beta^{-1}(\beta^{-1}(\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r,\beta},\mathbb{R}^+} + N^{-\frac{1}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r-k,\beta},\mathbb{R}^+})\\ &+ (1+\beta^{-\frac{1}{2}})(\ln N)^{\frac{1}{2}}\|\partial_x^r v\|_{\omega_{\alpha+r,\beta},\mathbb{R}^+}).\end{aligned}$$

Mastroianni 和 Monegato [45] 也研究了 $\beta=1$ 的广义 Laguerre 插值, 并应用于积分方程的数值解. Mastroianni 和 Occorsio [46] 估计了上述插值误差的最大范数.

早期工作集中在经典的 Laguerre 逼近. Guo 和 Shen [47] 得到了 $\alpha=0, \beta=1$ 时的上述误差估计, 并应用于 Burgers 方程和 BBM (Benjamin-Bona-Mahony) 方程的谱方法. Funaro [8,48] 和 Maday 等人[49] 也得到了 $\alpha=0, \beta=1, k=0$ 时的上述估计. Xu 和 Guo [50] 得到了 $\alpha=0, \beta=1$ 时的插值误差估计, 并应用于非线性偏微分方程的数值解. Xu 和 Guo [51] 还研究了多维 Laguerre 正交和插值逼近, 并应用于 Fisher 方程的数值解, 其中 $\alpha=0$, 并在不同空间方向采用不同比例因子.

举个例子, 我们考虑半直线区域上并在 $x=0$ 处带齐次边界条件的 Burgers 方程. 引入如下的变量变换:

$$y = x, \quad U(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}V(x,t), \quad f(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}g(x,t). \tag{3.1}$$

于是, Burgers 方程变换成

$$\begin{cases}\partial_t U - \mu\left(\partial_x^2 U - \partial_x U + \dfrac{1}{4}U\right) + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\partial_x(\mathrm{e}^{-x}U^2) = f, & x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 < t \leqslant T,\\ U(0,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T,\\ U(x,0) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}V_0(x), & x \in \mathbb{R}^+.\end{cases} \tag{3.2}$$

计算方程 (3.2) 的标准 Laguerre 谱方法是寻找数值解 $u_N(t) \in {}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t u_N(t), \phi)_{\omega_{0,1},\mathbb{R}^+} - \dfrac{1}{4}\mu(u_N(t), \phi)_{\omega_{0,1},\mathbb{R}^+} + \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} u_N^2(t), \phi - 2\partial_x\phi)_{\omega_{0,1},\mathbb{R}^+} \\ \quad + \mu(\partial_x u_N(t), \partial_x\phi)_{\omega_{0,1},\mathbb{R}^+} = (f(t), \phi)_{\omega_{0,1},\mathbb{R}^+}, \quad \forall\, \phi \in {}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+), \quad 0 < t \leqslant T, \\ u_N(0) = P_{N,0,1,\mathbb{R}^+} U_0. \end{cases}$$

计算方程 (3.2) 的标准 Laguerre 拟谱方法是寻找数值解 $u_N(t) \in {}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} \partial_t u_N - \mu\left(\partial_x^2 u_N - \partial_x u_N + \dfrac{1}{4} u_N\right) + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\partial_x(\mathrm{e}^{-x} u_N^2) = f, \quad x = \xi_{R,N,j}^{0,1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad 0 < t \leqslant T, \\ u_N(0) = \mathcal{I}_{R,N,0,1,\mathbb{R}^+} U_0. \end{cases}$$

Wang 和 Guo [52] 提出了阶梯型 Laguerre 拟谱方法. 为计算简便计, 他们先采用适当大逼近次数的 Laguerre 插值计算所考虑的问题, 然后应用位移 Laguerre 插值逐步延拓数值解. 这种方法可看作是无穷区间上数值解的重构, 并在远离原点的节点上提供更加精确的数值结果. 文献 [53, 54] 建立了 $H^2_{\omega_{0,1}}(\mathbb{R}^+)$ 空间中的正交逼近和插值, 并应用于四阶问题的数值求解. 文献 [55, 56] 建立了 Legendre-Laguerre 混合谱和拟谱方法, 并应用于无限带状区域上不可压缩流体的流函数形式的数值模拟. 最近, 文献 [57,58] 应用 $\alpha = 0, \beta > 0$ 的 Laguerre 插值理论设计了一阶常微分方程初值问题的 Laguerre-Gauss 和 Laguerre-Radau 谱配置方法. Yan 和 Guo [59] 提供了二阶常微分方程初值问题的 Laguerre-Gauss 谱配置方法.

标准的 Laguerre 谱和拟谱方法适用于一维典型问题及定义在直角区域上的相关问题. 广义 Laguerre 谱和拟谱方法则可以应用于更多其他类型的问题.

作为一个例子, 用 ρ, λ 和 θ 分别表示半径、经度和纬度. 我们考虑如下采用球面坐标系的问题:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho^2}\partial_\rho(\rho^2\partial_\rho U) - \dfrac{1}{\rho^2\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\partial_\theta U) - \dfrac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\partial_\lambda^2 U = f, & \rho > \rho_0, \quad 0 \leqslant \lambda < 2\pi, \quad |\theta| < \dfrac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{\rho\to\infty} U(\rho, \lambda, \theta) = 0, & 0 \leqslant \lambda < 2\pi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ U(\rho, \lambda + 2\pi, \theta) = U(\rho, \lambda, \theta), & \rho > \rho_0, \quad 0 \leqslant \lambda < 2\pi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{3.3}$$

并当 $|\theta| = \frac{1}{2}\pi$ 时, $\partial_\lambda U(\rho, \lambda, \theta) = 0$. 此外, 若 $\rho_0 > 0$, 则附加边界条件 $U(\rho_0, \lambda, \theta) = g(\lambda, \theta)$, 它对应一个外部问题. 可以验证在方程 (3.3) 的弱形式中, $\partial_\rho U, \partial_\theta U$ 和 $\frac{1}{\cos\theta}\partial_\lambda U$ 的系数分别为 $\rho^2, 1$ 和 1, 即各阶导数的范数带有不同的权函数, 所以, 我们需要在相应的空间中考虑真解. 显然, 经度 λ 和纬度 θ 的变化范围是有限的, 只有半径 ρ 是从 ρ_0 增长到 ∞. 这个特点降低了数值求解问题 (3.3) 的复杂度. 进一步, 我们可以采用球面调和逼近处理经度和纬度两个方向, 并发挥球面调和的特点简化实际计算和数值分析. 剩下的问题是如何在半径方向逼近问题 (3.3). 一个最自然的选择是 $\alpha = 2$ 时的广义 Laguerre 正交逼近和插值逼近. 我们还可以通过调整比例因子 β, 使得数值解更加精确地模拟真解. 如果当 $\rho \to \rho_0$ 时真解剧烈震荡或者当 $\rho \to \infty$ 时真解快速衰减, 那么选择适当大的 β.

上述方法已经成功地应用于许多微分方程的数值解. 例如, Guo 和 Zhang [43] 应用 $\alpha = 2$ 时的上述方法数值求解三维问题. Guo 等人 [44] 分别考虑了 $\rho_0 = 0$ 和 $\rho_0 > 0$ 时问题 (3.3) 的拟谱方法, 并应用于球面对称问题的数值解.

3.2 应用 Laguerre 函数的谱和拟谱方法

20 世纪末, 一些学者在谱和拟谱方法中用 Laguerre 函数作为基函数, 其主要动机如下:

(1) 以 Laguerre 多项式为基函数的谱和拟谱方法中含有权函数 $\omega_{\alpha,\beta}(x)$, 往往使得数值解丢失真解的一些重要性质.

(2) 在 Laguerre 加权 Sobolev 空间中, 所考虑的问题经常是不适定的. 为了导出合理的弱形式和数值算法, 需要某些类似于 (3.1) 的变量变换, 而此类变换会导致多维问题数值计算和分析的复杂性.

(3) 为了拓展谱和拟谱方法的应用范围, 我们往往采用区域分解方法. 然而在匹配相邻子区域公共边界上的全局数值解时, 权函数会带来额外困难.

Guo 和 Zhang [60] 引入了带比例因子的广义 Laguerre 函数

$$\tilde{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta x}\mathcal{L}_l^{\alpha,\beta}(x), \quad l \geqslant 0,$$

它们构成了 $L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系. 令

$$\mathcal{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) = \mathrm{span}\{\tilde{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta}(x), 0 \leqslant l \leqslant N\}.$$

正交投影 $\tilde{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+} : L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\tilde{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v, \phi)_{\omega_{\alpha,0},\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+).$$

若 $v \in L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x}v) \in L^2_{\omega_{\alpha+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $0 \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\tilde{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v\|_{\omega_{\alpha,0},\mathbb{R}^+} \leqslant c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{-\frac{r}{2}}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x}v)\|_{\omega_{\alpha+r,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

在一些相关谱方法的数值分析中, 我们需要针对不同类型问题, 考虑不同类型的非一致加权空间中的正交投影. 例如, 引入空间

$$H^1_{\omega_{2,0},1}(\mathbb{R}^+) = \{v \mid v \text{ 在 } \mathbb{R}^+ \text{ 上可测且 } \|v\|_{H^1_{\omega_{2,0},1}(\mathbb{R}^+)} < \infty\},$$

其范数为

$$\|v\|_{H^1_{\omega_{2,0},1}(\mathbb{R}^+)} = (\|\partial_x v\|^2_{\omega_{2,0},\mathbb{R}^+} + \|v\|^2_{\mathbb{R}^+})^{\frac{1}{2}}.$$

设 $\eta \geqslant 0$. 正交投影 $\tilde{P}^1_{N,2,0,\beta,\mathbb{R}^+} : H^1_{\omega_{2,0},1}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{Q}_{N,2,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\partial_x(\tilde{P}^1_{N,2,0,\beta,\mathbb{R}^+}v - v), \partial_x\phi)_{\omega_{2,0},\mathbb{R}^+} + \eta(\tilde{P}^1_{N,2,0,\beta,\mathbb{R}^+}v - v, \phi)_{\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{Q}_{N,2,\beta}(\mathbb{R}^+).$$

若 $v \in H^1_{\omega_{2,0},1}(\mathbb{R}^+), \partial_x^{r-1}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x}\partial_x v) \in L^2_{\omega_{r+1,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\tilde{P}^1_{N,2,0,\beta,\mathbb{R}^+}v - v\|_{H^1_{\omega_{2,0},1}(\mathbb{R}^+)} \leqslant c_\beta(1+\eta)(\beta N)^{\frac{1-r}{2}}\|\partial_x^{r-1}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x}\partial_x v)\|_{\omega_{r+1,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

Wang 等人 [61] 研究了相应的插值逼近, 其插值点和权分别为

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{G,N,j} = \xi^{\alpha,\beta}_{G,N,j}, \quad \widetilde{w}^{\alpha,\beta}_{G,N,j} = \mathrm{e}^{\beta\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{G,N,j}}w^{\alpha,\beta}_{G,N,j},\\
&\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{R,N,j} = \xi^{\alpha,\beta}_{R,N,j}, \quad \widetilde{w}^{\alpha,\beta}_{R,N,j} = \mathrm{e}^{\beta\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{R,N,j}}w^{\alpha,\beta}_{R,N,j}.
\end{aligned}$$

对任意的 $v \in C(\mathbb{R}^+)$, 广义 Laguerre-Gauss 型插值 $\widetilde{\mathcal{I}}_{G,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v \in \mathcal{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{G,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v(\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{G,N,j}) = v(\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{G,N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

对任意的 $v \in C(\bar{\mathbb{R}}^+)$, 广义 Laguerre-Radau 型插值 $\widetilde{\mathcal{I}}_{R,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+} v \in \mathcal{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{R,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+} v(\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{R,N,j}) = v(\widetilde{\xi}^{\alpha,\beta}_{R,N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

若 $v \in L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+), \partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x} v) \in L^2_{\omega_{\alpha+r,\beta}}(\mathbb{R}^+) \cap L^2_{\omega_{\alpha+r-1,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{I}}_{G,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+} v - v\|_{\omega_{\alpha,0},\mathbb{R}^+} \leqslant\ & c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{\frac{1-r}{2}}(\beta^{-1}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x} v)\|_{\omega_{\alpha+r-1,\beta},\mathbb{R}^+} \\ & + (1+\beta^{-\frac{1}{2}})(\ln N)^{\frac{1}{2}}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x} v)\|_{\omega_{\alpha+r,\beta},\mathbb{R}^+}).\end{aligned}$$

若 $v \in L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+), \partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x} v) \in L^2_{\omega_{\alpha+r,\beta}}(\mathbb{R}^+) \cap L^2_{\omega_{\alpha+r-1,\beta}}(\mathbb{R}^+), r > \alpha+1$ 或者 $|\alpha| < 1$, 且整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{I}}_{R,N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+} v - v\|_{\omega_{\alpha,0},\mathbb{R}^+} \leqslant\ & c_{\alpha,\beta}(\beta N)^{\frac{1-r}{2}}(\beta^{-1}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x} v)\|_{\omega_{\alpha+r-1,\beta},\mathbb{R}^+} \\ & + (1+\beta^{-\frac{1}{2}})(\ln N)^{\frac{1}{2}}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x} v)\|_{\omega_{\alpha+r,\beta},\mathbb{R}^+}).\end{aligned}$$

在早期的研究工作中, 我们通常选用标准的 Laguerre 函数, 即 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 1$. 文献 [62] 建立了采用这类基函数的正交逼近并应用于一些非线性偏微分方程的谱方法. 文献 [63] 研究了对应的插值误差估计及其应用. 同时, 文献 [64,65] 应用前述基函数设计区域分解谱和拟谱方法, 并较早建立了它们的理论基础. 事实上, 前述基函数特别适用于区域分解谱和拟谱方法. 某些问题的解剧烈震荡或者在很大的 x 处出现多个峰值, 文献 [63] 对此类问题提出了应用 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 1$ 的 Laguerre 函数的拟谱方法, 并在插值点间采用多区域 Legendre 逼近方法, 从而提高数值解的精度. 这样的处理方法可以看作为瀑布型多重网格法. 它不仅恢复了插值点间数值解的结构, 也节约了计算工作量. 另外, 文献 [57,58] 应用 $\alpha = 0$ 和 $\beta > 0$ 的 Laguerre 函数建立了 Laguerre-Gauss 型和 Laguerre-Radau 型配置法, 并应用它们计算一阶常微分方程初值问题. 文献 [66] 则提出了二阶常微分方程初值问题的 Laguerre-Gauss 型配置方法.

应用标准 Laguerre 函数的谱和拟谱方法适用于一维典型问题和有关的问题, 而应用广义 Laguerre 函数的谱和拟谱方法也适用于退化或者奇异问题, 并且更适用于多维问题.

下面举一个例子. 用 x 和 $V(x,s)$ 分别表示标的资产价格和衍生证券价格. 我们考虑如下 Black-Scholes 型方程:

$$\begin{cases}\partial_s V + xB\partial_x V + \partial_x(x^2 A\partial_x V) - GV = F, & x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leqslant s < T, \\ V(x,T) = V_0(x), & x \in \mathbb{R}^+,\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $0 < a_0 \leqslant A(x,s) \leqslant a_1$, 且当 $x \to 0$ 时 $|B(x,s)|$ 是有界的. 显然, 系数 $xB(x,s)$ 和 $x^2 A(\rho,s)$ 在 $x = 0$ 处是退化的. 根据 Fichera 理论, 我们不需要在 $x = 0$ 处附加任何边界条件.

方程 (3.4) 包含了经济数学中的很多重要模型, 如 Black-Scholes 模型、Dothan 模型和 Black-Derman-Toy 模型, 具体可参见文献 [67–69]. 在实际问题中, 解的渐近性态依赖于最后状态 $V_0(x)$. 例如, 存在两类有意义的解, 第一类解称为看涨期权 $V_c(x,s)$, 它在 $x \to \infty$ 时趋向 ∞; 第二类解称为看跌期权 $V_p(x,s)$, 它在 $x \to \infty$ 时快速衰减到零. 存在这两类解的一个显式关系.

Guo 和 Zhang [60] 提出了计算方程 (3.4) 的看跌期权解的谱方法. 为此, 令 $t = T - s$,

$$\begin{aligned}&a(x,t) = A(x,T-t), \quad b(x,t) = B(x,T-t), \quad g(x,t) = G(x,T-t), \\ &U(x,t) = V(x,T-t), \quad U_0(x) = V_0(x), \quad f(x,t) = -F(x,T-t).\end{aligned}$$

于是, 方程 (3.4) 变换成如下反应 - 扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t U - xb\partial_x U - \partial_x(x^2 a\partial_x U) + gU = f, & x\in\mathbb{R}^+, \quad 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\mathbb{R}^+.\end{cases} \tag{3.5}$$

计算方程 (3.5) 的谱格式是寻找数值解 $u_N(t)\in\mathcal{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_t u_N(t),\phi)_{\mathbb{R}^+} - (xb(t)\partial_x u_N(t),\phi)_{\mathbb{R}^+} + (x^2 a(t)\partial_x u_N(t),\partial_x\phi)_{\mathbb{R}^+}\\ \quad +(g(t)u_N,\phi)_{\mathbb{R}^+} = (f(t),\phi)_{\mathbb{R}^+}, \quad \forall\,\phi\in\mathcal{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+), \quad 0<t\leqslant T,\\ u_N(0)=\tilde{P}_{N,0,\beta,\mathbb{R}^+}U_0 \text{ 或者 } \tilde{P}^1_{N,2,0,\beta,\mathbb{R}^+}U_0.\end{cases}$$

上述方法可以应用到很大一类其他问题. 例如, 经济数学中的 Cox-Ingersoll-Ross 模型问题 (参见文献 [70])

$$\partial_s V + \left(b-\frac{1}{2}d^2 - ax\right)\partial_x V + \frac{1}{2}\partial_x(d^2 x\partial_x V) - xV = 0, \quad 0<x<\infty, \quad 0<s<T.$$

另一个是带跳跃系数的二维模型问题

$$\partial_t V + \mathcal{H}(x)\partial_y V + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + q - r\right)\partial_x V - \frac{1}{2}\sigma^2\partial_x^2 V + rV = 0, \quad -\infty<x<\infty, \quad 0<y, \quad t<T,$$

其中 $\mathcal{H}(x)$ 是 Heaviside 函数.

Zhang 和 Guo [71] 对三维全空间上的非线性 Klein-Gordon 方程提出了广义 Laguerre- 球面调和混合谱方法. Jiao 和 Guo [72] 对无限带状区域上的 Navier-Stokes 方程提出了应用广义 Laguerre 函数的混合谱方法.

3.3 应用带任意参数的 Laguerre 逼近的谱和拟谱方法

Guo 等人 [73] 提出了带任意实参数 α 的广义 Laguerre 正交和拟正交逼近, 及相应的插值逼近, 有关结果也可参见文献 [74]. Everitt 等人 [75] 曾考虑带负整数 α 的广义 Laguerre 正交逼近, 但没有误差估计. 上述逼近对高阶微分方程的谱和拟谱方法特别有效.

将小于或等于 α 的最大整数记为 $[\alpha]$. 当 $\alpha\leqslant -1$ 时令 $\bar{l}_\alpha=[-\alpha]$, 否则 $\bar{l}_\alpha=0$. 又当 $\alpha\leqslant -1$ 时, $l_\alpha = l-[-\alpha]$, 否则 $l_\alpha = l$. 新的广义 Laguerre 函数为

$$\bar{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha}\mathcal{L}_{l_\alpha}^{-\alpha,\beta}(x), & \alpha\leqslant -1, \quad l\geqslant \bar{l}_\alpha,\\ \mathcal{L}_l^{\alpha,\beta}(x), & \alpha>-1, \quad l\geqslant\bar{l}_\alpha.\end{cases}$$

它们构成了 $L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系. 令

$$\bar{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) = \mathrm{span}\{\bar{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta}(x), \bar{l}_\alpha\leqslant l\leqslant N\}.$$

空间 $L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的正交投影 $\bar{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}: L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)\to\bar{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\bar{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v,\phi)_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\,\phi\in\bar{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+).$$

为了估计逼近误差, 我们引入 Sturm-Liouville 算子, $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}v(x) = -x^{-\alpha}\mathrm{e}^{\beta x}\partial_x(x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\beta x}\partial_x v(x))$. 相应地, 定义下列 Sobolev 型空间:

$$D(\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta}) = \{v \mid \mathcal{A}^k_{\alpha,\beta}v \in L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+), 0 \leqslant k \leqslant r\}, \quad r \geqslant 0,$$
$$D(\mathcal{A}^{r+\frac{1}{2}}_{\alpha,\beta}) = \{v \mid v \in D(\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta}), \partial_x\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta}v \in L^2_{\omega_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)\},$$

其半范数和范数为

$$|v|_{D(\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta})} = \|\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta}v\|_{\omega_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+}, \qquad |v|_{D(\mathcal{A}^{r+\frac{1}{2}}_{\alpha,\beta})} = \|\partial_x\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta}v\|_{\omega_{\alpha+1,\beta},\mathbb{R}^+},$$
$$\|v\|_{D(\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta})} = \left(\sum_{k=0}^{r}|v|^2_{D(\mathcal{A}^k_{\alpha,\beta})}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{D(\mathcal{A}^{r+1/2}_{\alpha,\beta})} = (\|v\|^2_{D(\mathcal{A}^r_{\alpha,\beta})} + |v|^2_{D(\mathcal{A}^{r+1/2}_{\alpha,\beta})})^{\frac{1}{2}}.$$

若 $v \in D(\mathcal{A}^{\frac{r}{2}}_{\alpha,\beta})$, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$|\bar{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v|_{D(\mathcal{A}^{\frac{k}{2}}_{\alpha,\beta})} \leqslant c(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}|v|_{D(\mathcal{A}^{\frac{r}{2}}_{\alpha,\beta})}.$$

在实际问题中, 特殊投影 $\bar{P}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$ 是最有用的, 其中 m 是正整数. 显然,

$$\partial^k_x\bar{\mathcal{L}}^{-m,\beta}_l(0) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \quad l \geqslant m.$$

若 $\partial^k_x v \in L^2_{\omega_{-m+k,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial^r_x v \in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1 \leqslant m \leqslant \min(r,N)$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, $k \leqslant m$, 则 $\|\partial^k_x(\bar{P}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v - v)\|_{\omega_{-m+k,\beta},\mathbb{R}^+} \leqslant c(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial^r_x v\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}$.

为了计算高阶微分方程, 我们需要其他正交投影. 我们引入空间 $H^r_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, 其范数为

$$\|v\|_{H^r_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)} = \left(\sum_{k=0}^{r}\|\partial^k_x v\|^2_{\omega_{-m+k,\beta},\mathbb{R}^+}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

又当 $1 \leqslant m \leqslant r$ 时,

$${}_0H^r_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+) = \{v \mid v \in H^r_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+) \text{ 且 } \partial^k_x v(0) = 0, 0 \leqslant k \leqslant r-1\}.$$

正交投影 ${}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} : {}_0H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+) \to \bar{Q}_{N,-m,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\partial^m_x({}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v - v), \partial^m_x\phi)_{\omega_{0,\beta},\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\,\phi \in \bar{Q}_{N,-m,\beta}(\mathbb{R}^+).$$

事实上,

$${}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(x) = \bar{P}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(x), \quad \forall\, v \in {}_0H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+).$$

因此, 若 $v \in {}_0H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, $\partial^r_x v \in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1 \leqslant m \leqslant \min(r,N)$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, $k \leqslant m$, 则

$$\|\partial^k_x({}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v - v)\|_{\omega_{-m+k,\beta}\mathbb{R}^+} \leqslant c(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial^r_x v\|_{\omega_{-m+r,\beta}\mathbb{R}^+}.$$

对于混合非齐次边界条件问题, 我们需要考虑 Laguerre 拟正交逼近. 尤其在区域分解谱方法中, 我们需要保持数值解及其某些导数在相邻子区域公共边界上的连续性. 为此, 令

$$\bar{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x) = \sum_{j=0}^{m-1}\partial^j_x v(0)\frac{x^j}{j!}.$$

可验证

$$\partial_x^k v_{b,m,\mathbb{R}^+}(0) = \partial_x^k v(0), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1.$$

对任意的 $v \in H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, 令 $\bar{v}(x) = v(x) - \bar{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x)$. 由于 $\bar{v}(x) \in {}_0H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, 我们可以定义如下广义 Laguerre 拟正交投影:

$$\bar{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v(x) = {}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} \bar{v}(x) + \bar{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x).$$

显然, $\bar{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$, 且

$$\partial_x^k \bar{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v(0) = \partial_x^k v(0), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1.$$

若 $v \in H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r v \in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1 \leqslant m \leqslant \min(r,N)$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, $k \leqslant m$, 则

$$\|\partial_x^k(\bar{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v \quad -v)\|_{\omega_{-m+k,\beta},\mathbb{R}^+} \leqslant c(\beta N)^{\frac{k-r}{2}} \|\partial_x^r v\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

拟正交投影 $\bar{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v$ 并不是通常意义下的正交投影. 然而, 它与正交投影 ${}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v$ 具有同样的谱精度, 而且在 $x=0$ 处, 它的直至 $m-1$ 阶的导数都与所逼近函数的相应导数一致.

下面考虑广义 Laguerre-Radau 型插值. 对整数 $r \geqslant m-1$, 令

$${}_0C^r_m(\bar{\mathbb{R}}^+) = \{v \in C^r(\bar{\mathbb{R}}^+) \mid \partial_x^k u(0) = 0, 0 \leqslant k \leqslant m-1\}.$$

对整数 $m \geqslant 0$, 选取如下插值点和权:

$$\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j} = \xi^{m,\beta}_{G,N-m,j}, \quad \bar{w}^{m,\beta}_{N,j} = (\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j})^{-2m} w^{m,\beta}_{G,N-m,j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N-m.$$

对任意的 $v \in {}_0C^{m-1}_m(\bar{\mathbb{R}}^+)$, $m \geqslant 1$, 我们按照下式引入辅助插值 $\bar{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v \in \bar{Q}_{N,-m,\beta}(\mathbb{R}^+)$,

$$\bar{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v(\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j}) = v(\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N-m.$$

对任意的 $v \in C^{m-1}_m(\bar{\mathbb{R}}^+)$, 我们如下定义新的 Laguerre-Radau 型插值:

$$\bar{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v(x) = \bar{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta} \bar{v}(x) + \bar{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x).$$

可以验证

$$\bar{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v(\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j}) = v(\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N-m,$$
$$\bar{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v(0) = \partial_x^k v(0), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1.$$

若 $v \in H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r v \in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1 \leqslant m \leqslant \min(r,N)$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, $k \leqslant m$, 则

$$\|\partial_x^k(\bar{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+} v - v)\|_{\omega_{-m+k,\beta}} \leqslant c(\beta^{-\frac{1}{2}}+1)(\ln N)^{\frac{1}{2}}(\beta N)^{\frac{k+1-r}{2}} \|\partial_x^r v\|_{\omega_{-m+r,\beta}}.$$

在计算带混合非齐次边界条件的高阶问题时, 上述 Laguerre 拟正交逼近和广义 Laguerre-Radau 型插值在有关的谱、拟谱和配置方法中有着重要的应用. 如类似于稳定态流函数方程的问题和推广的 Fisher-Kolmogorov 方程等, 相关文献可参见文献 [76].

Zhang 和 Guo [77] 还提出了应用带任意参数 α 的 Laguerre 函数的新正交逼近和相应的拟正交逼近. 新的广义 Laguerre 函数为

$$\hat{\mathcal{L}}^{\alpha,\beta}_l(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}x} \bar{\mathcal{L}}^{\alpha,\beta}_l(x), \quad l \geqslant \bar{l}_\alpha.$$

它们构成了 $L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系. 令 $\hat{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)=\{\hat{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta}(x),\bar{l}_\alpha\leqslant l\leqslant N\}$. 空间 $L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+)$ 中的正交投影 $\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}:L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+)\to\hat{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v-v,\phi)_{\omega_{\alpha,0},\mathbb{R}^+}=0,\quad\forall\,\phi\in\hat{Q}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+).$$

为了描述逼近误差, 我们引入 Sturm-Liouville 算子 $\hat{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}v(x)=-x^{-\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}\partial_x(x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\beta x}\partial_x(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v(x)))$. 相应地, 引入 Sobolev 型空间

$$D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta})=\{v\mid\hat{\mathcal{A}}^k_{\alpha,\beta}v\in L^2_{\omega_{\alpha,0}}(\mathbb{R}^+),0\leqslant k\leqslant r\},\quad r\geqslant 0,$$

其半范数和范数为

$$|v|_{D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta})}=\|\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta}v\|_{\omega_{\alpha,0},\mathbb{R}^+},\quad\|v\|_{D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta})}=\left(\sum_{k=0}^r|v|^2_{D(\hat{\mathcal{A}}^k_{\alpha,\beta})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $v\in D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta})$, 且整数 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 则 $|\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v-v|_{D(\mathcal{A}^k_{\alpha,\beta})}\leqslant c(\beta N)^{k-r}|v|_{D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta})}$.

在实际问题中, 特殊投影 $\hat{P}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$ 是最有用的, 其中 m 是正整数. 若 $v\in{}_0H^m_{\omega_{-m,0},A}(\mathbb{R}^+)\cap H^k_{\omega_{-m+k,0}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1\leqslant m\leqslant\min(r,N)$, $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, $k\leqslant m$, 则

$$\|\partial_x^k(\hat{P}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v-v)\|_{\omega_{-m+k,0},\mathbb{R}^+}\leqslant c(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

下面考虑空间 $H^r_{\omega_{-m,0},A}(\mathbb{R}^+)$ 中的拟正交投影. 令

$$\hat{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}x}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^jC_j^i\left(\frac{\beta}{2}\right)^{j-i}\partial_x^iv(0)\right)x^j.$$

对任意的 $v\in H^m_{\omega_{-m,0},A}(\mathbb{R}^+)$, 令

$$\hat{v}(x)=v(x)-\hat{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x).$$

由于 $\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}\hat{v}\in{}_0H^m_{\omega_{-m,\beta},,A}(\mathbb{R}^+)$, 投影 ${}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}\hat{v})$ 是有意义的. 因此, 我们可以定义如下广义 Laguerre 拟正交投影:

$$\hat{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(x)=\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}x}{}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}\hat{v}(x))+\hat{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x).$$

可以验证

$$\partial_x^k\hat{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(0)=\partial_x^kv(0),\quad 0\leqslant k\leqslant m-1.$$

若 $v\in H^m_{\omega_{-m,0},A}(\mathbb{R}^+)\cap H^k_{\omega_{-m+k,0}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1\leqslant m\leqslant\min(r,N)$, $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, $k\leqslant m$, 则

$$\|\partial_x^k(\hat{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v-v)\|_{\omega_{-m+k,0},\mathbb{R}^+}\leqslant c(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

拟正交投影 $\hat{P}^m_{*,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$ 并不是通常意义下的正交投影. 然而它与正交投影 ${}_0\bar{P}^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$ 具有同样的谱精度, 并且在 $x=0$ 处, 它的直至 $m-1$ 阶导数与所逼近函数的相应导数相等.

下面考虑对应的插值逼近. 选取如下插值点和权:

$$\hat{\xi}^{m,\beta}_{N,j}=\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j},\quad\hat{w}^{m,\beta}_{N,j}=\mathrm{e}^{\beta\hat{\xi}^{m,\beta}_{N,j}}\bar{w}^{m,\beta}_{N,j},\quad 0\leqslant j\leqslant N-m,\quad m\geqslant 0.$$

对任意的 $v \in {}_0C_m^{m-1}(\bar{\mathbb{R}}^+)$, $m \geqslant 1$, 按照下式引入辅助插值 $\hat{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v \in \hat{Q}_{N,-m,\beta}(\mathbb{R}^+)$,

$$\hat{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(\hat{\xi}_{N,j}^{m,\beta}) = v(\hat{\xi}_{N,j}^{m,\beta}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N-m.$$

对任意的 $v \in C_m^{m-1}(\bar{\mathbb{R}}^+)$, 我们定义新的 Laruerre-Radau 型插值如下:

$$\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(x) = \hat{\mathcal{I}}_{N,m,\beta,\mathbb{R}^+}\hat{v}(x) + \hat{v}_{b,m,\mathbb{R}^+}(x).$$

显然,

$$\begin{aligned}&\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(\hat{\xi}_{N,j}^{m,\beta}) = v(\hat{\xi}_{N,j}^{m,\beta}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N-m,\\ &\partial_x^k\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v(0) = \partial_x^k v(0), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1.\end{aligned}$$

若 $v \in H^m_{\omega_{-m,0},A}(\mathbb{R}^+) \cap H^k_{\omega_{-m+k,0}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v) \in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1 \leqslant m \leqslant \min(r,N)$, $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, $k \leqslant m$, 则

$$\|\partial_x^k(\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v - v)\|_{\omega_{-m+k,0},\mathbb{R}^+} \leqslant c(\beta^{-\frac{1}{2}}+1)(\ln N)^{\frac{1}{2}}(\beta N)^{\frac{k+1-r}{2}}\|\partial_x^r(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

文献 [78–81] 最早研究了 $m=1$ 的上述拟正交逼近和 Laguerre-Radau 型插值逼近. 文献 [82] 则提出了 $m=2$ 的拟正交逼近.

本小节中的结果为数值模拟高阶问题奠定了基础, 特别是精确拟合混合非齐次边界条件问题和采用区域分解的数值方法, 可参见文献 [76,77].

3.4 拟合渐近性态的谱和拟谱方法

正交逼近 $\bar{P}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$ 和插值 $\bar{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$ 对很大一类在无穷远处无界的函数是有效的. 如果函数的衰减行为类似于 $(1+x)^\mu$, $\mu < -\frac{1}{2}$, 则可采用正交逼近 $\hat{P}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$ 和插值 $\hat{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}v$. 然而, 不同微分方程解的渐近性态可能不一样. 一般地说, 如果解增长或衰减方式类似于 $\mathcal{O}((1+x)^\mu)$, 那么在正交逼近或者插值时宜选用类似于 $(1+x)^{-\gamma}$, $\gamma > 2\mu+1$ 的权函数.

设 α 和 γ 为实数, 且 $\delta > 0$. Guo 和 Zhang [83] 引入了一类更加广义的 Laguerre 型函数

$$\hat{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x) = (\delta+x)^{\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}x}\bar{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta}(x), \quad l \geqslant \bar{l}_\alpha.$$

记权函数 $\hat{\omega}_{\alpha,\gamma,\delta}(x) = x^\alpha(\delta+x)^{-\gamma}$. 所有的 $\hat{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x)$ 构成 $L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系. 令

$$\hat{Q}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+) = \mathrm{span}\{\hat{\mathcal{L}}_l^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x), \bar{l}_\alpha \leqslant l \leqslant N\}.$$

空间 $L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的正交投影 $\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}^+} : L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+) \to \hat{Q}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v - v, \phi)_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\, \phi \in \hat{Q}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+).$$

引入 Sturm-Liouville 算子

$$\hat{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}v(x) = -x^{-\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}(\delta+x)^{\frac{\gamma}{2}}\partial_x(x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\beta x}\partial_x((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v(x))),$$

并定义相应的 Sobolev 型空间

$$D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}) = \{v \mid \hat{\mathcal{A}}^k_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}v \in L^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+), 0 \leqslant k \leqslant r\}, \quad r \geqslant 0,$$

其半范数和范数为

$$|v|_{D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta,\gamma,\delta})}=\|\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}v\|^2_{\hat{\omega}_{\alpha,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+},\quad \|v\|_{D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta,\gamma,\delta})}=\left(\sum_{k=0}^{r}|v|^2_{D(\hat{\mathcal{A}}^k_{\alpha,\beta,\gamma,\delta})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $v\in D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta,\gamma,\delta})$, 且整数 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$|\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v|_{D(\hat{\mathcal{A}}^k_{\alpha,\beta,\gamma,\delta})}\leqslant c(\beta N)^{k-r}|v|_{D(\hat{\mathcal{A}}^r_{\alpha,\beta,\gamma,\delta})}.$$

如果适当地调节参数 α 和 γ, 那么正交投影 $\hat{P}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mathbb{R}^+}v$ 不仅在 $x=0$ 处精确吻合边界条件, 而且很好地拟合解在无穷远处的渐近性态.

我们考虑一个特殊情形. 为此引入空间

$$H^r_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)=\{v\mid v\text{ 在 }\mathbb{R}^+\text{ 上可测且 }\|v\|_{H^r_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)}<\infty\},\quad r\geqslant 0,$$

其范数为

$$\|v\|_{H^r_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)}=\left(\sum_{k=0}^{r}\|\partial_x^k v\|^2_{\hat{\omega}_{-m+k,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

又记

$${}_0H^r_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)=\{v\mid v\in H^r_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)\text{ 且 }\partial_x^k v(0)=0,0\leqslant k\leqslant r-1\}.$$

若 $v\in{}_0H^m_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)\cap H^k_{\hat{\omega}_{-m+k,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1\leqslant m\leqslant\min(r,N)$, $0\leqslant k\leqslant m$, 则对 $r\leqslant N+1$,

$$\|\partial_x^k(\hat{P}_{N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v)\|_{\hat{\omega}_{-m+k,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}\leqslant c(1+\beta^{-k})(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

下面考虑拟正交逼近. 当 $i=3$ 时令 $\theta_i=1$, 否则 $\theta_i=0$. 又当 $i\geqslant 2$ 时令 $\sigma_i=1$, 否则 $\sigma_i=0$. 我们引入函数

$$v_{b,m,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}(x)=(\delta+x)^{\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}x}\sum_{j=0}^{m-1}a_j(v)x^j,\qquad 1\leqslant m\leqslant 4,$$

其中

$$a_j(v)=\frac{1}{j!}\delta^{-\frac{\gamma}{2}}\sum_{i=0}^{j}(-1)^iC_j^i\left(\left(\frac{\gamma\delta^{-1}-\beta}{2}\right)^i+\frac{3}{4}\theta_i\gamma(\gamma\delta^{-1}-\beta)\delta^{-2}+\frac{1}{2}(i-1)\sigma_i\gamma\delta^{-i}\right)\partial_x^{j-i}v(0).$$

可以验证

$$\partial_x^k v_{b,m,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}(0)=\partial_x^k v(0),\qquad 0\leqslant k\leqslant m-1\leqslant 3.$$

对任意的 $v\in H^m_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)$, 令 $\hat{v}(x)=v(x)-v_{b,m,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}(x)$. 由于 $(\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}\hat{v}\in{}_0H^m_{\omega_{-m,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, 我们可定义如下 Laguerre 拟正交投影:

$$\hat{P}^m_{*,N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v(x)=(\delta+x)^{\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}x}{}_0P^m_{N,-m,\beta,\mathbb{R}^+}((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}\hat{v}(x))+v_{b,m,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}(x).$$

显然,

$$\partial_x^k\hat{P}^m_{*,N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v(0)=\partial_x^k v(0),\quad 0\leqslant k\leqslant m-1\leqslant 3.$$

若 $v\in H^m_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)\cap H^k_{\hat{\omega}_{-m+k,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1\leqslant m\leqslant\min(4,r,N)$, $0\leqslant k\leqslant m$, 则对 $r\leqslant N+1$,

$$\|\partial_x^k(\hat{P}^m_{*,N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v)\|_{\hat{\omega}_{-m+k,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}\leqslant c(1+\beta^{-k})(\beta N)^{\frac{k-r}{2}}\|\partial_x^r((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}.$$

下面考虑对应的插值逼近. 我们采用下列插值点和权:

$$\begin{aligned}&\hat{\xi}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j}=\bar{\xi}^{m,\beta}_{N,j},\quad 0\leqslant j\leqslant N-m,\\&\hat{w}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j}=(\delta+\hat{\xi}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j})^{-\gamma}\mathrm{e}^{\beta\hat{\xi}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j}}\bar{w}^{m,\beta}_{N,j},\quad 0\leqslant j\leqslant N-m.\end{aligned}$$

对任意的 $v\in C^{m-1}_{0,m}(\bar{\mathbb{R}}^+)$, $m\geqslant 1$, 引入如下辅助插值 $\hat{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v\in\hat{Q}_{N,-m,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+)$,

$$\hat{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v(\hat{\xi}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j})=v(\hat{\xi}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j}),\quad 0\leqslant j\leqslant N-m.$$

对任意的 $v\in C^{m-1}(\bar{\mathbb{R}}^+)$, 有 $\hat{v}\in C^{m-1}_{0,m}(\bar{\mathbb{R}}^+)$. 因此, 插值 $\hat{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}\hat{v}\in\hat{Q}_{N,-m,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+)$. 从而, 我们可以定义 Laguerre-Radau 型插值, $\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v(x)=\hat{\mathcal{I}}_{N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}\hat{v}(x)+v_{b,m,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}(x)$. 显然,

$$\begin{aligned}&\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v(\hat{\xi}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j})=v(\hat{\xi}^{m,\beta,\gamma,\delta}_{N,j}),\quad 0\leqslant j\leqslant N-m,\\&\partial_x^k\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v(0)=\partial_x^kv(0),\quad 0\leqslant k\leqslant m-1.\end{aligned}$$

若 $v\in H^m_{\hat{\omega}_{-m,\gamma,\delta},A}(\mathbb{R}^+)\cap H^k_{\hat{\omega}_{-m+k,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$, $\partial_x^r((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\in L^2_{\omega_{-m+r,\beta}}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $1\leqslant m\leqslant\min(4,r,N)$, $0\leqslant k\leqslant m$, 则对 $r\leqslant N+1$,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(\hat{\mathcal{I}}_{R,N,-m,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v)\|_{\hat{\omega}_{-m+k,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}\leqslant{}&c(1+\beta^{-k})(\beta^{-\frac{1}{2}}+1)(\ln N)^{\frac{1}{2}}(\beta N)^{\frac{k+1-r}{2}}\\&\times\|\partial_x^r((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\|_{\omega_{-m+r,\beta},\mathbb{R}^+}.\end{aligned}$$

作为一个应用例子, 我们考虑如下模型问题:

$$\begin{cases}\partial_x^4U+\lambda U=f,\quad x\in\mathbb{R}^+,\\\partial_x^2U(0)=b,\quad U(0)=a,\end{cases}\tag{3.6}$$

其中 $f\in L^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$, a,b 和 $\lambda>0$ 是给定的常数, 并且假设

$$x^{\frac{1-\gamma}{2}}\partial_x^kU(x)\to 0,\quad x^{\frac{-1-\gamma}{2}}\partial_x^3U(x)\to 0,\quad 当\ x\to\infty,\quad 0\leqslant k\leqslant 2.\tag{3.7}$$

这个问题类似于稳态流函数方程, 及文献 [84] 中讨论的稳定态广义 Fisher-Kolmogorov 方程.

为了推导方程 (3.6) 的弱形式, 令 $\delta\geqslant 1$ 并引入双线性形式

$$\mathcal{A}_{\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(u,v)=a_{1,\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(u,v)+a_{2,\delta,\Lambda}(u,v),\quad\forall\,u,v\in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+),$$

其中

$$\begin{aligned}&a_{1,\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(u,v)=\int_{\mathbb{R}^+}\partial_x^2u(x)\partial_x^2v(x)(\delta+x)^{-\gamma}dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^+}u(x)v(x)(\delta+x)^{-\gamma}dx,\\&a_{2,\delta,\mathbb{R}^+}(u,v)=-2\gamma\int_{\mathbb{R}^+}\partial_x^2u(x)\partial_xv(x)(\delta+x)^{-\gamma-1}dx+\gamma(\gamma+1)\int_{\mathbb{R}^+}\partial_x^2u(x)v(x)(\delta+x)^{-\gamma-2}dx.\end{aligned}$$

可以把空间 $H^1_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$ 看作为 $H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$ 与 $L^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$ 的插值空间. 故存在正常数 $d_{\gamma,\delta}$, 使得

$$\|\partial_x v\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} \leqslant d_{\gamma,\delta}(\|\partial_x^2 v\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} + \|v\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}), \quad \forall\, v \in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+).$$

为了简便计, 记

$$c_\gamma = 2\gamma^2(\gamma+1)^2 + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3). \tag{3.8}$$

可以验证

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(u,v)| \leqslant{}& \frac{5}{4}\|\partial_x^2 u\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} + \left(\frac{1}{2} + 4\gamma^2 d_{\gamma,\delta}\right)\|\partial_x^2 v\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda + 8\gamma^2 d_{\gamma,\delta} + \gamma^2(\gamma+1)^2)\|v\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}, \quad \forall\, u,v \in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+), \\
\mathcal{A}_{\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(v,v) \geqslant{}& \frac{1}{2}\|\partial_x^2 v\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} + (\lambda - c_\gamma)\|v\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} + \gamma(\gamma+1)\delta^{-\gamma-2}\partial_x v(0)v(0) \\
&+ \gamma\delta^{-\gamma-1}(\partial_x v(0))^2 + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\delta^{-\gamma-3}v^2(0), \quad \forall\, v \in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+).
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
&V(\mathbb{R}^+) = \{v \mid v \in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+), v(0) = a,\ \text{且当}\ x \to \infty\ \text{时}\ x^{\frac{-1-\gamma}{2}}\partial_x^3 v(x) \to 0\}, \\
&\overline{V}(\mathbb{R}^+) = \{v \mid v \in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)\ \text{且}\ v(0) = 0\}.
\end{aligned}$$

方程 (3.6) 的弱形式是寻找解 $U \in V(\mathbb{R}^+)$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(U,v) + b\delta^{-\gamma}\partial_x v(0) = (f,v)_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}, \quad \forall\, v \in \overline{V}(\mathbb{R}^+). \tag{3.9}$$

若 $\lambda > c_\lambda$, 则问题 (3.9) 有唯一解. 令

$$V_N(\mathbb{R}^+) = V(\mathbb{R}^+) \cap \hat{Q}_{N,0,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+), \quad \overline{V}_N(\mathbb{R}^+) = \overline{V}(\mathbb{R}^+) \cap \hat{Q}_{N,0,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+).$$

当 $\gamma \geqslant 0$, $\lambda > c_\lambda$ 时, 计算问题 (3.9) 的谱方法是寻找数值解 $u_N \in V_N(\mathbb{R}^+)$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(u_N,\phi) + b\delta^{-\gamma}\partial_x\phi(0) = (f,\phi)_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}, \quad \forall\, \phi \in \overline{V}_N(\mathbb{R}^+).$$

当 $\lambda \leqslant c_\gamma$ 时, 我们可以采用变量变换 $y = \theta x, \theta > 0$, 及 $V(y) = U(\frac{y}{\theta})$, $F(y) = f(\frac{y}{\theta})$. 于是, 问题 (3.6) 变换成

$$\begin{cases}
\partial_y^4 V(y) + \dfrac{\lambda}{\theta^4}V(y) = \dfrac{1}{\theta^4}f(y), \quad y \in \mathbb{R}^+, \\
\partial_x U(0) = \dfrac{b}{\theta}, \quad U(0) = a.
\end{cases}$$

如果 θ 适当小, 那么 $\frac{\lambda}{\theta^4} > c_\gamma$.

Laguerre 拟正交逼近也被应用于精确拟合混合边界条件的谱方法, 从而提供更好的数值结果. 为此, 令

$$\begin{aligned}
&V_N^*(\mathbb{R}^+) = V(\mathbb{R}^+) \cap \hat{Q}_{N,0,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+) \cap \{\phi \mid \partial_x^2\phi(0) = b\}, \\
&\overline{V}_N^*(\mathbb{R}^+) = \overline{V}(\mathbb{R}^+) \cap \hat{Q}_{N,0,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+) \cap \{\phi \mid \partial_x^2\phi(0) = 0\}.
\end{aligned}$$

当 $\gamma \geqslant 0$, $\lambda > c_\lambda$ 时, 计算问题 (3.6) 的谱方法是寻找数值解 $u_N \in V_N^*(\mathbb{R}^+)$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\delta,\mathbb{R}^+}(u_N,\phi) + b\delta^{-\gamma}\partial_x\phi(0) = (f,\phi)_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}, \quad \forall\, \phi \in \overline{V}_N^*(\mathbb{R}^+).$$

关于精确拟合混合边界条件的 Laguerre 谱方法的更多细节可参见文献 [77,83]. 对于精确拟合有限区域上 Neumann 和 Robin 边界条件的数值方法, 可参见文献 [85–89].

4 区域分解的 Laguerre 谱和拟谱方法

在许多实际问题中, 真解在靠近边界处剧烈变化. 为了提高计算精度又节省工作量, 我们可以采用区域分解方法. 换句话说, 在靠近边界处采用 Legendre 逼近, 在其他无界子区域上采用 Laguerre 逼近. 区域分解的 Laguerre 谱和拟谱方法也广泛应用于其他重要问题, 如复杂几何区域问题、非典型偏微分方程和外部问题等. 事实上, 区域分解谱方法起源于复杂区域问题, 可参见文献 [90,91]. 关于有界区域问题的区域分解谱方法的早期工作可参见文献 [92,93].

4.1 Laguerre-Legendre 组合谱和拟谱方法

标准的区域分解 Laguerre 谱和拟谱方法适用于一维二阶问题和一些相关的问题. Guo 和 Ma 在文献 [64,65] 的早期工作中应用标准 Laguerre 函数建立了上述方法并藉此计算 Burgers 方程. 更确切地说, 他们在靠近 $x=0$ 区域应用 Legendre 逼近, 在剩下的区间应用 Laguerre 逼近. Azaiez 等人[94] 提出了计算半无限管状区域上 Stokes 问题的 Laguerre-Legendre 的谱方法. Zhuang 等人[95] 提出了无界区域上 Navier-Stokes 方程的 Laguerre-Legendre 谱元方法. Shen 和 Wang [96] 还建立了计算三阶问题的 Laguerre 谱方法和 Laguerre-Legendre 组合谱方法.

对于高价问题的区域分解 Laguerre 谱和拟谱方法, 我们需要同时应用 Jacobi 拟正交逼近和 Laguerre 拟正交逼近. 为此, 令 $\Lambda=(-2,0)$, 整数 $m,n\geqslant 1$ 和位移 Jacobi 权函数 $\chi_{m,n}(x)=(-x)^m(2+x)^n$. 加权空间 $L^2_{\chi_{m,n}}(\Lambda)$ 的内积和范数分别是 $(u,v)_{\chi_{m,n},\Lambda}$ 和 $\|v\|_{\chi_{m,n},\Lambda}$. 当 $r\geqslant 0$ 时, 定义空间

$$H^r_{m,n,A}(\Lambda)=\{v\mid v \text{ 在 } \Lambda \text{ 上可测且 } \|v\|_{H^r_{m,n,A}(\Lambda)}<\infty\},$$

其范数为

$$\|v\|_{H^r_{m,n,A}(\Lambda)}=\left(\sum_{k=0}^{r}\|\partial_x^k v\|^2_{\chi_{-m+k,-n+k},\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

又当整数 $r>\max(m,n)$ 时,

$$H^r_{0,m,n,A}(\Lambda)=\{v\in H^r_{m,n,A}(\Lambda)\mid \partial_x^k v(-2)=0, 0\leqslant k\leqslant n-1, \text{及 } \partial_x^k v(0)=0, 0\leqslant k\leqslant m-1\}.$$

用 $J_l^{m,n}(x)$ 表示标准的 l 次 Jacobi 多项式, 并令

$$Y_l^{m,n}(x)=\chi_{m,n}(x)J^{m,n}_{l-m-n}(x+1),\quad l\geqslant m+n.$$

上述函数是文献 [97,98] 中广义 Jacobi 函数的一种特殊形式, 它们构成了 $L^2_{\chi_{m,n}}(\Lambda)$ 中的一个完备正交系. 令 $Q_{N,m,n}(\Lambda)=\mathrm{span}\{Y_l^{(m,n)}(x), m+n\leqslant l\leqslant N\}$. 当整数 $\max(m,n)\leqslant\mu\leqslant m+n$ 时, 定义如下正交投影 $P^{\mu,0}_{N,m,n,\Lambda}: H^{\mu}_{0,m,n,A}(\Lambda)\to Q_{N,m,n}(\Lambda)$,

$$(\partial_x^\mu(v-P^{\mu,0}_{N,m,n,\Lambda}v),\partial_x^\mu\phi)_{\chi_{-m+\mu,-n+\mu},\Lambda}=0,\quad \forall\,\phi\in Q_{N,m,n}(\Lambda).$$

我们引入如下的多项式 $q^-_{m,n,j,\Lambda}(x)$, $q^+_{m,n,j,\Lambda}(x)\in\mathcal{P}_{m+n-1}(\Lambda)$,

$$q^-_{m,n,j,\Lambda}(x)=\frac{1}{2^m j!}(-x)^m\sum_{l=0}^{n-1-j}\frac{(m+l-1)!}{2^l l!(m-1)!}(2+x)^{l+j},$$
$$q^+_{m,n,j,\Lambda}(x)=\frac{(-1)^j}{2^n j!}(2+x)^n\sum_{l=0}^{m-1-j}\frac{(n+l-1)!}{2^l l!(n-1)!}(-x)^{l+j}.$$

可以验证

$$\partial_x^k q_{m,n,j,\Lambda}^-(-2)=\delta_{k,j},\quad \partial_x^l q_{m,n,j,\Lambda}^-(0)=0,\quad 0\leqslant j,k\leqslant n-1,\quad 0\leqslant l\leqslant m-1,$$
$$\partial_x^l q_{m,n,j,\Lambda}^+(-2)=0,\quad \partial_x^k q_{m,n,j,\Lambda}^+(0)=\delta_{k,j},\quad 0\leqslant j,k\leqslant m-1,\quad 0\leqslant l\leqslant n-1.$$

对任意的 $v\in H_{m,n,A}^r(\Lambda)$ 和 $r\geqslant \max(m,n)$, 令

$$llv_{m,n,b,\Lambda}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\partial_x^j v(-2)q_{m,n,j,\Lambda}^-(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\partial_x^j v(0)q_{m,n,j,\Lambda}^+(x),\quad \bar{v}(x)=v(x)-v_{m,n,b,\Lambda}(x).$$

显然, $\bar{v}\in H_{0,m,n,A}^r(\Lambda)$. 文献 [73,74] 定义了 Jacobi 拟正交投影

$$P_{*,N,m,n,\Lambda}^{\mu}v(x)=P_{N,m,n,\Lambda}^{\mu,0}\bar{v}(x)+v_{m,n,b,\Lambda}(x).$$

若 $v\in H_{m,n,A}^{\mu}(\Lambda)$, $\partial_x^r v\in L_{\chi_{-m+r,-n+r}}^2(\Lambda)$, 且整数 $m,n,r\geqslant 1$, $N\geqslant m+n$, $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$, $\max(m,n,k)\leqslant \mu\leqslant m+n$, 及 $r\geqslant m+n$ (或 $\max(m,n)\leqslant r\leqslant m+n-1$, $1\leqslant m,n\leqslant 4$), 则 $\|\partial_x^k(P_{*,N,m,n,\Lambda}^{\mu}v-v)\|_{\chi_{-m+k,-n+k},\Lambda}\leqslant cN^{k-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{-m+r,-n+r},\Lambda}$.

我们通过一个模型问题来说明如何设计无界区域问题的区域分解谱方法. 设无界区域 $\Omega=\Lambda\cup\mathbb{R}^+=\{x\mid -2<x<\infty\}$. 空间 $L_{\chi}^2(\Omega)$ 的内积和范数分别是 $(u,v)_{\chi,\Omega}$ 和 $\|v\|_{\chi,\Omega}$. 当 $\chi(x)\equiv 1$ 时, 我们省略下标 χ. 令 $\delta\geqslant 2$. $d_{\gamma,\delta}$ 是使得下式成立的一个正常数,

$$\|\partial_x v\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2\leqslant d_{\gamma,\delta}(\|\partial_x^2 v\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2+\|v\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2),\quad \forall\, v\in H_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}^1(\Omega).$$

常数 c_γ 的意义如同 (3.8).

我们考虑如下问题:

$$\begin{cases}\partial_x^4 U+\lambda U=f, & x\in\Omega,\\ \partial_x U(-2)=b, & U(-2)=a,\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $f\in L_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}^2(\Omega)$, a,b 和 $\lambda>0$ 是给定的常数, 并假设 $U(x)$ 有与 (3.7) 同样的渐近行为.

引入双线性形式

$$\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(u,v)=a_{1,\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(u,v)+a_{2,\gamma,\delta,\Omega}(u,v),\quad \forall\, u,v\in H_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}^2(\Omega),$$

其中

$$a_{1,\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(u,v)=\int_\Omega \partial_x^2 u(x)\partial_x^2 v(x)(\delta+x)^{-\gamma}dx+\lambda\int_\Omega u(x)v(x)(\delta+x)^{-\gamma}dx,$$
$$a_{2,\gamma,\delta,\Omega}(u,v)=-2\gamma\int_\Omega \partial_x^2 u(x)\partial_x v(x)(\delta+x)^{-\gamma-1}dx+\gamma(\gamma+1)\int_\Omega \partial_x^2 u(x)v(x)(\delta+x)^{-\gamma-2}dx.$$

可以验证, 对任意的 $u,v\in H_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(u,v)|\leqslant{}&\frac{5}{4}\|\partial_x^2 u\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2+\left(\frac{1}{2}+4\gamma^2 d_{\gamma,\delta}\right)\|\partial_x^2 v\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2+\frac{\lambda}{2}\|u\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2\\&+\frac{1}{2}(\lambda+8\gamma^2 d_{\gamma,\delta}+\gamma^2(\gamma+1)^2)\|v\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2,\\ \mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(v,v)\geqslant{}&\frac{1}{2}\|\partial_x^2 v\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2+(\lambda-c_\gamma)\|v\|_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}^2+\gamma(\gamma+1)(\delta-2)^{-\gamma-2}\partial_x v(-2)v(-2)\end{aligned}$$

$$+\gamma(\delta-2)^{-\gamma-1}(\partial_x v(-2))^2+\frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\delta-2)^{-\gamma-3}v^2(-2).$$

令

$$V(\Omega)=\{v\mid v\in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\Omega),\partial_x v(-2)=b,v(-2)=a,\ \text{且当}\ x\to\infty\ \text{时}\ x^{\frac{-1-\gamma}{2}}\partial_x^3 v(x)\to 0\},$$
$$\overline{V}(\Omega)=\{v\mid v\in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\Omega)\ \text{且}\ \partial_x v(-2)=v(-2)=0\}.$$

问题 (4.1) 的弱形式是寻找解 $U\in V(\Omega)$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(U,v)=(f,v)_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega},\quad \forall\, v\in\overline{V}(\Omega). \tag{4.2}$$

当 $\lambda>c_\gamma$ 时, 上述问题有唯一解.

记数对 $\boldsymbol{N}=(N_1,N_2)$, 并引入下列集合:

$$V_{\boldsymbol{N}}(\Omega)=\{\phi\in V(\Omega)\mid \phi\mid_\Lambda\in P_{N_1}(\Lambda),\phi\mid_{\mathbb{R}^+}\in\hat{Q}_{N_2,0,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+)\},$$
$$\overline{V}_{\boldsymbol{N}}(\Omega)=\{\phi\in\overline{V}(\Omega)\mid \phi\mid_\Lambda\in P_{N_1}(\Lambda),\phi\mid_{\mathbb{R}^+}\in\hat{Q}_{N_2,0,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+)\}.$$

计算 (4.2) 的区域分解谱方法是寻找数值解 $u_{\boldsymbol{N}}\in V_{\boldsymbol{N}}(\Omega)$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(u_{\boldsymbol{N}},\phi)=(f,\phi)_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega},\quad \forall\,\phi\in\overline{V}_{\boldsymbol{N}}(\Omega). \tag{4.3}$$

当 $\lambda>c_\gamma$, 且 $\gamma\geqslant 0$ 或 $\delta=2$ 时, 问题 (4.3) 有唯一解.

为了估计数值解的误差, 定义组合拟正交投影 $P^2_{*,\boldsymbol{N},\gamma,\delta,\Omega}v(x)$ 如下:

$$P^2_{*,\boldsymbol{N},\gamma,\delta,\Omega}v(x)=\begin{cases}P^2_{*,N_1,2,2,\Lambda}v(x), & x\in\Lambda,\\ \hat{P}^2_{*,N_2,-2,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v(x), & x\in\mathbb{R}^+.\end{cases}$$

显然, $P^2_{*,\boldsymbol{N},\gamma,\delta,\Omega}v\in V_{\boldsymbol{N}}(\Omega)$. 若 $\delta>2$ 或者 $\delta=2$ 且 $\gamma\leqslant 0$, 则对整数 $2\leqslant r_1\leqslant N_1+1$ 和 $2\leqslant r_2\leqslant N_2+1$,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(P^2_{*,\boldsymbol{N},\gamma,\delta,\Omega}v-v)\|^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}\leqslant{}& cN_1{}^{2k-2r_1}\|\partial_x^{r_1}v\|^2_{\chi_{-2+r_1,-2+r_1},\Lambda}+c(1+\beta^{-4})(\beta N_2)^{2k-r_2}\\ &\times\|\partial_x^{r_2}((\delta+x)^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x}v)\|^2_{\omega_{-2+r_2,\beta},\mathbb{R}^+},\quad k=0,1,2.\end{aligned}$$

上述不等式是数值解误差估计的重要工具.

下面考虑如下非齐次混合边值问题:

$$\begin{cases}\partial_x^4U(x)+\lambda U(x)=f(x), & x\in\Omega,\\ \partial_x^2U(-2)=b,\quad U(-2)=a,\end{cases} \tag{4.4}$$

其中 $U(x)$ 的渐近性态及 $f(x),a$ 和 b 的含义与 (4.1) 相同. 令

$$V(\Omega)=\{v\mid v\in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\Omega),v(-2)=a,\ \text{且当}\ x\to\infty\ \text{时}\ x^{\frac{-1-\gamma}{2}}\partial_x^3v(x)\to 0\},$$
$$\overline{V}(\Omega)=\{v\mid v\in H^2_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta}}(\Omega)\ \text{且}\ v(-2)=0\}.$$

问题 (4.4) 的弱形式是寻找解 $U\in V(\Omega)$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\gamma,\delta,\Omega}(U,v)+b(\delta-2)^{-\gamma}\partial_x v(-2)=(f,v)_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega},\quad \forall\, v\in\overline{V}(\Omega). \tag{4.5}$$

如果 $\lambda > c_\gamma$, 且 $\gamma \geqslant 0$ 或者 $\delta = 2$, 那么上述问题有唯一解.

令

$$V_{\boldsymbol{N}}(\Omega) = \{\phi \in V(\Omega) \mid \phi\,|_\Lambda \in P_{N_1}(\Lambda), \phi\,|_{\mathbb{R}^+} \in \hat{Q}_{N_2}^{(0,\beta,\gamma,\delta)}(\mathbb{R}^+)\},$$
$$\overline{V}_{\boldsymbol{N}}(\Omega) = \{\phi \in \overline{V}(\Omega) \mid \phi\,|_\Lambda \in P_{N_1}(\Lambda), \phi\,|_{\mathbb{R}^+} \in \hat{Q}_{N_2}^{(0,\beta,\gamma,\delta)}(\mathbb{R}^+)\}.$$

计算问题 (4.5) 的区域分解谱方法是寻找数值解 $u_{\boldsymbol{N}} \in V_{\boldsymbol{N}}(\Omega)$, 使得

$$\mathcal{A}_{\lambda,\delta,\Omega}(u_{\boldsymbol{N}}, \phi) + b(\delta-2)^{-\gamma}\partial_x\phi(-2) = (f, \phi)_{\hat{\omega}_{0,\gamma,\delta},\Omega}, \quad \forall\, \phi \in \overline{V}_{\boldsymbol{N}}(\Omega). \tag{4.6}$$

当 $\lambda > c_\gamma$, 且 $\gamma \geqslant 0$ 或者 $\delta = 2$ 时, 问题 (4.6) 有唯一解.

问题 (4.3) 和 (4.6) 的数值解的误差估计可参见文献 [83].

4.2 非典型微分方程的谱和拟谱方法

区域分解 Laguerre 谱和拟谱方法可以应用于很多重要的非典型微分方程的数值解. 事实上, 对此类问题, 我们必须采用区域分解方法. 我们以无限带状区域上的 Fokker-Planck 方程为例来说明无界区域分解谱方法的主要策略. 为了描述微粒的 Brown 运动, Fokker 和 Planck 最早引入该方程. 并已广泛应用于固体物理学、量子光学、化学物理学、理论生物学和电路理论中, 可参见文献 [99,100].

x 表示粒子的速度, 概率密度为 $U(x,y,t)$. 正常数 $k, \tilde{T}$ 和 m 分别是 Boltzmann 常数、绝对温度和粒子质量, $\mu = \frac{k\tilde{T}}{m}$, $\beta_0^{-1} > 0$ 是粒子弛豫时标. 我们考虑如下初边值问题:

$$\begin{cases} \partial_t U + x\partial_y U - \beta_0\partial_x(xU) & \\ \quad +y\partial_x U - \beta_0\mu\partial_x^2 U = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad |y| < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\ U(x,y,t) = 0, & x \geqslant 0, \quad y = -1 \quad \text{或} \quad x \leqslant 0, \quad y = 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\ U(x,y,t) \to 0, & \text{当 } |x| \to \infty, \quad |y| < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \\ U(x,y,0) = U_0(x,y), & x \in \mathbb{R}, \quad |y| \leqslant 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Cartling [101] 曾应用有限差分法计算问题 (4.7), Moore 和 Flaberty [102] 则应用了 Galerkin 方法. 但不管真解多么光滑, 上述方法数值解的精度是有限的. 一个感兴趣的挑战性问题是如何设计问题 (4.7) 的谱方法. 设计此类方法的主要困难来自以下几点: 第一, 此问题在 x 方向类似抛物型方程而在 y 方向上类似双曲型方程, 因此不能按常规方法处理. 第二, 对流项 $\partial_y U(x,y,t)$ 的系数在 $x=0$ 处改变符号, 从而在不同的子区域上附加不同类型的边界条件. 因此, 我们无法用单个全局逼近处理该问题. 第三, 方程 (4.7) 中的项 $\partial_x^2 U(x,y,t)$ 和 $\partial_y U(x,y,t)$ 带有不同的系数 $\beta_0\mu$ 和 x, 并且 x 的变化范围是从 $-\infty$ 到 ∞. 它们也给实际计算和数值分析增加了不少困难.

Guo 和 Wang [78] 提出了广义 Laguerre-Legendre 组合谱方法, 并由此计算问题 (4.7). 该方法的第一个关键技巧是分别在 $x<0$ 和 $x>0$ 的两个子区域上引入两种不同的广义 Laguerre-Legendre 混合拟正交逼近, 并将它们组合成整个带状区域上的组合逼近, 它保持了在 $x=0$ 处的连续性和整个区域上的全局谱精度. 为此, 令 $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \mid x < 0\}$, $\Lambda = \{y \mid |y| < 1\}$, 并将区域 Ω 剖分如下:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{(x,y) \mid x = 0, |y| \in \Lambda\}, \quad \Omega_1 = \mathbb{R}^+ \times \Lambda, \quad \Omega_2 = \mathbb{R}^- \times \Lambda.$$

相应地, 将 Ω 的边界分解成 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, 其中

$$\Gamma_1=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y=-1, \text{或 } x\leqslant 0, y=1\},$$
$$\Gamma_2=\{(x,y)\mid x<0, y=-1, \text{或 } x>0, y=1\}.$$

下面考虑子区域 Ω_1 上的混合拟正交逼近. 引入如下空间:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)=L^2(\mathbb{R}^+)\cap\{v\mid \text{在 } x=0 \text{ 处存在有限迹}\},$$
$${}_0\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)=\{v\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)\mid v(0)=0\}.$$

同第 3.2 小节一样定义 $\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+)$, 并记

$${}_0\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+)=\{\phi\in\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+)\mid \phi(0)=0\}.$$

正交投影 ${}_0\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}^+}:{}_0\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)\to{}_0\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$({}_0\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}^+}v-v,\phi)_{\mathbb{R}^+}=0,\quad \forall\,\phi\in{}_0\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+).$$

对任意的 $v\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, 令 $\tilde{v}(x)=v(x)-v(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta x}$. 于是定义拟正交投影

$$\tilde{P}_{*,N,\beta,\mathbb{R}^+}v(x)={}_0\tilde{P}_{N,\beta,\mathbb{R}^+}\tilde{v}(x)+v(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta x}.$$

进一步, 令

$$H^1_{\chi_1,\chi_0}(\mathbb{R}^+)=\{v\mid \partial_x v\in L^2_{\chi_1}(\mathbb{R}^+), v\in L^2_{\chi_0}(\mathbb{R}^+)\},$$
$${}_0H^1_{\chi_1,\chi_0}(\mathbb{R}^+)=H^1_{\chi_1,\chi_0}(\mathbb{R}^+)\cap\{v\mid v(0)=0\}.$$

记权函数 $\xi_\beta(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-\beta x}$. 辅助正交投影 ${}_0\tilde{P}^1_{N,\omega_{0,\beta},\xi_\beta,\mathbb{R}^+}:{}_0H^1_{\omega_{0,\beta},\xi_\beta}(\mathbb{R}^+)\to{}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(\partial_x({}_0\tilde{P}^1_{N,\omega_{0,\beta},\xi_\beta,\mathbb{R}^+}v-v),\partial_x\phi)_{\omega_{0,\beta},\mathbb{R}^+}+({}_0\tilde{P}^1_{N,\omega_{0,\beta},\xi_\beta,\mathbb{R}^+}v-v,\phi)_{\xi_\beta,\mathbb{R}^+}=0,\quad \forall\,\phi\in{}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^+).$$

对任意的 $v\in H^1_{1,x^2+1}(\mathbb{R}^+)$, $\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 上的拟正交投影定义如下:

$$\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}^+}v=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta x}({}_0\tilde{P}^1_{N,\omega_{0,\beta},\xi_\beta,\mathbb{R}^+}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta x}\tilde{v})+v(0)).$$

下面, 令

$${}_0\mathcal{F}(\Lambda)=L^2(\Lambda)\cap\{v\mid \text{在 } x=-1 \text{ 处存在有限迹且 } v(-1)=0\},\quad {}_0H^1(\Lambda)=H^1(\Lambda)\cap{}_0\mathcal{F}(\Lambda),$$
$${}_0\mathcal{P}_M(\Lambda)=\{\phi\in\mathcal{P}_M(\Lambda)\mid \phi(-1)=0\},\quad \mathcal{P}^0_M(\Lambda)=\{\phi\in\mathcal{P}_M(\Lambda)\mid \phi(-1)=\phi(1)=0\}.$$

正交投影 ${}_0P_{M,\Lambda}:{}_0\mathcal{F}(\Lambda)\to{}_0\mathcal{P}_M(\Lambda)$ 定义如下:

$$({}_0P_{M,\Lambda}v-v,\phi)_\Lambda=0,\quad \forall\,\phi\in{}_0\mathcal{P}_M(\Lambda).$$

正交投影 $P^{1,0}_{M,\Lambda}:H^1_0(\Lambda)\to\mathcal{P}^0_M(\Lambda)$ 定义如下:

$$(\partial_x(P^{1,0}_{M,\Lambda}v-v),\partial_x\phi)_\Lambda=0,\quad \forall\,\phi\in\mathcal{P}^0_M(\Lambda).$$

对任意的 $v \in {}_0H^1(\Lambda)$, 令

$$\tilde{v}(y) = v(y) - \frac{1}{2}(1+y)v(1) \in H_0^1(\Lambda),$$

并定义下列拟正交投影 ${}_0P^1_{*,M,\Lambda} : {}_0H^1(\Lambda) \to {}_0\mathcal{P}_M(\Lambda)$,

$${}_0P^1_{*,M,\Lambda}v(y) = P^{1,0}_{M,\Lambda}\tilde{v}(y) + \frac{1}{2}(1+y)v(1).$$

最后定义子区域 Ω_1 上的如下混合拟正交投影:

$$P_{*,M,N,\beta,\Omega_1}v = (\tilde{P}_{*,N,\beta,\mathbb{R}^+} \cdot {}_0P_{M,\Lambda})v, \quad P^1_{*,M,N,\beta,\Omega_1}v = (\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}^+} \cdot {}_0P^1_{*,M,\Lambda})v.$$

我们类似地定义子区域 Ω_2 上的混合拟正交投影 $P_{*,M,N,\beta,\Omega_2}v$ 和 $P^1_{*,M,N,\beta,\Omega_2}v$, 其中, 权函数 $\omega_{0,\beta}(x)$ 和 $\xi_\beta(x)$ 分别替换为 $\mathrm{e}^{\beta x}$ 和 $(x^2+1)\mathrm{e}^{\beta x}$. 同时, 空间 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+), {}_0\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, $\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+)$, ${}_0\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 和 ${}_0\mathcal{P}_M(\Lambda)$ 分别替换成 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^-)$, ${}^0\mathcal{F}(\mathbb{R}^-)$, $\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^-)$, ${}^0\mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^-)$ 和 ${}^0\mathcal{P}_M(\Lambda)$, 上述记号的意义是清晰的, 例如, ${}^0\mathcal{P}_M(\Lambda) = \{\phi \mid \phi \in \mathcal{P}_M(\Lambda)$ 且 $\phi(1) = 0\}$.

下面构造整个区域 Ω 上的组合拟正交投影. 令

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(\Omega) = \{v \mid v \in L^2_{x^2+1}(\Omega), \partial_x v, \partial_y v \in L^2(\Omega), v\mid_{\Gamma_1} = 0 \text{ 且 } v\mid_{\Gamma_2} \in L^2_{|x|}(\Gamma_2)\},\\
&V_{M,N}(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega) \cap \{\phi \mid \phi\mid_{\Omega_1} \in \mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^+) \otimes {}_0\mathcal{P}_M(\Lambda), \text{且 } \phi\mid_{\Omega_2} \in \mathcal{Q}_{N,0,\beta}(\mathbb{R}^-) \otimes {}^0\mathcal{P}_M(\Lambda)\}.
\end{aligned}$$

组合拟正交投影定义为

$$P_{*,M,N,\beta,\Omega}v\mid_{\Omega_j} = P_{*,M,N,\beta,\Omega_j}v, \quad P^1_{*,M,N,\beta,\Omega}v\mid_{\Omega_j} = P^1_{*,M,N,,\beta,\Omega_j}v, \quad j = 1,2.$$

可以验证 $P_{*,M,N,\beta,\Omega}v, P^1_{*,M,N,\beta,\Omega}v \in V_{M,N}(\Omega)$.

设计计算问题 (4.7) 的组合谱方法的第二个技巧是构造恰当的基函数, 使得全局数值解在两个子区域的公共部分精确吻合, 并且在获得相邻子区域公共边界上的数值解展开式系数后, 可以分别在各个子区域上并行地计算数值解展开式的其他系数. 为此, 用 $L_l(y)$ 表示 l 次 Legendre 多项式, 及

$$\begin{aligned}
&\psi^\beta_{1,l}(x) = \tilde{\mathcal{L}}^{0,\beta}_l(x) - \tilde{\mathcal{L}}^{0,\beta}_{l+1}(x), \quad \psi^\beta_{2,l}(x) = \tilde{\mathcal{L}}^{0,\beta}_l(-x) - \tilde{\mathcal{L}}^{0,\beta}_{l+1}(-x), \quad 0 \leqslant l \leqslant N-1,\\
&\eta_{1,m}(y) = L_m(y) + L_{m+1}(y), \quad \eta_{2,m}(y) = L_m(y) - L_{m+1}(y), \quad 0 \leqslant m \leqslant M-1.
\end{aligned}$$

进一步令

$$G^\beta_{1,l,m}(x,y) = \begin{cases} \psi^\beta_{1,l}(x)\eta_{1,m}(y), & (x,y) \in \Omega_1,\\ 0, & (x,y) \in \Omega_2,\end{cases}$$

$$G^\beta_{2,l,m}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \Omega_1,\\ \psi^\beta_{2,l}(x)\eta_{2,m}(y), & (x,y) \in \Omega_2,\end{cases}$$

及

$$\tilde{G}^\beta_m(x,y) = (L_m(y) - L_{m+2}(y))\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta|x|}, \quad 0 \leqslant m \leqslant M-2.$$

全体函数 $G^\beta_{j,l,m}$, $0 \leqslant l \leqslant N-1$, $0 \leqslant m \leqslant M-1$, $j = 1,2$ 和 $\tilde{G}^\beta_m$, $0 \leqslant m \leqslant M-2$ 构成了空间 $V_{M,N}(\Omega)$ 的一组基函数.

计算问题 (4.7) 的谱格式是寻找数值解 $u_{M,N}(t) \in V_{M,N}(\Omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t u_{M,N}(t), \phi)_\Omega + (x\partial_y w_{M,N}(t), \phi)_\Omega + \beta_0 (x u_{M,N}(t), \partial_x \phi)_\Omega + (y\partial_x u_{M,N}(t), \phi)_\Omega \\ \quad + \beta_0 \mu (\partial_x u_{M,N}(t), \partial_x \phi)_\Omega = 0, \quad \forall \phi \in V_{M,N}(\Omega), \quad 0 < t \leqslant T, \\ u_{M,N}(0) = P_{*,M,N,\beta,\Omega} U_0. \end{cases} . \tag{4.8}$$

在实际计算中, 我们将数值解展开为

$$u_{M,N}(x,y,t) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_{1,l,m}(t) G^\beta_{1,l,m}(x,y) + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_{2,l,m}(t) G^\beta_{2,l,m}(x,y) + \sum_{m=0}^{M-2} \tilde{a}_m(t) \tilde{G}^\beta_m(x,y).$$

Wang 和 Guo [80] 还建立了广义 Laguerre-Legendre 组合插值和计算问题 (4.7) 的拟谱方法.

4.3 外部问题的谱和拟谱方法

正如我们所知道的, 已经有很多计算外部问题的方法, 如边界元方法、D-N 方法、无限元方法、完全匹配边界层方法和人工边界方法, 具体可参见文献 [103–113]. 我们也可见 Givoli [114] 的专著与 Givoli 和 Keller [115] 的论文中关于无界区域问题的数值方法, 及 Ying [116] 关于外部问题数值方法的专著.

我们可以不借助任何人工边界条件而直接应用谱和拟谱方法计算外部问题. Coulaud 等人 [117] 建立了简单外部区域椭圆问题的 Laguerre 谱逼近. Guo 等人 [118] 应用 $\alpha = \beta = 1$ 的广义 Laguerre 逼近和 Fourier 逼近计算二维外部问题. Zhang 和 Guo [119] 应用 Laguerre- 球面调和混合逼近计算三维外部问题. Zhang 等人 [120] 研究了二维外部问题的广义 Laguerre-Fourier 混合谱和拟谱方法. 文献 [121,122] 应用广义 Laguerre 函数和球面调和函数建立了计算三维外部问题的混合谱和拟谱方法. 文献 [123, 124] 建立了 Navier-Stokes 方程外部问题的混合谱方法. 但已有的研究结果一般局限于圆形或者球形障碍物.

一个更加重要和有挑战性的问题是多边形障碍物外部问题的谱和拟谱方法. 我们通过一个模型问题来说明如何处理这类问题. 设四边形障碍物 $\Omega_0 = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, 它的边界 $\Gamma = \bigcup_{j=1}^4 \Gamma_j$, 其中

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \mid x = 1, |y| \leqslant 1\}, \quad \Gamma_2 = \{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, y = 1\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x,y) \mid x = -1, |y| \leqslant 1\}, \quad \Gamma_4 = \{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, y = -1\}.$$

令外部区域 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0$. 我们考虑如下模型问题:

$$\begin{cases} -\Delta U + \mu U = f, & (x,y) \in \Omega, \\ U = 0, & (x,y) \in \Gamma, \\ U \to 0, & \text{当 } |x| \to \infty \text{ 或者 } |y| \to \infty. \end{cases} \tag{4.9}$$

Guo 和 Wang [79] 提出了计算问题 (4.9) 的谱方法, 其数学基础是 $H_0^1(\Omega)$ 中的 Laguerre-Legendre 组合拟正交逼近, 它保持数值解的连续性和全局谱精度. 为此, 我们将无界区域 Ω 剖分成八个子区域 Ω_j, $1 \leqslant j \leqslant 8$, 见图 1.

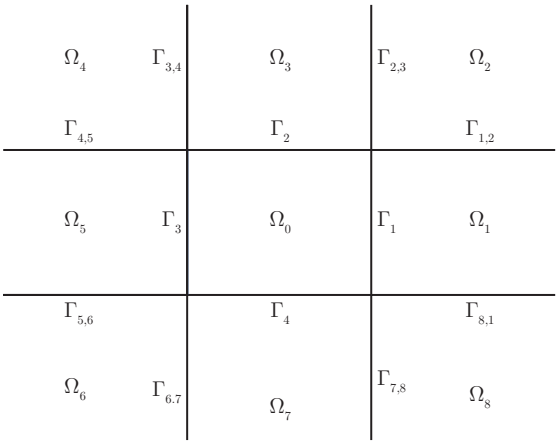

图 1　正方形障碍物外部区域

换句话说, $\Omega=\bigcup_{j=1}^{8}\Omega_j$, 其中

$$\begin{aligned}
&\Omega_1=\{(x,y)\mid 1<x<\infty,-1\leqslant y\leqslant 1\},\quad \Omega_2=\{(x,y)\mid 1<x<\infty,1<y<\infty\},\\
&\Omega_3=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,1<y<\infty\},\quad \Omega_4=\{(x,y)\mid -\infty<x<-1,1<y<\infty\},\\
&\Omega_5=\{(x,y)\mid -\infty<x<-1,-1\leqslant y\leqslant 1\},\quad \Omega_6=\{(x,y)\mid -\infty<x<-1,-\infty<y<-1\},\\
&\Omega_7=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-\infty<y<-1\},\quad \Omega_8=\{(x,y)\mid 1<x<\infty,-\infty<y<-1\}.
\end{aligned}$$

把相邻子区域 Ω_j 和 Ω_{j+1} 的公共边界记为 $\Gamma_{j,j+1}$, 且 $\Gamma_{8,9}=\Gamma_{8,1}$.

我们考虑子区域上的 Laguerre-Legendre 混合拟正交逼近. 令 $\mathbb{R}_1^+=\{x\mid 1<x<\infty\}$. $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_1^+)$ 表示全部至多 N 次的多项式集合. 进一步,

$$\begin{aligned}
&{}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_1^+)=\{\phi\mid \phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_1^+)\ \text{且}\ \phi(1)=0\},\\
&\mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_1^+)=\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta(x-1)}\phi\mid \phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_1^+)\}.
\end{aligned}$$

为简便计, 令 $\omega_\beta^1(x)=\omega_{0,\beta}(x-1)$ 并引入空间 ${}_0H^1_{\omega_\beta^1}(\mathbb{R}_1^+)=\{v\mid v\in H^1_{\omega_\beta^1}(\mathbb{R}_1^+)\ \text{且}\ v(1)=0\}$. 我们按以下方式定义辅助正交投影 ${}_0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_1^+}:{}_0H^1_{\omega_\beta^1}(\mathbb{R}_1^+)\to{}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_1^+)$,

$$(\partial_x({}_0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_1^+}v-v),\partial_x\phi)_{\omega_\beta^1,\mathbb{R}_1^+}+({}_0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_1^+}v-v,\phi)_{\omega_\beta^1,\mathbb{R}_1^+}=0,\quad \forall\,\phi\in{}_0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_1^+).$$

对任意的 $v\in H^1(\mathbb{R}_1^+)$, 令 $\tilde{v}(x)=v(x)-v(1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta(x-1)}$. 于是定义拟正交投影

$$\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_1^+}v=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta(x-1)}({}_0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_1^+}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta(x-1)}\tilde{v})+v(1))\in\mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_1^+).$$

对 $\mathbb{R}_2^+=\{y\mid 1<y<\infty\}$, 我们可以类似地定义多项式集合 $\mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_2^+)$ 和拟正交投影 $\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_2^+}v$.

下面, 令 $\mathbb{R}_3^+=\{x\mid -\infty<x<-1\}$. $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_3^+)$ 表示全部至多 N 次的多项式集合. 进一步,

$${}^0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_3^+)=\{\phi\mid \phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_3^+)\ \text{且}\ \phi(-1)=0\},\quad \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_3^+)=\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta(x+1)}\phi\mid \phi\in\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_3^+)\}.$$

令 $\omega_\beta^3(x)=\omega_{0,\beta}(-x-1)$, 并引入空间 ${}^0H^1_{\omega_\beta^3}(\mathbb{R}_3^+)=\{v\mid v\in H^1_{\omega_\beta^3}(\mathbb{R}_3^+)\ \text{且}\ v(-1)=0\}$. 定义如下辅助投影 ${}^0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_3^+}:{}^0H^1_{\omega_\beta^3}(\mathbb{R}_3^+)\to{}^0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_3^+)$,

$$(\partial_x({}^0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_3^+}v-v),\partial_x\phi)_{\omega_\beta^3,\mathbb{R}_3^+}+({}^0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_3^+}v-v,\phi)_{\omega_\beta^3,\mathbb{R}_3^+}=0,\quad \forall\,\phi\in{}^0\mathcal{P}_N(\mathbb{R}_3^+).$$

对任意的 $v \in H^1(\mathbb{R}_3^+)$, 令 $\tilde{v}(x) = v(x) - v(-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta(x+1)}$. 于是定义拟正交投影

$$\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_3^+} v = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta(x+1)}({}^0\tilde{P}^1_{N,\beta,\mathbb{R}_3^+}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta(x+1)}\tilde{v}) + v(-1)) \in \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_3^+).$$

对 $\mathbb{R}_4^+ = \{y \mid -\infty < y < -1\}$, 我们可以类似地定义多项式集合 $\mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_4^+)$ 和拟正交投影 $\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_4^+} v$.

另一方面, 令 $\Lambda_1 = \{y \mid |y| < 1\}$, 并用 $\mathcal{P}_M(\Lambda_1)$ 表示全体至多 M 次的多项式集合. $\mathcal{P}_M^0(\Lambda_1) = \mathcal{P}_M(\Lambda_1) \cap H_0^1(\Lambda_1)$. $P^{1,0}_{M,\Lambda_1} v$ 表示从 $H_0^1(\Lambda_1)$ 到 $\mathcal{P}_M^0(\Lambda_1)$ 的正交投影. 对任意的 $v \in H^1(I_1)$, 令

$$\tilde{v}(y) = v(y) - \frac{1}{2}u(1)(y+1) + \frac{1}{2}v(-1)(y-1).$$

从而定义拟正交投影

$$P^1_{*,M,\Lambda_1} v(x) = P^{1,0}_{M,\Lambda_1}\tilde{v}(y) + \frac{1}{2}v(1)(y+1) - \frac{1}{2}v(-1)(y-1).$$

对 $\Lambda_2 = \{x \mid |x| < 1\}$, 我们可以类似地定义多项式集合 $\mathcal{P}_M(\Lambda_2)$ 和拟正交投影 $P^1_{*,M,\Lambda_2} v$.

现在引入如下八个子区域上的有限维集合:

$$\begin{aligned}
&V_{M,N}(\Omega_1) = \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_1^+) \otimes \mathcal{P}_M(\Lambda_1), \quad V_{M,N}(\Omega_2) = \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_1^+) \otimes \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_2^+),\\
&V_{M,N}(\Omega_3) = \mathcal{P}_M(\Lambda_2) \otimes \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_2^+), \quad V_{N,N}(\Omega_4) = \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_3^+) \otimes \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_2^+),\\
&V_{M,N}(\Omega_5) = \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_3^+) \otimes \mathcal{P}_M(\Lambda_1), \quad V_{N,N}(\Omega_6) = \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_3^+) \otimes \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_4^+),\\
&V_{M,N}(\Omega_7) = \mathcal{P}_M(\Lambda_2) \otimes \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_4^+), \quad V_{N,N}(\Omega_8) = \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_1^+) \otimes \mathcal{Q}_{N,\beta}(\mathbb{R}_4^+).
\end{aligned}$$

这八个子区域上的拟正交投影定义如下:

$$\begin{aligned}
&P^1_{*,M,N,\beta,\Omega_1} v = (\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_1^+} \cdot P^1_{*,M,\Lambda_1})v, \quad P^1_{*,N,N,\beta,\Omega_2} v = (\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_1^+} \cdot \tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_2^+})v,\\
&P^1_{*,M,N,\beta,\Omega_3} v = (P^1_{*,M,\Lambda_2} \cdot \tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_2^+})v, \quad P^1_{*,N,N,\beta,\Omega_4} v = (\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_3^+} \cdot \tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_2^+})v,\\
&P^1_{*,M,N,\beta,\Omega_5} v = (\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_3^+} \cdot P^1_{*,M,\Lambda_1})v, \quad P^1_{*,N,N,\beta,\Omega_6} v = (\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_3^+} \cdot \tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_4^+})v,\\
&P^1_{*,M,N,\beta,\Omega_7} v = (P^1_{*,M,\Lambda_2} \cdot \tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_4^+})v, \quad P^1_{*,N,N,\beta,\Omega_8} v = (\tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_1^+} \cdot \tilde{P}^1_{*,N,\beta,\mathbb{R}_4^+})v.
\end{aligned}$$

令 $V_{M,N}(\Omega) = H_0^1(\Omega) \cap \{\phi \mid 在\ \Omega_j\ 上\ \phi \in V_{M,N}(\Omega_j), 1 \leqslant j \leqslant 8\}$, 并定义整个区域 Ω 上的组合拟正交投影

$$P^1_{*,M,N,\beta,\Omega} v(x,y) = \begin{cases} P^1_{*,M,N,\beta,\Omega_j} v(x,y), & (x,y) \in \Omega_j, \quad j = 1,3,5,7,\\ P^1_{*,N,N,\beta,\Omega_j} v(x,y), & (x,y) \in \Omega_j, \quad j = 2,4,6,8. \end{cases}$$

它保持了连续性和全局谱精度.

另外一个重要的技巧是设计两类恰当的基函数. 第一类基函数对应于子区域的内部, 对应于子区域 Ω_j 的基函数在子区域 Ω_j 的边界和其他子区域 Ω_k, $k \neq j$ 上为零. 例如, 对应于子区域 Ω_1 的基函数为

$$\phi^\beta_{1,m,l}(x,y) = \begin{cases} (\tilde{\mathcal{L}}^{0,\beta}_l(x-1) - \tilde{\mathcal{L}}^{0,\beta}_{l+1}(x-1))(L_m(y) - L_{m+2}(y)), & (x,y) \in \Omega_1,\\ 0, & 否则. \end{cases}$$

第二类基函数对应于相邻子区域的公共边界. 它在相邻子区域 Ω_j 和 Ω_{j+1} 的公共边界上不为零, 但在子区域 Ω_{j-1} 和 Ω_j 的公共边界, Ω_{j+1} 和 Ω_{j+2} 的公共边界, 以及其他子区域 Ω_k, $k \neq j, j+1$ 上都为

零. 例如, 我们对应于子区域 Ω_1 和 Ω_2 的公共边界的基函数为

$$\psi_{1,2,l}^{\beta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\tilde{\mathcal{L}}_l^{0,\beta}(x-1)-\tilde{\mathcal{L}}_{l+1}^{0,\beta}(x-1))(1+y)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta(1-y)}, & (x,y)\in\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

显然, 上述定义的基函数在相应的子区域上是多项式, 并且保证了整体连续性. 所以, 它们都属于集合 $V_{M,N}(\Omega)$.

计算问题 (4.9) 的 Laguerre-Legendre 组合谱格式是寻找数值解 $u_{M,N}\in V_{M,N}(\Omega)$, 使得

$$(\partial_x u_{M,N},\partial_x\phi)_\Omega+(\partial_y u_{M,N},\partial_y\phi)_\Omega+\mu(u_{M,N},\phi)_\Omega=(f,\phi)_\Omega,\quad\forall\,\phi\in V_{M,N}(\Omega).\tag{4.10}$$

如果在边界 Γ 上问题 (4.9) 的解 $U(x,y)=g(x,y)\not\equiv 0$, 那么可以构造一个显式函数 $\widetilde{U}(x,y)$, 使得在边界 Γ 上 $\widetilde{U}(x,y)=U(x,y)$, 并且当 $|x|\to\infty$ 或 $|y|\to\infty$ 时 $\widetilde{U}(x,y)\to 0$. 此时, 通过变量变换 $U(x,y)=W(x,y)+\widetilde{U}(x,y)$, 我们可以把原问题变换成一个定义在相应区域上的齐次边值问题, 具体可参见文献 [79].

Wang 和 Guo [81] 也提出了计算问题 (4.9) 的组合拟谱方法. Guo 和 Wang [82] 又建立了四阶外部问题的组合谱方法. 它的数学基础是对应于四阶外部问题的 Laguerre-Legendre 组合拟正交逼近.

通常的谱和拟谱方法适用于定义在矩形区域上的问题. 这个特点限制了它们的应用. 最近, 文献 [125–127] 发展了任意四边形区域和多边形区域上的谱方法、拟谱方法和谱元方法, 拓展了谱和拟谱方法的应用范围. 与此同时, Guo 和 Yu [128] 建立了多边形区域外部的二阶问题的谱元方法, 其主要技巧如下:

(1) 选取一个适当的矩形套住多边形障碍物, 并将障碍物边界和矩形边界之间的有界子区域剖分成若干个凸四边形子区域. 同时, 将剩下的无界子区域部分剖分成若干个无界角型和无界带型子区域.

(2) 分别在有界四边形子区域上采用二维 Legendre 谱元逼近, 在无界角型子区域上采用二维 Laguerre 逼近, 在无界带型子区域上采用 Laguerre-Legendre 混合逼近.

(3) 设计恰当的基函数, 它们由 Legendre 多项式、Legendre 多项式诱导出的无理函数和带比例因子的 Laguerre 函数等构成. 这样设计的基函数保证了数值解在所有相邻子区域公共边界上的连续性.

(4) 构造整个外部区域上的组合拟正交逼近, 它是各个子区域上拟正交逼近的组合, 并以此为工具推导数值解的全局谱精度.

实际问题的解可能在不同子区域上以不同方式变化或者震荡. 尤其可能在障碍物附近剧烈变化. 为了既提高数值解精度又节省计算量, 可以采用非一致多项式次数的组合拟正交逼近和非一致谱元网格剖分. 在一个相当弱的限制条件下, 此类方法在不同子区域、不同子区域边界和不同子区域顶点上以相对独立方式逼近函数. 因此, 相应的谱和谱元方法非常适用于局部网格加密和局部提高逼近多项式次数.

也存在其他类型的外部问题谱方法. 例如, Nicholls 和 Shen [129] 应用 D-N 算子和经典摄动技巧构造计算二维有界障碍物散射问题. Shen 和 Wang [130] 提出了 Helmholtz 方程外部问题的 Galerkin 谱逼近方法.

5 无界区域问题的 Jacobi 谱和拟谱方法

一类行之有效的无界区域问题数值方法基于 Jacobi 正交逼近和插值及适当的变量变换.

5.1 应用 Jacobi 逼近的谱和拟谱方法

Canuto 和 Quarteroni [131] 首次系统地研究了标准 Sobolev 空间中的 Legendre 和 Chebyshev 正交逼近和插值理论, 它们是有界矩形区域上非周期问题谱方法和拟谱方法的数学基础. Bernardi 和 Maday [2,54] 更新了一些有关的逼近结果.

对于退化问题的谱和拟谱方法, 我们需要 Jacobi 正交逼近和插值理论. 为此, 令 $\Lambda = \{x \mid |x| < 1\}$. Jacobi 权函数是

$$\chi_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \alpha, \beta > -1.$$

我们按通常方法定义加权 Sobolev 空间 $H^r_{\chi_{\alpha,\beta}}(\Lambda)$, 其范数为 $\|v\|_{r,\chi_{\alpha,\beta},\Lambda}$. 空间 $L^2_{\chi_{\alpha,\beta}}(\Lambda)$ 的内积和范数分别为 $(u,v)_{\chi_{\alpha,\beta},\Lambda}$ 和 $\|v\|_{\chi_{\alpha,\beta},\Lambda}$. 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, 我们省略记号 $\chi_{\alpha,\beta}$.

Jacobi 多项式 $J_l^{\alpha,\beta}(x)$ 的全体构成了空间 $L^2_{\chi_{\alpha,\beta}}(\Lambda)$ 中的一个完备正交系. 空间 $L^2_{\chi_{\alpha,\beta}}(\Lambda)$ 中的正交投影 $P_{N,\alpha,\beta,\Lambda} : L^2_{\chi_{\alpha,\beta}}(\Lambda) \to \mathcal{P}_N(\Lambda)$ 定义如下:

$$(P_{N,\alpha,\beta,\Lambda}v - v, \phi)_{\chi_{\alpha,\beta},\Lambda} = 0, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{P}_N(\Lambda).$$

Guo 和 Wang [132] 证明了, 若 $\partial_x^r v \in L^2_{\chi_{\alpha+r,\beta+r}}(\Lambda)$, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k(P_{N,\alpha,\beta,\Lambda}v - v)\|_{\chi_{\alpha+k,\beta+k},\Lambda} \leqslant c_{\alpha,\beta}N^{k-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{\alpha+r,\beta+r},\Lambda},$$

其中依赖于 α 和 β 的正常数 $c_{\alpha,\beta}$ 具有明显表达式.

需要指出的是, 一些学者分别独立地得到了某些特殊正交逼近 $P_{N,\alpha,\beta,\Lambda}v$ 的误差估计. Funaro [8] 考虑了 $k=0$ 时的特殊情形. Babuška 和 Guo [133,134] 得到了多维 Besov 空间中对称 Jacobi 逼近的误差估计. Guo [135,136] 则开始系统研究加权 Sobolev 空间中的一般 Jacobi 逼近, 并得到若干不同类型的逼近结果. Li 等人 [137] 也得到了一般 Jacobi 逼近的一些结果.

在许多微分方程中, 不同阶导数的系数以不同方式退化. 在这种情形下, 不可能在标准 Sobolev 空间中比较真解与数值解的误差. 因此, 宜采用非一致 Jacobi 加权的 Sobolev 空间.

下面, 设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta > -1$, 并引入空间 $H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda) = \{v \mid v$ 在 Λ 上可测且 $\|v\|_{H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)} < \infty\}$, 其中 $\|v\|_{H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)} = (\|\partial_x v\|^2_{\chi_{\alpha,\beta},\Lambda} + \|v\|^2_{\chi_{\gamma,\delta},\Lambda})^{\frac{1}{2}}$. 令

$$a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(u,v) = (\partial_x u, \partial_x v)_{\chi_{\alpha,\beta},\Lambda} + (u,v)_{\chi_{\gamma,\delta},\Lambda}, \quad \forall\, u, v \in H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda).$$

正交投影 $P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda} : H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda) \to \mathcal{P}_N(\Lambda)$ 定义如下:

$$a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v - v, \phi) = 0, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{P}_N(\Lambda).$$

若 $v \in H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)$, $\partial_x^r v \in L^2_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1}}(\Lambda)$, $\alpha \leqslant \gamma+2$, $\beta \leqslant \delta+2$, 且整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v - v\|_{H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)} \leqslant c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}N^{1-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1},\Lambda}.$$

特别地, 当 $\alpha \leqslant \gamma+1$ 和 $\beta \leqslant \delta+1$ 时,

$$\|P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v - v\|_{\chi_{\gamma,\delta},\Lambda} \leqslant c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}N^{-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1},\Lambda}.$$

为了逼近在一个端点上为零的函数, 我们需要另外的正交投影. 令

$${}_0H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda) = \{v \in H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda) \mid v(-1) = 0\},$$

$$ {}_0\mathcal{P}_N(\Lambda)=\{\phi\in\mathcal{P}_N(\Lambda)\mid\phi(-1)=0\}. $$

正交投影 ${}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}$: ${}_0H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)\to{}_0\mathcal{P}_N(\Lambda)$ 定义如下:

$$ a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}({}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v-v,\phi)=0,\quad\forall\,\phi\in{}_0\mathcal{P}_N(\Lambda). $$

若 $v\in{}_0H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)$, $\partial_x^r v\in L^2_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1}}(\Lambda)$, $\alpha\leqslant\gamma+2$, $\beta\leqslant 0$, $\delta\geqslant 0$, 或者 $\alpha\leqslant\gamma+1$, $\beta\leqslant\delta+2$, $0<\alpha<1$, $\beta\geqslant 1$, 且整数 $1\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$ \|\,{}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v-v\|_{H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)}\leqslant c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}N^{1-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1},\Lambda}. $$

特别地, 当 $\alpha\leqslant\gamma+1$ 和 $\beta\leqslant\delta+1$ 时,

$$ \|\,{}_0P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v-v\|_{\chi_{\gamma,\delta},\Lambda}\leqslant c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}N^{-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1},\Lambda}. $$

在研究带固定不滑动边界的流体运动、带致死边界条件的蚜虫生长规律和其他领域中的某些问题时需要考虑齐次边界条件. 为此引入空间

$$ \begin{aligned}&H^1_{0,\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)=\{v\in H_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)\mid v(-1)=v(1)=0\},\\&\mathcal{P}^0_N(\Lambda)=\{\phi\mid\phi\in{}_0\mathcal{P}_N(\Lambda)\text{ 且 }\phi(1)=0\}.\end{aligned} $$

正交投影 $P^{1,0}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}:H^1_{0,\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)\to\mathcal{P}^0_N(\Lambda)$ 定义如下:

$$ a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(P^{1,0}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v-v,\phi)=0,\quad\forall\,\phi\in\mathcal{P}^0_N(\Lambda). $$

若 $v\in H^1_{0,\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)$, $\partial_x^r v\in L^2_{\chi_{\alpha+r-2,\beta+r-2}}(\Lambda)$, $\gamma\leqslant\alpha\leqslant\gamma+1$, $\delta\leqslant\beta\leqslant\delta+1$ 和 $\gamma,\delta<1$, 则对整数 $1\leqslant r\leqslant N+1$, 有 $\|P^{1,0}_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\Lambda}v-v\|_{H^1_{\chi_{\alpha,\beta},\chi_{\gamma,\delta}}(\Lambda)}\leqslant c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}N^{1-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{\alpha+r-2,\beta+r-2},\Lambda}$.

下面考虑 Jacobi 插值. 用 $\zeta^{\alpha,\beta}_{G,N,j},\zeta^{\alpha,\beta}_{R,N,j}$ 和 $\zeta^{\alpha,\beta}_{L,N,j}$, $0\leqslant j\leqslant N$ 分别表示 $J^{\alpha,\beta}_{N+1}(x)$, $xJ^{\alpha,\beta+1}_N(x)$ 和 $(1-x^2)\times J^{\alpha+1,\beta+1}_{N-1}(x)$ 的零点. 对任意 $v\in C(\bar\Lambda)$, Jacobi-Gauss 型插值 $I_{Z,N,\alpha,\beta,\Lambda}v\in\mathcal{P}_N(\Lambda)$ 定义如下:

$$ I_{Z,N,\alpha,\beta,\Lambda}v(\zeta^{\alpha,\beta}_{Z,N,j})=v(\zeta^{\alpha,\beta}_{Z,N,j}),\quad Z=G,R,L. $$

它们分别称为 Jacobi-Gauss 插值、Jacobi-Radau 插值和 Jacobi-Lobatto 插值. 若 $\partial_x^r v\in L^2_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1}}(\Lambda)$, 且整数 $1\leqslant r\leqslant N+1$, 则

$$ \|I_{Z,N,\alpha,\beta,\Lambda}v-v\|_{\chi_{\alpha,\beta},\Lambda}\leqslant c_{\alpha,\beta}N^{-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{\alpha+r-1,\beta+r-1},\Lambda},\quad Z=G,R,L. $$

同样存在对 $\|\partial_x(I_{Z,N,\alpha,\beta}v-v)\|_{\chi^{(\alpha,\beta)},\Lambda}$, $Z=G,R,L$ 的估计, 可参见文献 [132]. 然而, 文献 [132] 中的某些结果并不是最优的. 后来, Guo 和 Zhang [138] 证明了, 若 $v\in H^1(\Lambda)$, $\partial_x^r v\in L^2_{\chi_{r-1,r-1}}(\Lambda)$, 且整数 $r\geqslant 1$, 则 $\|\partial_x(I_{L,N,0,0}v-v)\|_\Lambda\leqslant cN^{1-r}\|\partial_x^r v\|_{\chi_{r-1,r-1},\Lambda}$. 从而改进了文献 [2,132,139] 中的相应结果. 顺便提一下, 上述结论的证明过程还萌发了 Jacobi 拟正交逼近的思想. 前段中的结果已被推广到广义 Jacobi 拟正交逼近和插值理论, 具体可参见文献 [73].

下面介绍无界区域上的 Jacobi 谱和拟谱方法. 我们以全直线上非线性 Klein-Gordon 方程为例,

$$ \begin{cases}\partial_t^2V+V^3-\partial_y^2V=g, & -\infty<y<\infty,\quad 0<t\leqslant T,\\ \mathrm{e}^{-\frac12|y|}\partial_yV(y,t)\to 0, & \text{当 }|y|\to\infty,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ \partial_tV(y,0)=V_1(y), & -\infty<y<\infty,\\ V(y,0)=V_0(y), & -\infty<y<\infty.\end{cases} \tag{5.1} $$

我们采用如下变量变换:

$$y=\ln\frac{1+x}{1-x},\quad U(x,t)=V(y,t),\quad U_1(x)=V_1(y),\quad U_0(x)=V_0(y),\quad f(x,t)=g(y,t).$$

于是, 问题 (5.1) 变换成

$$\begin{cases}\partial_t^2U+U^3-\dfrac{1}{4}(1-x^2)\partial_x((1-x^2)\partial_xU)=f, & x\in\Lambda,\quad 0<t\leqslant T,\\ (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\partial_xU(x,t)\to 0, & \text{当 } |x|\to 1,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ \partial_tU(x,0)=U_1(x), & x\in\Lambda,\\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\Lambda.\end{cases}\tag{5.2}$$

计算问题 (5.2) 的 Jacobi 谱格式是寻找数值解 $u_N(t)\in\mathcal{P}_N(\Lambda)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 使得 (参见文献 [140])

$$\begin{cases}(\partial_t^2u_N(t)+u_N^3(t),\phi)_\Lambda-\dfrac{1}{4}((1-x^2)\partial_xu_N(t),\partial_x((1-x^2)\phi))_\Lambda=(f(t),\phi)_\Lambda,\quad \forall\,\phi\in\mathcal{P}_N(\Lambda),\quad 0<t\leqslant T,\\ \partial_tu_N(0)=P_{N,0,0,\Lambda}U_1 \text{ 或 } P^1_{N,2,2,0,0,\Lambda}U_1,\\ u_N(0)=P_{N,0,0,\Lambda}U_0 \text{ 或 } P^1_{N,2,2,0,0,\Lambda}U_0.\end{cases}$$

又考虑半直线上非线性 Klein-Gordon 方程

$$\begin{cases}\partial_t^2V+V^3-\partial_y^2V=g, & 0<y<\infty,\quad 0<t\leqslant T,\\ V(0,t)=\lim\limits_{y\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}y}\partial_yV(y,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ \partial_tV(y,0)=V_1(y), & 0<y<\infty,\\ V(y,0)=V_0(y), & 0<y<\infty.\end{cases}\tag{5.3}$$

我们采用如下变量变换:

$$y=-2\ln(1-x)+2\ln 2,\quad U(x,t)=V(y,t),\quad U_1(x)=V_1(y),\quad U_0(x)=V_0(y),\quad f(x,t)=g(y,t).$$

于是, 问题 (5.3) 变换成

$$\begin{cases}\partial_t^2U+U^3-\dfrac{1}{4}(1-x)\partial_x((1-x)\partial_xU)=f, & x\in\Lambda,\quad 0<t\leqslant T,\\ U(-1,t)=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\partial_xU(x,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ \partial_tU(x,0)=U_1(x), & x\in\Lambda,\\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\Lambda.\end{cases}\tag{5.4}$$

计算问题 (5.4) 的 Jacobi 谱格式是寻找数值解 $u_N(t)\in{}_0\mathcal{P}_N(\Lambda)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 使得 (参见文献 [141])

$$\begin{cases}(\partial_t^2u_N(t)+u_N^3(t),\phi)_\Lambda+\dfrac{1}{4}((1-x)\partial_xu_N(t),\partial_x((1-x)\phi))_\Lambda=(f(t),\phi)_\Lambda,\quad \forall\,\phi\in\mathcal{P}_N(\Lambda),\quad 0<t\leqslant T,\\ \partial_tu_N(0)=P_{N,0,0,\Lambda}U_1 \text{ 或 } P^1_{N,2,0,0,0,\Lambda}U_1,\\ u_N(0)=P_{N,0,0,\Lambda}U_0 \text{ 或 } P^1_{N,2,0,0,0,\Lambda}U_0.\end{cases}$$

即使真解随着 $|y|$ 增长而快速增长, 上述两个谱格式也都提供良好的数值效果.

如果真解随着 $|y|$ 增长而衰减到零, 那么, 我们设计另外类型的 Jacobi 谱格式. 例如, 令 $\eta(x)=(1-x^2)^{-1}$, 并将全直线上的非线性 Klein-Gordon 方程改写为

$$\eta\partial_t^2U+\eta U^3-\frac{1}{4}\partial_x((1-x^2)\partial_xU)=\eta f.$$

此时, 我们应用 $\alpha=\beta=1$ 和 $\gamma=\delta=0$ 的 Jacobi 谱方法, 参见文献 [142].

类似地, 令 $\eta(x)=(1-x)^{-1}$, 并将半直线上的非线性 Klein-Gordon 方程改写为

$$\eta\partial_t^2U+\eta U^3-\frac{1}{4}\partial_x((1-x)\partial_xU)=\eta f.$$

此时可应用 $\alpha=1$ 和 $\beta=\gamma=\delta=0$ 的 Jacobi 谱方法, 参见文献 [143].

上述方法已推广到一些多维无界区域问题, 可参见文献 [144]. 此外, Grosch 和 Orszag [145] 采用了代数变换 $x=\frac{2y}{\delta+y}-1$ 和指数变换 $x=1-2\mathrm{e}^{-\frac{y}{\delta}}$, 其中 $\delta>0$, 并据此设计了无穷区间 $0\leqslant y<\infty$ 上的有限差分方法. 我们也可以通过这类变量变换构造半直线上的 Jacobi 谱和拟谱方法.

5.2 Legendre 和 Chebyshev 无理谱和拟谱方法

另外一类无界区域上的重要数值方法是无理谱和拟谱方法, 通常也称为有理谱和拟谱方法. 文献 [146–149] 构造了由 Chebyshev 多项式诱导的无界区间上的无理谱方法. 文献 [150–156] 系统地建立了无理谱和拟谱方法的理论, 并提出许多新方法. 文献 [157,158] 也应用了无理谱和拟谱方法.

在早期的研究工作中, 通常考虑由 Legendre 和 Chebyshev 多项式诱导的无理函数. 令权函数 $\eta(x)=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$, 并按通常方式定义加权 Sobolev 空间 $H_\eta^r(\mathbb{R})$ 及其范数为 $\|v\|_{r,\eta,\mathbb{R}}$. 空间 $L_\eta^2(\mathbb{R})$ 的内积和范数分别记为 $(u,v)_{\eta,\mathbb{R}}$ 和 $\|v\|_{\eta,\mathbb{R}}$.

定义如下 Legendre 无理函数:

$$R_l(x)=L_l\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right),\quad l\geqslant 0.$$

它们构成了一个 $L_\eta^2(\mathbb{R})$ 中的完备正交系. 令 $\mathcal{Q}_N(\mathbb{R})=\mathrm{span}\{R_l,0\leqslant l\leqslant N\}$. 空间 $L_\eta^2(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $P_{N,\eta,\mathbb{R}}:L_\eta^2(\mathbb{R})\to\mathcal{Q}_N(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(P_{N,\eta,\mathbb{R}}v-v,\phi)_{\eta,\mathbb{R}}=0,\quad\forall\,\phi\in\mathcal{Q}_N(\mathbb{R}).$$

Guo 和 Wang [154] 证明了, 当整数 $0\leqslant r\leqslant N+1$ 时,

$$\|P_{N,\eta,\mathbb{R}}v-v\|_{\eta,\mathbb{R}}\leqslant cN^{-r}\left(\sum_{k=0}^{r}\|(x^2+1)^{\frac{r+k}{2}}\partial_x^kv\|_{\eta,\mathbb{R}}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中假定出现在上述不等式右端的范数是有界的.

在设计和分析 Legendre 无理谱方法时, 我们需要 $H_\eta^1(\mathbb{R})$ 中的正交投影 $P_{N,\eta,\mathbb{R}}^1:H_\eta^1(\mathbb{R})\to\mathcal{Q}_N(\mathbb{R})$, 它的定义如下:

$$(\partial_x(P_{N,\eta,\mathbb{R}}^1v-v),\partial_x\phi)_{\eta,\mathbb{R}}=0,\quad\forall\,\phi\in\mathcal{Q}_N(\mathbb{R}).$$

可以应用 Jacobi 逼近的结果证明, 当整数 $1\leqslant r\leqslant N+1$ 时,

$$\|P_{N,\eta,\mathbb{R}}^1v-v\|_{H_\eta^1(\mathbb{R})}\leqslant cN^{1-r}\left(\sum_{j=0}^{r}\|(x^2+1)^{\frac{r+j-1}{2}}\partial_x^jv\|_{\eta,\mathbb{R}}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中假定出现上述不等式右端的范数是有界的.

下面考虑 Legendre 无理插值. 用 $\zeta_{N,j}^{\eta}$ 表示 $R_{N+1}(x)$ 的零点, 对应的 Christoffel 数为 $w_{N,j}^{\eta}$, $0 \leqslant j \leqslant N$. 我们引人如下离散内积:

$$(u,v)_{\eta,\mathbb{R},N} = \sum_{j=0}^{N} u(\zeta_{N,j}^{\eta}) v(\zeta_{N,j}^{\eta}) w_{N,j}^{\eta}.$$

对任意的 $v \in C(\mathbb{R})$, Legendre-Gauss 型无理插值 $I_{N,\eta,\mathbb{R}} v \in \mathcal{Q}_N(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$I_{N,\eta,\mathbb{R}} v(\zeta_{N,j}^{\eta}) = v(\zeta_{N,j}^{\eta}), \quad 0 \leqslant j \leqslant N.$$

若出现在下面不等式右端的范数是有界的, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r$, 则

$$\|I_{N,\eta,\mathbb{R}} v - v\|_{k,\eta,\mathbb{R}} \leqslant c N^{2k-r} \left(\sum_{j=0}^{r} \|(x^2+1)^{\frac{r+j}{2}} \partial_x^j v\|_{\eta,\mathbb{R}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

作为一个例子, 我们考虑全直线区域上的 Klein-Gordon 方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 U + U + U^3 - \partial_x^2 U = f, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T, \\ x^{-2} U(x,t) \to 0, & \text{当 } |x| \to \infty, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \partial_t U(x,0) = U_1(x), & x \in \mathbb{R}, \\ U(x,0) = U_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.5}$$

计算问题 (5.5) 的 Legendre 无理谱格式是寻找数值解 $u_N(t) \in \mathcal{Q}_N(\mathbb{R})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t^2 u_N(t) + u_N(t) + u_N^3(t), \phi)_{\eta,\mathbb{R}} + (\partial_x u_N(t), \partial_x(\phi\eta))_{\mathbb{R}} = (f(t), \phi)_{\eta,\mathbb{R}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{Q}_N(\mathbb{R}), \quad 0 < t \leqslant T, \\ \partial_t u_N(0) = P_{N,\eta,\mathbb{R}} U_1, \\ u_N(0) = P_{N,\eta,\mathbb{R}} U_0. \end{cases}$$

计算问题 (5.5) 的 Legendre 无理拟谱格式是寻找数值解 $u_N(t) \in \mathcal{Q}_{N-2}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t^2 u_N(t) + u_N(t) + u_N^3(t), \phi)_{\eta,\mathbb{R},N} - (\partial_x^2 u_N(t), \phi)_{\eta,\mathbb{R},N} = (f(t), \phi)_{\eta,\mathbb{R},N}, \quad \forall \phi \in \mathcal{Q}_{N-2}(\mathbb{R}), \quad 0 < t \leqslant T, \\ \partial_t u_N(0) = I_{N-2,\eta} U_1, \\ u_N(0) = I_{N-2,\eta} U_0. \end{cases}$$

上述两个格式的细节可以在文献 [159] 中找到. 需要指出的是, 前面的第二个格式并不是通常意义下的拟谱格式. 实际上是将问题 (5.5) 弱形式中的内积替换成对应的离散内积.

对于半直线上的 Legendre 无理谱和拟谱方法, 我们采用权函数为

$$\bar{\eta}(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

和无理基函数

$$\bar{R}_l(x) = \sqrt{2} L_l\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \quad l \geqslant 0,$$

它们构成了空间 $L_{\bar{\eta}}^2(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系, 具体可参见文献 [151].

当我们将上述方法应用到双曲系统或者具有守恒律的非线性波动方程时, 计算格式中的权函数往往会破坏数值解的守恒性质. 文献 [150,156] 应用基函数 $\eta^{\frac{1}{2}}(x)R_l(x)$ 和 $\bar{\eta}^{\frac{1}{2}}(x)\bar{R}_l(x)$, $l \geqslant 0$, 从而修正了 Legendre 无理谱和拟谱方法. 这两类基函数分别构成了空间 $L^2(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R}^+)$ 中的正交系, 因此, 相应的数值解也保持守恒性质. Wang 和 Guo [160] 也设计了 Legendre- 修正 Legendre 混合无理谱方法, 并应用于无限带状区域上不可压缩流体的数值模拟.

可以由 Chebyshev 多项式 $T_l(x)$, $l \geqslant 0$ 诱导出无理逼近的基函数. 令权函数

$$\eta(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

和无理基函数

$$R_l(x) = T_l\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right), \quad l \geqslant 0.$$

它们构成了空间 $L^2_\eta(\mathbb{R})$ 中的完备正交系.

类似地, 可以选取权函数

$$\bar{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$$

和无理基函数

$$\bar{R}_l(x) = T_l\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \quad l \geqslant 0,$$

它们构成了空间 $L^2_{\bar{\eta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系.

Chebyshev 无理谱和拟谱方法也成功应用于许多全直线区域上问题的数值模拟, 参见文献 [155]. 对应的半直线上的数值方法可参见文献 [152]. 在实际计算中, 可以采用快速 Fourier 变换 (FFT). 文献 [153] 还提出了修正的 Chebyshev 无理谱和拟谱方法, 它的基函数是定义在全直线上的无理函数 $\bar{\eta}^{\frac{1}{2}}(x)\bar{R}_l(x)$, $l \geqslant 0$. 此时, 数值解能保持真解的某些守恒性质. 但至今尚无半直线上保持守恒律的修正 Chebyshev 无理谱和拟谱方法.

5.3 Jacobi 无理谱方法

不同微分方程的解在无穷远处有不同的渐近性态. 即使对同一个解, 它在 $x \to -\infty$ 时的性态也可能与 $x \to \infty$ 时的性态不一样, 如量子物理学中的扭子孤立子和生态学中的异宿波. 第 5.2 小节中的无理基函数对固定的权函数互相正交, 而权函数则由诱导出它们的 Legendre 多项式或者 Chebyshev 多项式所确定. 这个特点限制了它们的应用范围. 为了克服这个缺陷, Wang 和 Guo [161] 构造了由标准 Jacobi 多项式诱导的在半直线上正交的无理基函数, 并将相应的谱方法应用于经济数学中某些数学模型的数值模拟. 最近, Guo 等人[97,98] 提出了广义 Jacobi 正交逼近; Sun 和 Guo [162] 考虑了多维区域上相应的正交逼近和插值, 并在这些新结果的基础上建立一类有效的有界区域上的新谱和拟谱方法. 文献 [163,164] 建立了拟合无穷远处真解渐近行为的广义 Jacobi 无理谱方法, 从而拓宽了无理谱方法的应用范围.

用 $[\alpha]$ 表示不大于 α 的最大整数. 当 $\alpha \leqslant -1$ 时, 令 $\hat{\alpha} = \bar{\alpha} = -\alpha$, 否则 $\hat{\alpha} = 0, \bar{\alpha} = \alpha$. 记号 $\hat{\beta}, \bar{\beta}$ 和 $[\beta]$ 具有类似的含义. 令 $\bar{l}_{\alpha,\beta} = [\hat{\alpha}] + [\hat{\beta}]$, 广义 Jacobi 函数为

$$\bar{J}_l^{\alpha,\beta}(x) = \chi_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}(x) J^{\bar{\alpha},\bar{\beta}}_{l-\bar{l}_{\alpha,\beta}}(x), \quad l \geqslant \bar{l}_{\alpha,\beta}.$$

它们构成了 $L^2_{\chi_{\alpha,\beta}}(\Lambda)$ 中的完备正交系.

整个直线上的广义 Jacobi 无理函数如下:

$$R_l^{\alpha,\beta}(x)=\bar{J}_l^{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right),\quad l\geqslant \bar{l}_{\alpha,\beta}.$$

设权函数 $\eta_{\alpha,\beta}(x)=(\sqrt{x^2+1}+x)^{\beta-\alpha}(x^2+1)^{\frac{-\alpha-\beta-3}{2}}$. 所有的 $R_l^{\alpha,\beta}(x)$ 构成了 $L^2_{\eta_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R})$ 中的一个完备正交系. 令

$$\mathcal{V}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R})=\mathrm{span}\{R_l^{\alpha,\beta}(x),\bar{l}_{\alpha,\beta}\leqslant l\leqslant N\}.$$

正交投影 $P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}}:L^2_{\eta_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R})\to\mathcal{V}_{N,\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ 定义如下:

$$(P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}}v-v,\phi)_{\eta_{\alpha,\beta},\mathbb{R}}=0,\quad \forall\,\phi\in\mathcal{V}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}).$$

为了估计逼近误差, 我们引入空间 $H^r_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})$, 其半范数和范数如下:

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{H^0_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})}=\|v\|_{\eta_{\alpha,\beta},\mathbb{R}},\\
&|v|_{H^1_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})}=\|(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\partial_x v\|_{\eta_{\alpha+1,\beta+1},\mathbb{R}},\\
&|v|_{H^k_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})}=|(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\partial_x v|_{H^{k-1}_{\eta_{\alpha+1,\beta+1},A}(\mathbb{R})},\quad k\geqslant 2,\\
&\|v\|_{H^r_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})}=\left(\sum_{k=0}^{r}|v|^2_{H^k_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

用 $\mathbb{N}^-$ 表示所有负整数的集合. 如果至少满足下面的条件之一,

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\,\alpha,\beta>-1,\quad \text{(ii)}\,\alpha>-1,\ \beta\leqslant -r-1\ \text{或}\ \beta\in\mathbb{N}^-,\\
&\text{(iii)}\,\alpha\leqslant -r-1\ \text{或}\ \alpha\in\mathbb{N}^-,\ \beta>-1,\quad \text{(iv)}\,\alpha,\beta\leqslant -r-1\ \text{或}\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}^-,
\end{aligned}\tag{5.6}$$

则对任意的 $v\in H^r_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})$, 及整数 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant N+1$,

$$\|P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}}v-v\|_{H^k_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})}\leqslant cN^{k-r}|v|_{H^r_{\eta_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R})}.$$

为了数值求解微分方程, 我们需要其他类型的投影. 为此, 引入空间 $H^1_{\eta_{\alpha,\beta},\eta_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R})$, 其范数为

$$\|v\|_{H^1_{\eta_{\alpha,\beta},\eta_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R})}=(\|\partial_x v\|^2_{\eta_{\alpha,\beta},\mathbb{R}}+\|v\|^2_{\eta_{\gamma,\delta},\mathbb{R}})^{\frac{1}{2}}.$$

用 Λ 表示第 5.1 小节中的有限区间, 且

$$\mathcal{V}_N^*(\mathbb{R})=\left\{\phi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\ \middle|\ \phi\in\mathcal{P}_N(\Lambda)\right\}.$$

若 $\alpha,\beta>-1$, 则 $\mathcal{V}_N^*(\mathbb{R})=\mathcal{V}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R})$.

存在多种针对具体问题的其他投影. 例如, 当 $\alpha,\beta>-4$ 和 $\gamma,\delta>-1$ 时, 我们定义正交投影 $P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}}:H^1_{\eta_{\alpha,\beta},\eta_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R})\to\mathcal{V}_N^*(\mathbb{R})$ 如下:

$$(\partial_x(P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}}v-v),\partial_x\phi)_{\eta_{\alpha,\beta},\mathbb{R}}+(P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}}v-v,\phi)_{\eta_{\gamma,\delta},\mathbb{R}}=0,\quad \forall\,\phi\in\mathcal{V}_N^*(\mathbb{R}).$$

设 $\sigma,\theta\leqslant 3$. 如果 $0<\alpha+\sigma\leqslant\gamma+2$, $0<\beta+\theta\leqslant\delta+2$ 及 $\gamma,\delta>-1$, 那么对任意的 $v\in H^1_{\eta_{\alpha,\beta},\eta_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R})\cap H^r_{\eta_{\alpha+\sigma-1,\beta+\theta-1},A}(\mathbb{R})$ 和整数 $1\leqslant r\leqslant N+1$,

$$\|P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}}v-v\|_{H^1_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\mathbb{R})}\leqslant cN^{1-r}|v|_{H^r_{\eta_{\alpha+\sigma-1,\beta+\theta-1},A}(\mathbb{R})}.$$

特别地, 当 $\alpha \leqslant \gamma+\sigma-5$ 和 $\beta \leqslant \delta+\theta-5$ 时,

$$\|P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}}v-v\|_{\eta_{\gamma,\delta},\mathbb{R}} \leqslant cN^{-r}|v|_{H^r_{\eta_{\alpha+\sigma-1,\beta+\theta-1},A}(\mathbb{R})}.$$

对在无穷远处衰减为零的函数, 我们需要其他类型的正交投影.

作为一个例子, 我们考虑如下 sine-Gordon 方程:

$$\begin{cases} \partial_t^2 U-\partial_x^2 U+\sin U=f, & x\in\mathbb{R}, \quad 0<t\leqslant T, \\ \partial_t U(x,0)=U_1(x), & x\in\mathbb{R}, \\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.7}$$

$U(x,t)$ 在无穷远处满足某些边界条件.

当 $f(x,t)\equiv 0$ 时, sine-Gordon 方程中有孤立子解, 例如,

$$U(x,t)=4\tan^{-1}(\mathrm{e}^{\frac{b(x-at)}{\sqrt{1-a^2}}}), \quad |a|<1, \quad b=\pm 1. \tag{5.8}$$

若 $b=1$, 则当 $x\to\infty$ 时 $U(x,t)\to 2\pi$, 并当 $x\to-\infty$ 时 $U(x,t)\to 0$. 若 $b=-1$, 则 $x\to\infty$ 时 $U(x,t)\to 0$, 并当 $x\to-\infty$ 时 $U(x,t)\to 2\pi$. 当 $f(x,t)\equiv 0$ 时, sine-Gordon 方程也具有孤立子碰撞解, 例如,

$$U(x,t)=4\tan^{-1}\left(\frac{a\sinh(\frac{x}{\sqrt{1-a^2}})}{\cosh(\frac{at}{\sqrt{1-a^2}})}\right), \quad |a|<1, \quad a\neq 0. \tag{5.9}$$

当 $x\to\infty$ 时 $U(x,t)\to 2\pi\mathrm{sgn}(a)$, 而 $x\to-\infty$ 时 $U(x,t)\to -2\pi\mathrm{sgn}(a)$. 另一个描述孤立子 - 反孤立子碰撞的解为

$$U(x,t)=4\tan^{-1}\left(\frac{\sinh(\frac{at}{\sqrt{1-a^2}})}{a\cosh(\frac{x}{\sqrt{1-a^2}})}\right), \quad |a|<1, \quad a\neq 0, \tag{5.10}$$

当 $|x|\to\infty$ 时 $U(x,t)\to 0$.

问题 (5.7) 的恰当弱形式依赖于在无穷远处的边界条件. 例如, 我们考虑问题 (5.7) 的具有类似 (5.9) 的渐近行为的解. 换句话说, 当 $|x|\to\infty$ 时 $U(x,t)$ 不趋向于 0. 但 $|U(x,t)|$ 和 $|\partial_x U(x,t)|$ 是一致有界的. 在这种情形下, 为了简单计, 令 $\alpha=\beta=\gamma=\delta>-1$ 和 $w_\lambda(x)=(x^2+1)^{\frac{\lambda}{2}}$, 其中 $\lambda=-2\alpha-3<-1$. 因此, $w_\lambda(x)=\eta_{\alpha,\beta}(x)=\eta_{\gamma,\delta}(x)$. 此时问题 (5.7) 的弱形式是寻找解 $U\in L^\infty(0,T;H^1_{w_\lambda}(\Lambda))\cap W^{1,\infty}(0,T;L^2_{w_\lambda}(\Lambda))$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t^2 U(t),v)_{w_\lambda,\mathbb{R}}+(\partial_x U(t),\partial_x(vw_\lambda))_{\mathbb{R}} \\ \quad +(\sin U(t),v)_{w_\lambda,\mathbb{R}}=(f(t),v)_{w_\lambda,\mathbb{R}}, & \forall\, v\in H^1_{w_\lambda}(\Lambda), \quad 0<t\leqslant T, \\ \partial_t U(x,0)=U_1(x), & x\in\mathbb{R}, \\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.11}$$

如果 $U_0\in H^1_{w_\lambda}(\mathbb{R}), U_1\in L^2_{w_\lambda}(\mathbb{R})$ 和 $f\in L^2(0,T;L^2_{w_\lambda}(\mathbb{R}))$, 那么, 问题 (5.11) 有唯一解.

计算问题 (5.11) 的谱格式是寻找数值解 $u_N(t)\in\mathcal{V}_{N,\gamma,\gamma}(\mathbb{R})$, $0\leqslant t\leqslant T$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t^2 u_N(t),\phi)_{w_\lambda,\mathbb{R}}+(\partial_x u_N(t),\partial_x(\phi w_\lambda))_{\mathbb{R}}+(\sin u_N(t),\phi)_{w_\lambda,\mathbb{R}} \\ \quad =(f(t),\phi)_{w_\lambda,\mathbb{R}}, \quad \forall\,\phi\in\mathcal{V}_{N,\gamma,\gamma}(\mathbb{R}), \quad 0<t\leqslant T, \\ \partial_t u_N(0)=P_{N,\gamma,\gamma,\mathbb{R}}U_1, \\ u_N(0)=P^1_{N,\gamma,\gamma,\gamma,\gamma,\mathbb{R}}U_0. \end{cases}$$

当问题 (5.7) 的边界条件类似于 (5.8) 或 (5.10) 所表达的解的渐近行为时, 问题 (5.7) 的弱形式以及相应的谱格式可参见文献 [163]. 他们也考虑了全直线上在无穷远处具有不同渐近行为的 Klein-Gordon 方程和 Fisher 方程的无理谱格式.

半直线上的广义 Jacobi 无理函数如下:

$$\bar{R}_l^{\alpha,\beta}(x) = \bar{J}_l^{\alpha,\beta}\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \quad l \geqslant \bar{l}_{\alpha,\beta}.$$

设权函数 $\bar{\eta}_{\alpha,\beta}(x) = x^\beta(x+1)^{-\alpha-\beta-2}$. 所有 $\bar{R}_l^{\alpha,\beta}(x)$ 构成了 $L^2_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系. 令

$$\bar{\mathcal{V}}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) = \mathrm{span}\{\bar{R}_l^{\alpha,\beta}(x), \bar{l}_{\alpha,\beta} \leqslant l \leqslant N\}.$$

正交投影 $P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+} : L^2_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta}}(\mathcal{R}^+) \to \bar{\mathcal{V}}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(P_{N,\alpha,\beta,\mathcal{R}^+}v - v, \phi)_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\, \phi \in \bar{\mathcal{V}}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+).$$

引入空间 $H^r_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$, 其半范数和范数为

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{H^0_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)} = \|v\|_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+},\\
&|v|_{H^1_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)} = \|(x+1)^2\partial_x v\|_{\bar{\eta}_{\alpha+1,\beta+1},\mathbb{R}^+},\\
&|v|_{H^k_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)} = |(x+1)^2\partial_x v|_{H^{k-1}_{\bar{\eta}_{\alpha+1,\beta+1},A}(\mathbb{R}^+)}, \quad k \geqslant 2,\\
&\|v\|_{H^r_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)} = \left(\sum_{k=0}^{r} |v|^2_{H^k_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

如果至少满足 (5.6) 中的条件之一, 则对任意的 $v \in H^r_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)$ 和整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$,

$$\|P_{N,\alpha,\beta,\mathbb{R}^+}v - v\|_{H^k_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)} \leqslant cN^{k-r}|v|_{H^r_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},A}(\mathbb{R}^+)}.$$

为了数值求解微分方程, 我们需要其他类型的投影. 引入空间 $H^1_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$, 其范数为

$$\|v\|_{H^1_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)} = (\|\partial_x v\|^2_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} + \|v\|^2_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+})^{\frac{1}{2}}.$$

又令

$$\bar{\mathcal{V}}_N^*(\mathbb{R}) = \left\{\phi\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \,\middle|\, \phi \in \mathcal{P}_N(\Lambda)\right\}.$$

当 $\alpha, \beta > -1$, $\bar{\mathcal{V}}_N^*(\mathbb{R}) = \bar{\mathcal{V}}_{N,\alpha,\beta}(\mathbb{R})$.

存在多种针对具体问题的其他投影. 例如, 当 $\alpha > -5$ 和 $\beta, \gamma, \delta > -1$ 时, 定义正交投影 $P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}$: $H^1_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+) \to \bar{\mathcal{V}}_N^*(\mathbb{R})$ 如下:

$$(\partial_x(P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v - v), \partial_x\phi)_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\mathbb{R}^+} + (P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v - v, \phi)_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\, \phi \in \bar{\mathcal{V}}_N^*(\mathbb{R}).$$

设 $\sigma \leqslant 4$ 和 $\theta \leqslant 0$. 若 $0 < \alpha+\sigma \leqslant \gamma+2$, $0 < \beta+\theta \leqslant \delta+2$ 及 $\gamma, \delta > -1$, 则对任意的 $v \in H^1_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+) \cap H^r_{\bar{\eta}_{\alpha+\sigma-1,\beta+\theta-1},A}(\mathbb{R}^+)$ 和整数 $1 \leqslant r \leqslant N+1$,

$$\|P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v - v\|_{H^1_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)} \leqslant cN^{1-r}|v|_{H^r_{\bar{\eta}_{\alpha+\sigma-1,\beta+\theta-1},A}(\mathbb{R}^+)}.$$

特别地, 当 $\alpha \leqslant \gamma+\sigma-7$ 和 $\beta \leqslant \delta+\theta+1$ 时,

$$\|P^1_{N,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}v-v\|_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+} \leqslant cN^{-r}|v|_{H^r_{\bar{\eta}_{\alpha+\sigma-1,\beta+\theta-1},A}(\mathbb{R}^+)}.$$

若函数在 $x=0$ 处为零或者在无穷远处衰减为零, 则需要其他类型的正交投影.

作为一个应用的例子, 我们考虑如下退化问题:

$$\begin{cases}\partial_t U-bx\partial_x U-\partial_x(ax^2\partial_x U)+dU=f, & x\in\mathbb{R}^+, \quad 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), & x\in\bar{\mathbb{R}}^+,\end{cases} \tag{5.12}$$

其中 $a(x,t), b(x,t)$ 和 $d(x,t)$ 是连续函数, $0<a_1\leqslant a(x,t)\leqslant a_2$, 并当 $x\to 0$ 时 $|b(x,t)|$ 是有界的.

问题 (5.12) 的恰当弱形式依赖于无穷远处的边界条件. 我们先假定当 $x\to\infty$ 时 $U(x,t)=o(x^{-\frac{1}{2}})$. 此时, 令 $\alpha=-4$, $\beta=2$, $\gamma=-2$ 和 $\delta=0$. 于是, $\bar{\eta}_{\alpha,\beta}(x)=x^2$ 和 $\bar{\eta}_{\gamma,\delta}(x)\equiv 1$. 问题 (5.12) 的弱形式是寻找解 $U\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^+))\cap L^2(0,T;H^1_{\bar{\eta}_{-4,2},\bar{\eta}_{-2,0}}(\mathbb{R}^+))$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_t U(t),v)_{\mathbb{R}^+}+(a(t)x^2\partial_x U(t),\partial_x v)_{\mathbb{R}^+}-(b(t)x\partial_x U(t),v)_{\mathbb{R}^+}\\ \quad +(d(t)U(t),v)_{\mathbb{R}^+}=(f(t),v)_{\mathbb{R}^+}, \quad \forall\, v\in H^1_{\bar{\eta}_{-4,2},\bar{\eta}_{-2,0}}(\mathbb{R}^+), \quad 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), \quad x\in\bar{\mathbb{R}}^+.\end{cases} \tag{5.13}$$

设 a_1, a_2, b_1 和 d_j $(1\leqslant j\leqslant 4)$ 是某些正常数, 并假定 $0<a_1\leqslant a(x,t)\leqslant a_2$, $|b(x,t)|\leqslant b_1$, 以及 $0<d_1\leqslant |d(x,t)|\leqslant d_2$ 或者 $0<d_3x^\lambda\leqslant d(x,t)\leqslant d_4x^\lambda$, $0<\lambda<3$. 若 $U_0\in L^2(\mathbb{R}^+)$ 和 $f\in L^2(0,T;(H^1_{\bar{\eta}_{-4,2},\bar{\eta}_{-2,0}}(\mathbb{R}^+))')$, 则问题 (5.13) 有唯一解.

计算问题 (5.13) 的谱格式是寻找数值解 $u_N(t)\in\bar{\mathcal{V}}_{N,-2,0}(\mathbb{R}^+)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_t u_N(t),\phi))_{\mathbb{R}^+}+(a(t)x^2\partial_x u_N(t),\partial_x\phi))_{\mathbb{R}^+}-(b(t)x\partial_x u_N(t),\phi))_{\mathbb{R}^+}\\ \quad +(d(t)u_N(t),\phi)_{\mathbb{R}^+}=(f,\phi))_{\mathbb{R}^+}, \quad \forall\,\phi\in\bar{\mathcal{V}}_{N,-2,0}(\mathbb{R}^+), \quad 0<t\leqslant T,\\ u_N(0)=P_{N,-2,0,\mathbb{R}^+}U_0.\end{cases}$$

下面假定当 $x\to\infty$ 时 $U(x,t)=O(x^\mu)$, $\mu>0$, 在这种情形下, 令 $\alpha=\gamma-2$, $\beta=\delta+2$, $\gamma>2\mu-1$ 和 $\delta>-1$. 于是, $\bar{\eta}_{\alpha,\beta}(x)=x^2\bar{\eta}_{\gamma,\delta}(x)$. 问题 (5.12) 的弱形式是寻找解 $U\in L^\infty(0,T;L^2_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+))\cap L^2(0,T;H^1_{\bar{\eta}_{\gamma-2,\delta+2},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+))$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_t U(t),v)_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}+(a(t)\partial_x U(t),\partial_x v)_{\bar{\eta}_{\gamma-2,\delta+2},\mathbb{R}^+}+(\partial_x U(t),v)_{g,\mathbb{R}^+}\\ \quad +(d(t)U(t),v)_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}=(f(t),v)_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}, \quad \forall\, v\in H^1_{\bar{\eta}_{\gamma-2,\delta+2},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+), \quad 0<t\leqslant T,\\ U(x,0)=U_0(x), \quad x\in\bar{\mathbb{R}}^+,\end{cases} \tag{5.14}$$

其中

$$g(x,t)=x\bar{\eta}_{\gamma,\delta}(x)\left(\delta a(x,t)-b(x,t)-\frac{a(x,t)x(\gamma+\delta+2)}{x+1}\right).$$

若 $U_0\in L^2_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+)$, $f\in L^2(0,T;(H^1_{\bar{\eta}_{\gamma-2,\delta+2},\bar{\eta}_{\gamma,\delta}}(\mathbb{R}^+))')$, 则问题 (5.14) 有唯一解.

计算问题 (5.14) 的谱格式是寻找数值解 $u_N(t)\in\bar{\mathcal{V}}_{N,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 使得

$$\begin{cases}(\partial_t u_N(t),\phi)_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}+(a(t)\partial_x u_N(t),\partial_x\phi)_{\bar{\eta}_{\gamma-2,\delta+2},\mathbb{R}^+}+(\partial_x u_N(t),\phi)_{g,\mathbb{R}^+}\\ \quad +(d(t)u_N(t),\phi)_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}=(f,\phi)_{\bar{\eta}_{\gamma,\delta},\mathbb{R}^+}, \quad \forall\,\phi\in\bar{\mathcal{V}}_{N,\gamma,\delta}(\mathbb{R}^+), \quad 0<t\leqslant T,\\ u_N(0)=P_{N,\gamma,\delta,\mathbb{R}^+}U_0.\end{cases}$$

上述方法的具体细节可参见文献 [164].

前面的无理基函数都是通过广义 Jacobi 函数和若干固定的变量变换诱导得来的. 最近, Shen 和 Wang [19,165] 通过标准 Jacobi 多项式和不同的变量变换构造无理正交逼近和插值, 并提出了相应的谱和拟谱方法.

设 $\delta > 0$. $h_\delta(x)$ 是一个严格递增的光滑函数, 且当 $x \to -\infty$ 时 $h_\delta(x) \to -1$; 当 $x \to \infty$ 时 $h_\delta(x) \to 1$. 例如, 代数型变换

$$h_\delta(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\delta^2}}$$

和对数型变换

$$h_\delta(x) = \tanh\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

全直线上的无理函数定义如下:

$$R_l^{\alpha,\beta,\delta}(x) = J_l^{\alpha,\beta}(h_\delta(x)), \quad l \geqslant 0.$$

设权函数 $\eta_{\alpha,\beta,\delta}(x) = \chi_{\alpha,\beta}(h_\delta(x))\partial_x h_\delta(x)$. 所有的 $R_l^{\alpha,\beta,\delta}(x)$ 构成了 $L^2_{\eta_{\alpha,\beta,\delta}}(\mathbb{R})$ 中的完备正交系. 令

$$\mathcal{V}_{N,\alpha,\beta,\delta}(\mathbb{R}) = \mathrm{span}\{R_l^{\alpha,\beta,\delta}(x), 0 \leqslant l \leqslant N\}.$$

正交投影 $P_{N,\alpha,\beta,,\delta,\mathbb{R}} : L^2_{\eta_{\alpha,\beta,\delta}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{V}_{N,\alpha,\beta,\delta}(\mathbb{R})$ 定义如下:

$$(P_{N,\alpha,\beta,\delta,\mathbb{R}}v - v, \phi)_{\eta_{\alpha,\beta,\delta},\mathbb{R}} = 0, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{V}_{N,\alpha,\beta,\delta}(\mathbb{R}).$$

记 $D_x v = \partial_x h_\delta(x)\partial_x v$, 并引入空间 $H^r_{\eta_{\alpha,\beta,\delta},A}(\mathbb{R})$, 其范数为

$$\|v\|_{H^r_{\eta_{\alpha,\beta,\delta},A}(\mathbb{R})} = \left(\sum_{k=0}^{r} \|D_x^k v\|^2_{\eta_{\alpha+k,\beta+k,\delta},\mathbb{R}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $v \in H^r_{\eta_{\alpha,\beta,\delta},A}(\mathbb{R})$, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k(P_{N,\alpha,\beta,\delta,\mathbb{R}}v - v)\|_{\eta_{\alpha+k,\beta+k,\delta},\mathbb{R}} \leqslant cN^{k-r}\|D_x^r v\|_{\eta_{\alpha+r,\beta+r,\delta},\mathbb{R}}, \quad k = 0, 1.$$

类似地, $\bar{h}_\delta(x)$ 表示一个严格递增的光滑函数, $\bar{h}_\delta(0) = -1$, 并当 $x \to \infty$ 时 $\bar{h}_\delta(x) \to 1$. 例如, 代数型变换

$$\bar{h}_\delta(x) = \frac{x-\delta}{x+\delta}$$

和对数型变换

$$\bar{h}_\delta(x) = 2\tanh\left(\frac{x}{\delta}\right) - 1.$$

半直线上的无理函数如下:

$$\bar{R}_l^{\alpha,\beta,\delta}(x) = J_l^{\alpha,\beta}(\bar{h}_\delta(x)), \quad l \geqslant 0.$$

设权函数 $\bar{\eta}_{\alpha,\beta,\delta}(x) = \chi_{\alpha,\beta}(\bar{h}_\delta(x))\partial_x \bar{h}_\delta(x)$. 所有的 $\bar{R}_l^{\alpha,\beta,\delta}(x)$ 构成了 $L^2_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta,\delta}}(\mathbb{R}^+)$ 中的完备正交系. 令

$$\bar{\mathcal{V}}_{N,\alpha,\beta,\delta}(\mathbb{R}^+) = \mathrm{span}\{\bar{R}_l^{\alpha,\beta,\delta}(x), 0 \leqslant l \leqslant N\}.$$

正交投影 $P_{N,\alpha,\beta,,\delta,\mathbb{R}^+} : L^2_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta,\delta}}(\mathbb{R}^+) \to \bar{\mathcal{V}}_{N,\alpha,\beta,\delta}(\mathbb{R}^+)$ 定义如下:

$$(P_{N,\alpha,\beta,\delta,\mathbb{R}^+}v - v, \phi)_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta,\delta},\mathbb{R}^+} = 0, \quad \forall\, \phi \in \bar{\mathcal{V}}_{N,\alpha,\beta,\delta}(\mathbb{R}^+).$$

记 $\bar{D}_x v = \partial_x \bar{h}_\delta(x)\partial_x v$, 并引入空间 $H^r_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta,\delta},A}(\mathbb{R}^+)$, 其范数为

$$\|v\|_{H^r_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta,\delta},A}(\mathbb{R}^+)} = \left(\sum_{k=0}^{r} \|\bar{D}_x^k v\|^2_{\bar{\eta}_{\alpha+k,\beta+k,\delta},\mathbb{R}^+}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $v \in H^r_{\bar{\eta}_{\alpha,\beta,\delta},A}(\mathbb{R}^+)$, 且整数 $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant N+1$, 则

$$\|\partial_x^k(P_{N,\alpha,\beta,,\delta,\mathbb{R}^+}v - v)\|_{\bar{\eta}_{\alpha+k,\beta+k,\delta},\mathbb{R}^+} \leqslant cN^{k-r}\|D_x^r v\|_{\bar{\eta}_{\alpha+r,\beta+r,\delta},\mathbb{R}^+}, \quad k = 0, 1.$$

我们可以通过变量变换 $h_\delta(x)$ 和 $\bar{h}_\delta(x)$ 由广义 Jacobi 函数诱导出相应的无理逼近.

Guo 和 Shen [166] 提供了另一类 Jacobi 无理逼近及其应用. 所采用的基函数是

$$R_l^{\alpha,\gamma,\delta}(x) = \frac{1}{r^\gamma} J_l^{\alpha,0}\left(1 - \frac{2}{x^\delta}\right), \quad l \geqslant 0.$$

我们根据以下原则选取参数 α, γ 和 δ,

(1) 恰当的 γ 确保数值解精确拟合真解的渐近性态;

(2) 如果真解在带权 x^σ 的 Sobolev 空间中, 那么选择恰当的 α 使得 Jacobi 无理基函数在相同的带权空间中相互正交;

(3) 选择恰当的 $\delta > 0$, 从而提供更好的数值结果.

为了逼近定义在全直线上的函数, Cloot 和 Weideman [167] 较早地采用了如下基函数:

$$R_{1,l}^\delta(x) = \cos\left(2l\arctan\left(\frac{x}{\delta}\right)\right), \quad R_{2,l}^\delta(x) = \sin\left(2l\arctan\left(\frac{x}{\delta}\right)\right), \quad l \geqslant 0.$$

Boyd 等人 [168] 则应用半直线上的拟谱方法数值模拟氢原子行为, 同时比较了带变量变换的 Fourier-sine 展开方法、Laguerre 展开方法和 Chebyshev 无理基函数展开方法.

致谢 在本文撰写过程中, 王中庆教授和王立联教授协助收集了部分资料, 余旭洪博士打印了中文稿, 特此致谢.

参考文献

1 Bernardi C, Maday Y. Approximations Spectrales de Problèmes aux Limites Elliptiques. Berlin: Springer-Verlag, 1992

2 Bernardi C, Maday Y. Spectral methods. In: Handbook of Numerical Analysis, vol. 5: Techniques of Scientific Computing. Amsterdam: Elsevier, 1997, 209–486

3 Boyd J P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. 2nd ed. New York: Dover, 2001

4 Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1988

5 Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. Spectral Methods, Fundamentals in Single Domains. Berlin: Springer-Verlag, 2006

6 Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2007

7 Deville M, Fischer P F, Mund E. High-Order Methods in Incompressible Fluid Flows. Cambrige: Cambridge University Press, 2002

8 Funaro D. Polynomial Approximation of Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992

9 Gottlieb D, Orszag S A. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. Philadelphia: SIAM, 1977

10 Guo B Y. Spectral Methods and Their Applications. Singapore: World Scietific, 1998

11 Hesthven J S, Gottlieb S, Gottlieb D. Spectral Methods for Time-Dependent Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2007

12 Karniadakis G E, Sherwin S J. Spectral/hp Methods in Compytational Fluid Dynamics. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2005
13 Peyret R. Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow. Berlin: Springer-Verlag, 2002
14 Shen J, Tang T. Spectral and High-order Methods with Applications. Beijing: Science Press, 2006
15 Shen J, Tang T, Wang L L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2011
16 Trefethen L N. Spectral Methods in Matlab. Philadelphia: SIAM, 2000
17 Guo B Y. Some progress in spectral methods. Sci China Math, 2013, 56: 2411–2438
18 Guo B Y. Some developments in spectral methods for nonlinear partial differential equations in unbounded domains. In: Differential Geometry and Related Topics. Singapore: World Scientific, 2002, 68–90
19 Shen J, Wang L L. Some recent advances on spectral methods for unbounded domains. Commun Comput Phys, 2009, 5: 195–241
20 Guo B Y. Error estimation of Hermite spectral method for nonlinear partial differential equations. Math Comp, 1999, 68: 1067–1078
21 Guo B Y, Xu C L. Hermite pseudospectral method for nonlinear partial differential equations. RAIRO Math Model Numer Anal, 2000, 34: 859–872
22 Xu C L, Guo B Y. Hermite spectral and pseudospectral methods for nonlinear partial differential equations in multiple dimensions. Comput Appl Math, 2003, 22: 167–193
23 Guo B Y, Shen J, Xu C L. Spectral and pseudospectral approximations using Hermite functions: Application to the Dirac equation. Adv Comput Math, 2003, 19: 35–55
24 Xiang X M, Wang Z Q. Generalized Hermite spectral method and its applications to problems in unbounded domains. SIAM J Numer Anal, 2010, 48: 1231–1253
25 Xiang X M, Wang Z Q. Generalized Hermite approximations and spectral method for partial differential equations in multiple dimensions. J Sci Comput, 2013, 57: 229–253
26 Tang T. The Hermite spectral method for Gaussian type functions. SIAM J Sci Comput, 1993, 14: 594–606
27 Boyd J P. The rate of convergence of Hermite function series. Math Comp, 1980, 35: 1309–1316
28 Zhang C, Guo B Y. Generalized Hermite spectral method matching asymptotic behaviors. J Comput Appl Math, 2014, 255: 616–634
29 Bao W Z, Shen J. A fourth-order time-splitting Laguerre-Hermite pseudo-spectral method for Bose-Einstein condensates. SIAM J Sci Comput, 2005, 26: 2110–2028
30 Bao W Z, Shen J. A generalized-Laguerre-Hermite pseudospectralmethod for computing symmetric and central vortex states in Bose-Einstein condensates. J Comput Phys, 2008, 227: 9778–9793
31 Bao W Z, Li H Y, Shen J. A generalized-Laguerre-Fourier-Hermite pseudospectral method for computing the dynamics of rotating Bose-Einstein condensates. SIAM J Sci Comput, 2009, 31: 3685–3711
32 Weideman J A C. Spectral differentiation matrices for the numerical solution of Schrödinger equation. J Phys A, 2006, 39: 10229–10237
33 Weideman J A C, Reddy S C. A MATLAB differentiation matrix suite. ACM Trans Math Software, 2000, 26: 465–519
34 Funaro D, Kavian O. Approximation of some diffusion evolution equations in unbounded domains by Hermite functions. Math Comp, 1991, 57: 597–619
35 Fox J C M, Guo B Y, Tang T. Combined Hermite spectral-finite difference method for the Fokker-Planck equations. Math Comp, 2001, 71: 1497–1528
36 Guo B Y, Wang T J. Mixed Legendre-Hermite spectral method for heat transfer in an infinite plate. Comput Math Appl, 2006, 51: 751–768
37 Wang T J, Guo B Y. Mixed Legendre-Hermite pseudospectral method for heat transfer in an infinite plate. J Comput Math, 2005, 23: 587–602
38 Aguirre J, Rivas J. Hermite pseudospectral approximations, an error estimate. J Math Anal Appl, 2005, 304: 189–197
39 Tang T, Mckee S, Reeks M W. A spectral method for the numerical solutions of a kinetic equation describing the dispersion of small particles in a turbulent flow. J Comput Phys, 1992, 103: 222–230
40 Ma H P, Sun W W, Tang T. Hermite spectral methods with a time-dependent scaling for parabolic equations in unbounded domains. SIAM J Numer Anal, 2005, 43: 58–75
41 Ma H P, Zhao T G. A stabilized Hermite spectral method for second-order differential equations in unbounded domain. Numer Methods Partial Differential Equations, 2007, 23: 968–983
42 Guo B Y, Zhang C. Generalized Hermite spectral method matching different algebraic decay at infinities. J Sci Comput, doi: 10.1007/s10915-014-9981-3, 2015
43 Guo B Y, Zhang X Y. A new generalized Laguerre spectral approximation and its applications. J Comput Appl

Math, 2005, 181: 342–363
44 Guo B Y, Wang L L, Wang Z Q. Generalized Laguerre interpolation and pseudospectral method for unbounded domains. SIAM J Numer Anal, 2006, 43: 2567–2589
45 Mastroianni G, Monegato G. Nyström interpolants based on zeros of Laguerre polynomials for some weiner-Hopf equations. IMA J Numer Anal, 1997, 17: 621–642
46 Mastroianni G, Occorsio D. Lagrange interpolation at Laguerre zeros in some weighted uniform spaces. Acta Math Hungar, 2001, 91: 27–52
47 Guo B Y, Shen J. Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval. Numer Math, 2000, 86: 635–654
48 Funaro D. Estimates of Laguerre spectral projectors in Sobolev spaces. In: Orthogonal Polynomials and Their Applications. New Brunswick: IMACS, 1991
49 Maday Y, Pernaud-Thomas B, Vandeven H. One réhabilitation des méthods spèctrales de type Laguerre. Rech Aérospat, 1985, 6: 353–379
50 Xu C L, Guo B Y. Laguerre pseudospectral method for nonlinear partial differential equations. J Comput Math, 2002, 20: 413–428
51 Xu C L, Guo B Y. Modified Laguerre spectral and pseudospectral methods for nonlinear partial differential equations in multiple dimensions. Appl Math Mech, 2008, 29: 311–331
52 Wang L L, Guo B Y. Stair Laguerre pseudospectral method for differential equations on the half line. Adv Comput Math, 2006, 25: 305–322
53 Bernardi C, Coppoletta G, Maday Y. Some Spectral Approximations of Multi-dimensional Fourth-order Problems. Internal Report 90021, Laboratoire d'Analyse Numérique. Paris: Université Pierre et Marie Curie, 1990
54 Bernardi C, Maday Y. Basic Results on Spectral Methods. Internal Report 94022. Paris: Université Pierre et Marie Curie, 1994
55 Guo B Y, Xu C L. Mixed Laguerre-Lagendre pseudospectral method for incompressible fluid flow in an infinite strip. Math Comp, 2003, 73: 95–125
56 Xu C L, Guo B Y. Mixed Laguerre-Legendre spectral method for incompressible flow in an infinite strip. Adv Comput Math, 2002, 16: 77–96
57 Guo B Y, Wang Z Q. Numerical integration based on Laguerre-Gauss interpolation. Comp Meth Appl Mech Engr, 2007, 196: 3726–3741
58 Guo B Y, Wang Z Q, Tian H J, et al. Integration processes of ordinary differential equations based on Laguerre-Radau interpolations. Math Comp, 2008, 77: 181–199
59 Yan J P, Guo B Y. Laguerre-Gauss collocation method for initial value problems of second-order ODEs. Appl Math Mech, 2011, 32: 1541–1564
60 Guo B Y, Zhang X Y. Spectral method for differential equations of degenerate type on unbounded domains by using generalized Laguerre functions. Appl Numer Math, 2007, 57: 455–471
61 Wang Z Q, Guo B Y, Wu Y N. Pseudospectral method using generalized Laguerre functions for singular problems on unbounded domains. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2009, 11: 1019–1038
62 Shen J. Stable and efficient spectral methods in unbounded domains using Laguerre functions. SIAM J Numer Anal, 2000, 38: 1113–1133
63 Guo B Y, Wang L L. Modified Laguerre pseudospectral method refined by multidomain Legendre approximation for differential equations on the half line. J Comput Appl Math, 2006, 190: 304–324
64 Guo B Y, Ma H P. Composite Legendre-Laguerre approximation in unbounded domains. J Comput Math, 2001, 19: 101–112
65 Ma H P, Guo B Y. Composite Legendre-Laguerre pseudospectral approximation in unbounded domains. IMA J Numer Anal, 2001, 21: 587–602
66 Yan J P, Guo B Y. A collocation method for initial value problems of second-order ODEs by using Laguerre functions. Numer Math Theory Methods Appl, 2011, 4: 282–294
67 Black F, Derman E, Toy W. A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options. Financ Anal J, 1990, 46: 33–39
68 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. J Polit Econ, 1973, 81: 637–654
69 Dothan L U. On the term structure of interest rates. J Financ Econ, 1978, 6: 59–69
70 Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 1985, 53: 385–407
71 Zhang X Y, Guo B Y, Jiao Y J. Spectral method for three-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation by generalized Laguerre and spherical harmonic functions. Numer Math Theory Methods Appl, 2009, 2: 43–64

72 Jiao Y J, Guo B Y. Mixed spectral method for Navier-Stokes equations in an infinite strip by using generalized Laguerre functions. Int J Numer Anal Math Model, 2012, 9: 982–998

73 Guo B Y, Sun T, Zhang C. Jacobi and Laguerre quasi-orthogonal approximations and related interpolations. Math Comp, 2013, 82: 413–441

74 Guo B Y, Zhang C, Sun T. Some developments in spectral methods. Stud Adv Math, 2012, 51: 561–574

75 Everitt W N, Littlejohn L L, Wellman R. The Sobolev orthogonality and spectral analysis of the Laguerre polynomials $\{L_n^{-k}\}$ for positive integers k. J Comput Appl Math, 2004, 171: 199–234

76 Zhang C, Guo B Y, Sun T. Spectral method for high order problems. Numer Math Theory Methods Appl, 2013, 6: 520–537

77 Zhang C, Guo B Y. Domain decomposition spectral method for mixed inhomogeneous boundary value problems of high order differential equations on unbounded domains. J Sci Comput, 2012, 53: 451–480

78 Guo B Y, Wang T J. Composite generalized Laguerre-Legendre spectral method with domain decomposition and its application to Fokker-Planck equation in an infinite channel. Math Comp, 2009, 78: 129–151

79 Guo B Y, Wang T J. Composite Laguerre-Legendre spectral method for exterior problems. Adv Comput Math, 2010, 32: 393–429

80 Wang T J, Guo B Y. Composite generalized Laguerre-Legendre pseudospectral method for Fokker-Planck equation in an infinite channel. Appl Numer Math, 2008, 58: 1448–1466

81 Wang T J, Guo B Y. Composite Laguerre-Legendre pseudospectral method for exterior problems. Commun Comput Phys, 2009, 5: 350–375

82 Guo B Y, Wang T J. Composite Laguerre-Legendre spectral method for fourth-order exterior problems. J Sci Comput, 2010, 44: 255–285

83 Guo B Y, Zhang C. Spectral method for high order problems with proper simulations of asymptotic behaviors at infinity. J Comput Appl Math, 2013, 237: 269–294

84 Coullet P, Elphick C, Repaux D. Nuture of spatial chaos. Phys Rev Lett, 1987, 58: 431–434

85 Auteri F, Parolini N, Quartapelle L. Essential imposition of Neumann condition in Galerkin-Legendre elliptic solver. J Comput Phys, 2003, 185: 427–444

86 Wang L L, Guo B Y. Interpolation approximations based on Gauss-Lobatto-Legendre-Birkhoff quadrature. J Approx Theory, 2009, 161: 142–173

87 Wang T J, Wang Z Q. Error analysis of Legendre spectral method with essential imposition of Neumann boundary condition. Appl Numer Math, 2009, 59: 2444–2451

88 Wang Z Q, Wang L L. A collocation method with exact imposition of mixed boundary conditions. J Sci Comput, 2010, 42: 291–317

89 Yu X H, Wang Z Q. Jacobi spectral method with essential imposition of Neumann boundary condition. Appl Numer Math, 2012, 62: 956–974

90 McCrory R L, Orszag S A. Spactral methods for multi-dimensional diffusion problem. J Comput Phys, 1980, 37: 93–112

91 Orszag S A. Spectral methods for problems in complex geometries. J Comput Phys, 1980, 37: 70–92

92 Quarteroni A. Domain decomposition methods for systems of conservation laws, spectral collocation approximations. SIAM J Sci Stat Comput, 1990, 11: 1029–1052

93 Quarteroni A, Pasquarelli F, Valli A. Heterogeneous domain decomposition: Principles, algorithms, applications. In: AHPCRC Preprint 91-48. Minneapolis: University of Minnesota, 1992

94 Azaiez M, Shen J, Xu C J, et al. A Laguerre-Legendre spectral method for the Stokes problem in a semi-infinite channel. SIAM J Numer Anal, 2008, 47: 271–292

95 Zhuang Q Q, Shen J, Xu C J. A coupled Legendre-Laguerre spectral-element method for the Navier-Stokes equations in unbounded domains. J Sci Comput, 2010, 42: 1–22

96 Shen J, Wang L L. Laguerre and composite Legendre-Laguerre dual-Petrov-Galerkin methods for third-order equations. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2006, 6: 1381–1402

97 Guo B Y, Shen J, Wang L L. Optimal spectral-Galerkin methods using generalized Jacobi polynomials/functions and their applications. J Sci Comput, 2006, 27: 305–322

98 Guo B Y, Shen J, Wang L L. Generalized Jacobi polynomials/functipons and their applications. Appl Numer Math, 2009, 59: 1011–1028

99 Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy. Rev Mod Phys, 1934, 15: 1–89

100 Risken H. The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1989

101 Cartling B. Kineticcs of activated processes from nonstationary solutions of the Fokker-Planck equation for a bistable potential. J Chem Phys, 1987, 87: 2638–2648

102 Moore P, Flaherty J. Adaptive local overlapping grid methods for parabolic systems in two space dimensions. J Comput Phys, 1992, 98: 54–63

103 Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electro-magnetic waves. J Comput Phys, 1994, 114: 185–200

104 Bramble J H, Pasciak J E. Analysis of a finite PML approximation for the three dimensional time-harmonic Maxwell problem. Math Comp, 2007, 76: 597–614

105 Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic calculations. Math Comp, 1977, 31: 629–651

106 Engquist B, Majda A. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic calculations. Comm Pure Appl Math, 1979, 32: 313–357

107 Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. Proc Nat Acad Sci USA, 1997, 74: 1765–1766

108 Feng K. Canonical boundary reduction and finite element method. In: Proceedings of Symposium of Finite Element Methods. Beijing: Science Press, 1982, 330–352

109 Grote M J, Keller J B. On nonreflecting boundary conditions. J Comput Phys, 1995, 122: 231–243

110 Hsiao G, Wendland W. On a boundary integral method for some exterior problems in elasticity. Proc Tbilisi Univ, 1985, 257: 31–60

111 Ying L A. The infinite similar element method for calculating stress intensity factors. Scientia Sinica, 1978, 21: 19–43

112 Ying L A. Infinite Element Methods. Beijing: Peking University Press, 1995

113 Yu D H. Natural Boundary Integral Method and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2002

114 Givoli D. Numerical Methods for Problems in Infinite Domains. Amsterdam: Elsevier, 1992

115 Givoli D, Keller J B. A finite element method for large domains. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1989, 76: 41–66

116 Ying L A. Numerical Methods for Exterior Problems. Singapore: World Scintific, 2006

117 Coulaud O, Funaro D, Kavian O. Laguerre spectral approximation of elliptic problems in exterior domains. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1990, 80: 451–458

118 Guo B Y, Shen J, Xu C L. Generalized Laguerre approximation and its applications to exterior problems. J Comput Math, 2005, 23: 113–130

119 Zhang X Y, Guo B Y. Spherical harmonic-generalized Laguerre spectral method for exterior problems. J Sci Comput, 2006, 27: 523–537

120 Zhang R, Wang Z Q, Guo B Y. Mixed Fourier-Laguerre spectral and pseudospectral methods for exterior problems using generalized Laguerre functions. J Sci Comput, 2008, 36: 263–283

121 Wang Z Q, Guo B Y, Zhang W. Mixed spectral method for three-dimensional exterior problems using spherical harmonic and generalized Laguerre functions. J Comput Appl Math, 2008, 217: 277–298

122 Wang Z Q, Zhang R, Guo B Y. Spherical harmonic-generalized Laguerre pseudospectral method for three-dimensional exterior problems. Int J Comput Math, 2010, 87: 2123–2142

123 Guo B Y, Jiao Y J. Mixed generalized Laguerre-Fourier spectral method for exterior problem of Navier-Stokes equations. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2009, 11: 315–345

124 Jiao Y J, Guo B Y. Mixed spectral method for exterior problem of Navier-Stokes equations by using generalized Laguerre functions. Appl Math Mech, 2009, 30: 561–574

125 Guo B Y, Jia H L. Spectral meethod on quadrilaterals. Math Comp, 2010, 79: 2237–2264

126 Guo B Y, Jia H L. Pseudospectral method for quadrilaterals. J Comput Appl Math, 2011, 236: 962–979

127 Jia H L, Guo B Y. Petrov-Galerkin spectral element method for mixed inhomogeneous boundary value problems on polygons. Chin Ann Math Ser B, 2010, 31: 855–878

128 Guo B Y, Yu X H. Composite spectral method for exterior problems with polygonal obstacles. J Sci Comput, 2014, 59: 439–472

129 Nicholls D, Shen J. A stable, high order method for two dimensional bounded obstacle scattering. SIAM J Sci Comput, 2006, 28: 1398–1419

130 Shen J, Wang L L. Analysis of a spectral-Galerkin approximation to the Helmholtz equation in exterior domains. SIAM J Numer Anal, 2007, 45: 1954–1978

131 Canuto C, Quarteroni A. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces. Math Comp, 1982, 38: 67–86

132 Guo B Y, Wang L L. Jacobi approximations in non-uniformly Jacobi-weighted Sobolev spaces. J Approx Theory, 2004, 128: 1–41

133 Babuška I, Guo B Q. Optimal estimates for lower and upper bounds of approximation errors in the p-version of the finite element method in two-dimensions. Numer Math, 2000, 85: 219–255

134 Babuška I, Guo B Q. Direct and inverse approximation theorems for the p-version of the finite element method in the framework of weighted Besov spaces, Part I: Approximability of functions in the weighted Besov spaces. SIAM J Numer Anal, 2001, 39: 1512–1538

135 Guo B Y. Gegenbauer approximation in certain Hilbert spaces and its applications to singular differential equations. SIAM J Numer Anal, 2000, 37: 621–645

136 Guo B Y. Jacobi approximation in certain Hilbert space and their applications to singular differential equations. J Math Anal Appl, 2000, 243: 373–408

137 Li J, Ma H P, Sun W W. Error analysis for solving the Korteweg-de Vries equation by a Legendre pseudospectral method. Numer Methods Partial Differential Equations, 2000, 16: 513–534

138 Guo B Y, Zhang K J. On non-isotropic Jacobi pseudospectral method. J Comput Math, 2008, 26: 511–535

139 Guo B Y, Wang L L. Jacobi interpolation approximations and their applications to singular differential equations. Adv Comput Math, 2001, 14: 227–276

140 Guo B Y. Gegenbauer approximation and its applications to differential equations with rough asymptotic behaviours at infinity. Appl Numer Math, 2001, 38: 403–425

141 Guo B Y. Jacobi spectral method for differential equations with rough asymptotic behaviours at infinity. J Comput Math Appl, 2003, 46: 95–104

142 Guo B Y. Gegenbauer approximation and its applications to differential equations on the whole line. J Math Anal Appl, 1998, 226: 180–206

143 Guo B Y. Jacobi spectral approximation and its applications to differential equations on the half line. J Comput Math, 2000, 18: 95–112

144 Wang L L, Guo B Y. Non-isotropic Jacobi spectral methods for unbounded domains. Numer Math, 2004, 13: 204–224

145 Grosch C E, Orszag S A. Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinates transforms. J Comput Phys, 1977, 25: 273–296

146 Boyd J P. The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain. J Comput Phys, 1982, 45: 43–79

147 Boyd J P. Spectral method using rational basis functions on an infinite interval. J Comput Phys, 1987, 69: 112–142

148 Boyd J P. Orthogonal rational functions on a semi-infinite interval. J Comput Phys, 1987, 70: 63–88

149 Christov C I. Complete orthogonal system of functions in $L^2(-\infty,\infty)$ space. SIAM J Appl Math, 1982, 42: 1337–1344

150 Guo B Y, Shen J. On spectral approximations using modified Legendre rational functions: Application to the Korteweg de Vries equation on the half line. Indiana Univ Math J, 2001, 50: 181–204

151 Guo B Y, Shen J, Wang Z Q. A rational approximation and its applications to differential equations on the half line. J Sci Comput, 2000, 15: 117–148

152 Guo B Y, Shen J, Wang Z Q. Chebyshev rational spectral and pseudospectral methods on a semi-infinite interval. Internat J Numer Methods Engrg, 2002, 53: 65–84

153 Guo B Y, Wang Z Q. Modified Chebyshev rational spectral method for the whole line. Discrete Contin Dyn Syst, 2003, supplement volume: 365–374

154 Guo B Y, Wang Z Q. Legendre rational approximation on the whole line. Sci China Ser A, 2004, 47(S1): 155–164

155 Wang Z Q, Guo B Y. A rational approximation and its applications to nonlinear differential equations on the whole line. J Math Anal Appl, 2002, 274: 374–403

156 Wang Z Q, Guo B Y. Modified Legendre rational spectral method for the whole line. J Comput Math, 2004, 22: 457–474

157 Liu Y, Liu L, Tang T. The numerical computation of connecting orbits in dynamical systems: A rational spectral approach. J Comput Phys, 1994, 111: 373–380

158 Weideman J A C. The eigenvalues of Hermite and rational spectral differential matrices. Numer Math, 1992, 61: 409–432

159 Wang Z Q, Guo B Y. Legendre rational spectral method for nonlinear Klein-Gordon equation. Numer Math, 2006, 15: 143–149

160 Wang Z Q, Guo B Y. A mixed spectral method for incompressible viscous fluid flow in an infinite strip. Comput Appl Math, 2005, 24: 343–364

161 Wang Z Q, Guo B Y. Jacobi rational approximation and spectral method for differential equations of degenerate

type. Math Comp, 2008, 77: 883–907
162 Sun T, Guo B Y. Generalized Jacobi approximation in multiple dimensions and its applications. J Sci Comput, 2013, 55: 327–350
163 Guo B Y, Yi Y G. Generalized Jacobi rational spectral method and its applications. J Sci Comput, 2010, 43: 201–238
164 Yi Y G, Guo B Y. Generalized Jacobi rational spectral method on the half line. Adv Comput Math, 2012, 37: 1–37
165 Shen J, Wang L L. Error analysis for mapped Legendre spectral and pseudospectral methods. SIAM J Numer Anal, 2004, 42: 326–349
166 Guo B Y, Shen J. Irrational approximations and their applications to partial differential equations in exterior domains. Adv Comput Math, 2008, 28: 237–267
167 Cloot A, Weideman J A C. An adaptive algorithm for spectral computations on unbounded domains. J Comput Phys, 1992, 102: 398–406
168 Boyd J P, Rangan C, Bucksbaum P H. Pseudospectral methods on a semi-infinite interval with application to the hydrogen atom: A comparison of the mapped fourier-sine method with Laguerre series and rational Chebyshev expansion. J Comput Phys, 2003, 188: 56–74

Spectral and pseudospectral methods for unbounded domains

GUO BenYu

Abstract In this paper, we review the current trends and progresses in spectral and pseudospectral methods for unbounded domains and exterior problems. The first kind of numerical methods are based on the orthogonal approximations and interpolations by using the Hermite polynomials and functions, and the Laguerre polynomials and functions. The second kind of numerical methods are based on the Jacobi orthogonal approximations and interpolations with suitable variable transformations. The third kind of numerical methods are induced by the various combinations of the previous orthogonal approximations and interpolations coupled with domain decomposition and other techniques. We also present the main results on the Hermite, Laguerre, Jacobi irrational orthogonal approximations and interpolations, which serve as the mathematical foundation of the related numerical algorithms.

Keywords **spectral and pseudospectral methods, differential equations on unbounded domains, exterior problems**

MSC(2010) **65M70, 41A10, 41M05**

doi: 10.1360/N012014-00149