正八面体的交换正则覆盖

马纪成

重庆文理学院数学系, 重庆 402160

E-mail: ma_jicheng@hotmail.com

收稿日期: 2013-06-29; 接受日期: 2014-09-25

国家自然科学基金 (批准号: 11401067) 和重庆文理学院引进人才 (批准号: R2012SC22) 资助项目

摘要 正八面体是正多面体的一种, 其有 6 个顶点、12 条边和 8 个面. 本文通过延伸面, 对正八面体的可定向交换正则覆盖地图作出完全分类. 主要方法涉及 Conder 与本文作者对弧传递图的交换正则覆盖图的分类中的分层刻画技术.

关键词 正八面体 正则覆盖 交换覆盖

MSC (2010) 主题分类 05C25, 20B25

1 引言

正则地图是具有高对称性的简单图或多重图在闭曲面上的嵌入. 本文集中研究正则地图在可定向曲面上的分类问题. 众所周知, 这样的地图通常可被看作是一个正则地图的正则覆盖. Jones 和 Surowski^[1] 利用覆盖的方法, 通过延伸顶点、边及面将柏拉图多面体的循环正则覆盖作出了分类; Conder 和 Everitt^[2] 也通过循环正则覆盖的方法, 证明了以 77% 的正整数为亏格的不可定向曲面上都至少存在一个正则地图; Conder 和 Ma^[3] 通过交换正则覆盖的方法, 证明了当可定向曲面的亏格 $g \equiv 0, 1, 3, 4, 5 \pmod{6}$ 时, 至少存在一个简单正则地图; 最近, Jones^[4] 对柏拉图多面体的初等交换正则覆盖作出了分类, 其中初等交换覆盖群的阶与旋转群的阶互素. 本文中, 我们通过延伸面, 对正八面体的可定向交换正则覆盖作出完全分类. 其中涉及到的组合群论的方法类似于 Conder 与 Ma 在分类三度对称图的对称交换正则覆盖时所给出的方法. 需要注意的是, 由延伸顶点所构造出的地图正是延伸面所给出的地图的对偶. 因此, 读者也可从延伸顶点或边的角度出发. 对于延伸边的方法, 更多的细节见 Jones 等人的文献 [1].

本文主要由以下几部分内容组成: 第 2 节介绍正则地图的基本概念与背景知识, 参见文献 [3, 5] 等. 特别地, 第 2 节同时给出本文所涉及到的从组合群论的角度出发来构造交换正则覆盖的方法. 第 3 节包含正八面体的交换正则覆盖的完全分类. 最后在第 4 节给出本文的主要结果.

2 基本概念

所谓地图, 是指连通图 X 在有界闭合曲面 S 上的 2-胞腔嵌入. 其中 2-胞腔是指 X 的边互不相交, 且每一个分支都是单连通的 (即同胚于一个圆盘). 根据支撑曲面为可定向或不可定向, 地图 $\mathcal{M}$ 被

称为可定向或不可定向. 任一地图 $\mathcal{M}$ 是由顶点集、边集和面集组成, 分别记为 $V = V(\mathcal{M})$, $E = E(\mathcal{M})$ 和 $F = F(\mathcal{M})$. 与 $\mathcal{M}$ 相关的另一集合称为弧集, 它包含了顶点 - 边的组合 $(v, e) \in V \times E$; 当基图为单图时, 它们可被看作为相邻顶点的有序对. 同时, 每一条弧都伴随着两个刀片, 包含弧 (v, e) 和给定方向的边 e ; 在非退化的情形下, 每一条边都包含在两个面中, 它们便是顶点 - 边 - 面的三元组 $(v, e, f) \in V \times E \times F$. 地图 $\mathcal{M}$ 的一个自同构是基图中边的任意置换, 并且保持其邻接关系 (即保持嵌入), 或等价地说, 任意图的自同构诱导了支撑曲面到它自身的同胚. 由连通性可知, 每一个自同构都唯一地由它在刀片上的作用所决定. 所有地图 $\mathcal{M}$ 的自同构组成的集合在复合的作用下构成一个群, 称为地图的自同构群, 记为 $\text{Aut}\mathcal{M}$. 如果 $\mathcal{M}$ 为可定向的, 那么包含所有保方向的自同构子群在 $\text{Aut}\mathcal{M}$ 中的指数为 1 或 2, 记为 $\text{Aut}^\circ\mathcal{M}$, 有时称为 $\mathcal{M}$ 的旋转群. 如果可定向地图 $\mathcal{M}$ 存在反方向自同构 (即 $\text{Aut}^\circ\mathcal{M}$ 在 $\text{Aut}\mathcal{M}$ 中的指数为 2), 那么 $\mathcal{M}$ 称为可反射的, 反之称为不可反射. 若 $\mathcal{M}$ 为不可定向的, 则没有上述区别.

一个地图 $\mathcal{M}$ 称为可定向正则, 如果它为可定向的并且 $\text{Aut}^\circ\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{M}$ 的弧集上的作用正则. 同时, 如果此地图也为可反射的, 那么 $\text{Aut}\mathcal{M}$ 在所有刀片上的作用也正则.

对于正则地图 $\mathcal{M}$ 来说, $\text{Aut}\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{M}$ 的弧集上是传递的, 因此在 $\mathcal{M}$ 的顶点、边和面上也是传递的. 因此, $\mathcal{M}$ 的每一个面都有相同的大小, 假设为 m , 每一个顶点都有相同的度, 假设为 k , 那么我们就称 $\mathcal{M}$ 的型为 $\{m, k\}$. 例如, 五种柏拉图立方体, 其型分别为 $\{3, 3\}$ (正四面体), $\{3, 4\}$ (正八面体), $\{4, 3\}$ (正方体), $\{3, 5\}$ (正二十面体) 与 $\{5, 3\}$ (正十二面体).

现在, 假设 $\mathcal{M}$ 为一个正则地图且型为 $\{m, k\}$, 令 (v, e) 为 $\mathcal{M}$ 的任一弧, 令 f 为与 e 邻接的一个面. 由传递性可知, 存在 $\mathcal{M}$ 的一个保持 f 的自同构 r 诱导一个以 f 的中心为轴的一步旋转, 其阶为 m . 类似地, 存在 $\mathcal{M}$ 的一个固定 v 的自同构 s 诱导一个以 v 为中心的一步旋转, 其阶为 k . 进而, 我们可以选择 r 和 s (顺时针或逆时针) 使得它们的积 rs 为阶为 2 的自同构, 保持边 e 且其局部作用为以 e 的中点做旋转. 特别地, r 和 s 满足关系 $r^m = s^k = (rs)^2 = 1$. 由连通性可知, r 和 s 生成一个 $\mathcal{M}$ 的弧 - 传递自同构子群, 且该子群一定为 $\text{Aut}\mathcal{M}$ 本身, 或 $\text{Aut}^\circ\mathcal{M}$ (当 $\mathcal{M}$ 为可定向且 r 和 s 都保持其方向时).

由上述内容不难发现 $\text{Aut}\mathcal{M}$ 或 $\text{Aut}^\circ\mathcal{M}$ 可作为一般三角群

$$\Delta(m, k, 2) = \langle x, y, z \mid x^m = y^k = z^2 = xyz = 1 \rangle$$

的商, 其中, 我们可给定满同态将 y 映射到 s^{-1} , 同时将 z 映射到 rs . 任一 k -度地图 $\mathcal{N}$ 都对应三角群

$$\Delta(\infty, k, 2) = \langle x, y, z \mid y^k = z^2 = xyz = 1 \rangle$$

的子群 L , 其中 $\mathcal{N}$ 的面、顶点和边分别对应生成元 x, y 和 z 在 L 上的陪集. 地图 $\mathcal{N}$ 是可定向正则的当且仅当 L 是 Δ 的正规子群, 且保方向的自同构群 $\text{Aut}^\circ\mathcal{M}$ 同构于商群 Δ/L . 地图 $\mathcal{N}$ 称为地图 $\mathcal{M}$ 的 d -阶覆盖当且仅当对于 Δ 的正规子群 K , 以及 K 的指数为 d 的子群 L , 我们有 $\Delta/K \cong \text{Aut}^\circ\mathcal{M}$ 和 $\Delta/L \cong \text{Aut}^\circ\mathcal{N}$ 成立. 在此情形下, $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ 是正则覆盖, 并且其覆盖群为 K/L . 为分类所有相应的交换覆盖, 我们就需要分类所有子群 L 使得商 K/L 为交换群.

以下内容初次在文献 [6] 中给出, 为保证本文的独立完整性, 我们简要地在下文中叙述.

通常, 我们令 Δ 为有限生成群, K 为 Δ 的有限指数的子群. 在此假设下, K 的有限生成表示可以由 Reidemeister-Schreier 理论, 或 MAGMA [7] 中的 Rewrite 命令给出. 同时, 代数或者计算的方法可以用来给出 Δ 的生成元在 K 的生成元上的共轭作用.

在我们将要讨论的问题中, K 通常为有限秩的自由群. 在所有情形中, $K/K' = K/[K, K]$ 为自由交换群, 且秩为有限, 记为 d . 群 Δ 在 K 的生成元上的共轭作用诱导出在 K/K' 的生成元上的作用, 如果在给定 K/K' 的一组基 $\{w_1, w_2, \dots, w_d\}$ 的条件下, 其作用可看作是 $d \times d$ 矩阵, 那么, K/K' 便可认为是在整数域上秩为 d 的 G -模, 其中 $G = \Delta/K$.

给定交换覆盖群的幂 m , 为分类所有交换覆盖, 我们通常考虑 Δ 在 $K/K'K^{(m)}$ 的生成元上的作用, 其中 $K^{(m)}$ 指由 K 的元素的 m 次幂给出的 K 的特征子群. 在此假设下, 分类交换覆盖的问题便转换成了分类所有 K 的有限指数的子群 L , 使得 L 包含 $K'K^{(m)}$ 且为 Δ 的正规子群.

令 $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ 为 m 的素因子分解式, 其中 p_i 为互不相同的素数. 那么, 交换商群 K/L 可由其 Sylow 子群的直积给出. 在 K/L 中, 任一 Sylow 子群都可写成 K/Q_i 的形式, 其中 Q_i 是包含 $K'K^{(m)}$ 的 K 的 Δ -不变子群, 且指数 $|K:Q_i|$ 整除 $p_i^{e_i}$. 因此, 为分类所有交换覆盖, 我们只需要在 K/K' 中找到所有幂次为素数的 Δ -不变子群. 在此, 对于素数 p , 我们可假设 $m = p^e$, 同时将群 $K/K'K^{(m)}$ 看作由 e 个不同层组成. 对于 $0 \leq j \leq e$, 我们定义 $K_j = K'K^{(p^j)}$ 为由 K' 和 K 的所有元素的 (p^j) 次幂生成的子群. 显然, 该子群为 K 的特征子群, 从而为 Δ 的正规子群. 同时, 商群 $K_0/K_1, K_1/K_2, \dots, K_{e-1}/K_e$ 便是我们所看作的由上到下的层 (见图 1). 不难看出, 每一层 K_{j-1}/K_j 都是由陪集 $K_j w_i$ 生成的秩为 d 的初等交换 p -群, 其中 $1 \leq i \leq d$.

类似地, 如果 L 是包含 $K'K^{(m)}$ 的 K 的 Δ -不变子群, 其指数 $|K:L|$ 为 p 的幂次, 我们也可以定义 $L_j = L \cap K_j$, 其中 $0 \leq j \leq e$. 同时, L 从上到下的可看作由不同的层组成, 如 $L_0/L_1, L_1/L_2, \dots, L_{e-1}/L_e$. 这里的每一层 L_{j-1}/L_j 都是对应 K 中的 K_{j-1}/K_j 层的 Δ -不变子群. 由于 K_{j-1}/K_j 是已知的初等交换 p -群, 因此类似于分类初等交换覆盖的方法找到所有可能的 L_{j-1}/L_j 就相对容易一些.

这里, 考虑群 $G = \Delta/K$ 的特征表将是有帮助的, 因为它提供了在特征 0 的条件下, 群 G 的所有不可约表示的度 (或其他信息). 如果素数 p 不整除群 G 的阶, 那么在特征为 p 的条件下 G 也存在相同度数的不可约表示. 同时, 其他的特征值也有助于找到其他的可能性.

一旦找到最上层 K_0/K_1 的所有 Δ -不变子群, 我们可以立即得到其他层 K_{j-1}/K_j 对于 $j > 1$ 上的类似结果 (文献 [6] 中提供了例子). 更具挑战性的问题是如何将每一层不同的 Δ -不变子群拼接起来从而给出所有的 L . 但是, 这完全可以由考虑给定较小的整数 e (即较小的 $p^e = m$) 来解决. 例如, 上两层 K_0/K_2 (即幂为 p^2) 的 Δ -不变子群的结果可以给出任意两层的结构; 上三层 K_0/K_3 (即幂为 p^3) 的 Δ -不变子群的结果可以给出任意三层的结构. 在本文所考虑的情形中, 我们可以轻松地给出上五层 K_0/K_5 (即幂为 p^5) 的所有 Δ -不变子群. 但是, 上六层和七层的结构需要花费较长的计算时间. 幸运的是, 通过任意六层的结果, 我们便可以确定所有 L 的可能. 在 MAGMA 的帮助下, 我们也

图 1 K 的分层刻画

找到了 K 在幂为 $2^8 = 256$ 时的所有 Δ -不变子群, 从而也直接验证了我们的结论.

3 正八面体的正则覆盖

现在我们考虑正八面体 $\mathcal{M} = \{3, 4\}$ 的交换正则覆盖, 其中 $\mathcal{M}$ 的保方向自同构群同构于对称群 S_4 . 令 G 为一般三角群, 其表示为 $G = \langle x, y, z \mid y^4 = z^2 = xyz = 1 \rangle$, 那么存在唯一的一个 G 的正规子群 N , 使得 $G/N \cong S_4$. 应用 Reidemeister-Schreier 理论或者 MAGMA 中的 Rewrite 命令, 我们可知子群 N 是秩为 7 的交换自由群. 其生成元为

$$\begin{aligned} w_1 &= x^3, & w_2 &= y^{-1}x^2z, & w_3 &= xy^{-1}x^2zx^{-1}, & w_4 &= (yxy^{-1})^3, \\ w_5 &= y^2x^2zy, & w_6 &= zyx^2zyx^{-1}, & w_7 &= xzyx^2zx^{-1}y^{-1}. \end{aligned}$$

简单计算可知生成元 x, y 与 z 的共轭作用如下:

$$\begin{aligned} w_1^x &= w_1, & w_1^y &= w_2, & w_1^z &= w_2, \\ w_2^x &= w_4, & w_2^y &= w_5, & w_2^z &= w_1, \\ w_3^x &= w_2, & w_3^y &= w_6, & w_3^z &= w_5, \\ w_4^x &= w_3, & w_4^y &= w_1, & w_4^z &= w_6, \\ w_5^x &= w_1^{-1}w_7, & w_5^y &= w_4, & w_5^z &= w_3, \\ w_6^x &= w_5, & w_6^y &= (w_2w_3w_4w_5w_6w_7)^{-1}, & w_6^z &= w_4, \\ w_7^x &= w_1w_6, & w_7^y &= w_2w_3, & w_7^z &= (w_3w_4w_5w_6w_7)^{-1}. \end{aligned}$$

在商群 G/N' 中, 即自由交换群 $N/N' \cong \mathbb{Z}^7$ 由 $G/N \cong S_4$ 扩张所得, 将生成元 x, y, z 和所有 w_i 替换成它们在 G/N' 中的像, 同时, 令 K 为子群 N/N' . 由以上观察可知, 生成元 x, y 和 z 在自由交换群 $K \cong \mathbb{Z}^7$ 上的共轭作用诱导出的线性变换如下:

$$\begin{aligned} x \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ y \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & z \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注 1 分别对应 y 和 z 的矩阵的迹均为 -1 .

对称群 S_4 的特征表如表 1 所示.

通过对上述矩阵的迹的观察不难看出, S_4 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 7- 维表示的特征为 $\chi_2 + \chi_4 + \chi_5$, 并且可以分解为 χ_2, χ_4 与 χ_5 的和, 即分别为 1, 3, 3 维的不可约表示. 因此, 对于任一素数 $k \notin \{2, 3\}$, 群 $K/K^{(k)} \cong (\mathbb{Z}_k)^7$ 是三个 G - 不变的不可约子群 (其秩分别为 1, 3 与 3) 的直和.

在下文的两小节内容中, 对于任意正整数 m , 令 $K^{(m)}$ 记为由 K 的所有元素的 m 次幂组成的子群. 对于素数 k 和非负整数 j , 令 $m = k^j$, 记 $K_j = K^{(k^j)}$. 在 K/K_ℓ 的任一层 K_{j-1}/K_j 上, 我们将分类所有 G - 不变子群.

3.1 特征不为 2

首先, 当素数 k 不为 2 与 3 时, 商群 $K/K^{(k)} \cong (\mathbb{Z}_k)^7$ 为三个秩分别为 1, 3 和 3 的不可约 G - 不变子群的直和. 事实上, 这三个子群是唯一的, 并且很容易给出. 令整数 c, d, e 分别为 k 的幂次, 那么存在一个 K 的 G - 不变子群 L , 使得其指数 $|K : L| = cd^3e^3$ 并且商 $K/L \cong \mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$.

当 $k = 3$ 时, $K/K^{(k)} \cong (\mathbb{Z}_3)^7$ 存在 7 个 G - 不变子群. 与其他素数 k 类似, 它们的秩也分别为 1, 3, 4, 6 和 7. 令 U_1 为秩为 1 的子群, 且由 $w_5w_6w_7$ 生成; 令 U_2 和 U_3 为两个秩为 2 的子群分别由 $\{w_1w_2w_5^{-1}w_6^{-1}w_7, w_3w_5w_6^{-1}w_7^{-1}, w_4w_5^{-1}w_6w_7^{-1}\}$ 和 $\{w_1w_2^{-1}w_7^{-1}, w_3w_5, w_4w_6\}$ 生成. 两个秩为 4 的子群就可表示成为 $U_1 \oplus U_2$ 和 $U_1 \oplus U_3$, 秩为 6 的子群为 $U_2 \oplus U_3$, 秩为 7 的子群为 $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \cong (\mathbb{Z}_3)^7$.

在群 $K/K^{(9)}$ 中, 存在 19 个 G - 不变子群, 我们分别将这 19 个子群用有序对 (U_i, U_j) 表示, 其中 U_i 和 U_j 分别表示 L 的第一层 L_0/L_1 和第二层 L_1/L_2 . 那么, 这 19 个子群可分别表示为 $(U_1, U_1), (U_2, U_2), (U_3, U_3), (U_1, U_1 \oplus U_2), (U_2, U_1 \oplus U_2), (U_1 \oplus U_2, U_1 \oplus U_2), (U_1, U_1 \oplus U_3), (U_3, U_1 \oplus U_3), (U_1 \oplus U_3, U_1 \oplus U_3), (U_2, U_2 \oplus U_3), (U_3, U_2 \oplus U_3), (U_2 \oplus U_3, U_2 \oplus U_3), (U_1, U_1 \oplus U_2 \oplus U_3), (U_2, U_1 \oplus U_2 \oplus U_3), (U_3, U_1 \oplus U_2 \oplus U_3), (U_1 \oplus U_2, U_1 \oplus U_2 \oplus U_3), (U_1 \oplus U_3, U_1 \oplus U_2 \oplus U_3), (U_2 \oplus U_3, U_1 \oplus U_2 \oplus U_3)$ 和 $(U_1 \oplus U_2 \oplus U_3, U_1 \oplus U_2 \oplus U_3)$.

到目前为止, 当 $k \neq 2$ 时, 以上内容便完成了对 $K/K^{(m)}$ 的 G - 不变子群的分析.

3.2 特征为 2

当 $k = 2$ 时, L 的分类比较复杂, 其每层的秩可分别取 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 或 7, 并且取决于其上层的秩.

由 MAGMA^[7] 计算可知, $K/K^{(2)}$ 存在 10 个非平凡的 G - 不变真子群, 在这里我们分别用 $T_1, \dots, T_{10}$ 来标记. 令 $x_1 = w_1w_6, x_2 = w_2w_6, x_3 = w_3w_6, x_4 = w_4w_6, x_5 = w_5w_6, x_6 = w_7$, 上述 10 个 G - 不变子群的具体结构如下表 2 所示.

表 1 对称群 S_4 的特征表

元素的阶	1	2	2	3	4
类长	1	3	6	8	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	2	2	0	-1	0
χ_4	3	-1	-1	0	1
χ_5	3	-1	1	0	-1

当 $m = 2^\ell$ 的取值较大时, 其中 $\ell > 1$, 对于所有正整数 j , 在 K 的第 j 层 $K_{j-1}/K_j = K^{(2^{j-1})}/K^{(2^j)}$ 中, G -不变子群都同构于 $K/K^{(2)}$ 中的不变子群. 但是如何验证相邻的两层是否可以拼接在一起将是解决问题的关键所在. 我们将首先对 $m = 2^2, 2^3, 2^4$ 或 2^5 时, 所有 L 的情形作完全分类, 进而推广到更高幂次的情形. 特别地, 当 L 的秩为 7 时, K/L 的幂等于 $m/2$, 因此我们将不考虑 L 的秩为 7 的情形.

按自上而下的顺序, 我们令有序组 $({}^uT_i, {}^vT_j, \dots)$ 表示前 u 层都为群 T_i , 紧接着的 v 层为群 T_j , 以此类推.

由 MAGMA [7] 计算可知, $K/K^{(4)}$ 中存在 53 个非平凡的幂为 4 的 G -不变子群, 分别如下:

秩为 1: $({}^2T_1)$ 一次.

秩为 2: $({}^2T_2)$ 一次.

秩为 3: $(T_1, T_3), (T_1, T_4), (T_2, T_6)$ 和 (T_2, T_7) 分别一次; $(T_1, T_5), (T_2, T_5)$ 和 $({}^2T_7)$ 分别两次; $({}^2T_5)$ 四次.

秩为 4: (T_1, T_8) 一次; $(T_5, T_8), (T_2, T_8), (T_6, T_8), (T_7, T_8)$ 和 $({}^2T_8)$ 分别两次.

秩为 5: $(T_2, T_9), (T_3, T_9), (T_4, T_9)$ 和 $({}^2T_9)$ 分别一次; (T_1, T_9) 和 (T_5, T_9) 分别两次.

秩为 6: $(T_2, T_{10}), (T_3, T_{10}), (T_4, T_{10})$ 和 (T_9, T_{10}) 分别一次; $(T_1, T_{10}), (T_5, T_{10}), (T_6, T_{10}), (T_7, T_{10})$ 和 $({}^2T_{10})$ 分别两次; (T_8, T_{10}) 四次.

注 2 由上述前两层的组合来看, L 中的任意相邻两层的组合中不存在以下情形: $(T_1, T_2), (T_1, T_6), (T_1, T_7), (T_2, T_3), (T_2, T_4), ({}^2T_3), (T_3, T_8), ({}^2T_4), (T_4, T_8), ({}^2T_6), (T_6, T_9), (T_7, T_9)$ 或 (T_8, T_9) .

类似地, 由 MAGMA [7] 计算可知, $K/K^{(8)}$ 中存在 201 个非平凡的幂为 8 的 G -不变子群, 分别如下:

秩为 1: $({}^3T_1)$ 一次.

秩为 3: $({}^2T_1, T_3), ({}^2T_1, T_4), ({}^2T_2, T_6)$ 和 $({}^2T_2, T_7)$ 分别一次; $({}^2T_1, T_5), (T_2, {}^2T_5), (T_2, {}^2T_7)$ 和 $({}^3T_7)$ 分别两次; $({}^3T_5)$ 四次, $(T_1, {}^2T_5)$ 六次.

秩为 4: $({}^2T_1, T_8)$ 一次; $(T_1, {}^2T_8), ({}^2T_2, T_8), (T_2, T_6, T_8)$ 和 (T_2, T_7, T_8) 分别两次; $(T_1, T_5, T_8), (T_2, T_5, T_8), (T_2, {}^2T_8), (T_5, {}^2T_8), (T_6, {}^2T_8), ({}^2T_7, T_8), (T_7, {}^2T_8)$ 和 $({}^3T_8)$ 分别四次; $({}^2T_5, T_8)$ 八次.

秩为 5: (T_2, T_5, T_9) 一次; $({}^2T_1, T_9), (T_1, T_3, T_9), (T_1, T_4, T_9), (T_1, {}^2T_9)$ 和 $({}^2T_5, T_9)$ 分别两次; (T_1, T_5, T_9) 四次.

秩为 6: $({}^2T_2, T_{10}), (T_2, T_9, T_{10}), (T_3, T_9, T_{10}), (T_4, T_9, T_{10})$ 和 $({}^2T_9, T_{10})$ 分别一次; $({}^2T_1, T_{10}), (T_1, T_3, T_{10}), (T_1, T_4, T_{10}), (T_2, T_6, T_{10}), (T_2, T_7, T_{10}), (T_2, {}^2T_{10}), (T_3, {}^2T_{10}), (T_4, {}^2T_{10})$ 和 $(T_9, {}^2T_{10})$ 分别两次; (T_2, T_5, T_{10}) 三次; $(T_1, T_5, T_{10}), (T_1, T_8, T_{10}), (T_1, T_9, T_{10}), (T_1, {}^2T_{10}), (T_5, T_9, T_{10}), (T_5, {}^2T_{10}), (T_6, T_8, T_{10}), (T_6, {}^2T_{10}), ({}^2T_7, T_{10}), (T_7, {}^2T_{10})$ 和 $({}^3T_{10})$ 分别四次; (T_2, T_8, T_{10}) 和 (T_7, T_8, T_{10}) 分别六次; $({}^2T_5, T_{10}), (T_5, T_8, T_{10}), ({}^2T_8, T_{10})$ 和 $(T_8, {}^2T_{10})$ 分别八次.

表 2 $K/K^{(2)}$ 的非平凡 G -不变真子群

秩	生成元 (像)	秩	生成元 (像)
T_1	1 x_5x_6	T_2	2 $x_1x_2x_4x_6, x_3x_4x_5$
T_3	3 $x_1x_3x_4x_6, x_5x_6, x_2x_4x_6$	T_4	3 $x_1x_3x_4x_6, x_2x_3x_6, x_5x_6$
T_5	3 $x_1x_2x_4x_6, x_3x_4x_6, x_5x_6$	T_6	3 $x_1x_2x_5, x_3x_6, x_4x_5x_6$
T_7	3 $x_1x_2x_6, x_3x_5, x_4$	T_8	4 $x_1x_2x_6, x_3x_6, x_4, x_5x_6$
T_9	5 $x_1, x_2x_4, x_3x_4, x_5, x_6$	T_{10}	6 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

注 3 不存在幂为 8 且秩为 2 的正规子群, 从而不存在更高次幂的秩为 2 的正规子群. 因此, 只存在两个秩为 5 的初等交换群覆盖, 其覆盖群为 $(\mathbb{Z}_2)^5$ 和 $(\mathbb{Z}_4)^5$.

注 4 由上述前三层的组合来看, L 中的任意三层的组合中不存在以下情形: $(^2T_2, T_5)$, $(^2T_2, T_9)$, $(T_2, ^2T_9)$, $(T_3, ^2T_9)$, $(T_4, ^2T_9)$, $(T_5, ^2T_9)$ 或 $(^3T_9)$. 因此, 只存在两个秩为 2 的初等交换群覆盖, 其覆盖群为 $(\mathbb{Z}_2)^2$ 和 $(\mathbb{Z}_4)^2$.

由 MAGMA [7] 计算可知, $K/K^{(16)}$ 中存在 506 个非平凡的幂为 16 的 G -不变子群, 分别如下:

秩为 1: $(^4T_1)$ 一次.

秩为 3: $(^3T_1, T_3)$ 和 $(^3T_1, T_4)$ 分别一次; $(^3T_1, T_5)$, $(^2T_2, ^2T_7)$, $(T_2, ^3T_7)$ 和 $(^4T_7)$ 分别两次; $(T_1, ^3T_5)$, $(T_2, ^3T_5)$ 和 $(^4T_5)$ 分别四次; $(^2T_1, ^2T_5)$ 六次.

秩为 4: $(^3T_1, T_8)$ 一次; $(^2T_1, ^2T_8)$, $(^2T_2, T_6, T_8)$ 和 $(^2T_2, T_7, T_8)$ 分别两次; $(^2T_1, T_5, T_8)$, $(T_2, ^2T_5, T_8)$, $(^2T_2, ^2T_8)$, $(T_2, T_6, ^2T_8)$, $(T_2, ^2T_7, T_8)$, $(T_2, T_7, ^2T_8)$, $(T_1, ^3T_8)$, $(T_6, ^3T_8)$, $(^3T_7, T_8)$, $(^2T_7, ^2T_8)$, $(T_7, ^3T_8)$ 和 $(^4T_8)$ 分别四次; $(T_1, T_5, ^2T_8)$, $(T_2, T_5, ^2T_8)$, $(T_2, ^3T_8)$, $(^3T_5, T_8)$ 和 $(T_5, ^3T_8)$ 分别八次; $(T_1, ^2T_5, T_8)$ 分别十二次; $(^2T_5, ^2T_8)$ 十六次.

秩为 5: $(^3T_1, T_9)$, $(^2T_1, T_3, T_9)$, $(^2T_1, T_4, T_9)$ 和 $(T_2, ^2T_5, T_9)$ 分别两次; $(^2T_1, T_5, T_9)$, $(^2T_1, ^2T_9)$, $(T_1, ^2T_5, T_9)$, $(^3T_5, T_9)$ 分别四次.

秩为 6: $(^2T_2, T_6, T_{10})$, $(^2T_2, T_7, T_{10})$, $(^2T_2, ^2T_{10})$, (T_2, T_5, T_9, T_{10}) , $(T_2, T_9, ^2T_{10})$, $(T_3, T_9, ^2T_{10})$, $(T_4, T_9, ^2T_{10})$ 和 $(^2T_9, ^2T_{10})$ 分别一次; $(^3T_1, T_{10})$, $(^2T_1, T_3, T_{10})$, $(^2T_1, T_4, T_{10})$, $(T_2, ^2T_5, T_{10})$, $(T_3, ^3T_{10})$, $(T_2, T_6, ^2T_{10})$, $(T_2, T_7, ^2T_{10})$, $(T_2, ^3T_{10})$, $(T_1, T_3, ^2T_{10})$, $(T_1, T_4, ^2T_{10})$, $(T_4, ^3T_{10})$, $(T_6, ^3T_{10})$, $(T_7, ^3T_{10})$, $(T_9, ^3T_{10})$ 和 $(^4T_{10})$ 分别两次; $(^2T_1, T_5, T_{10})$, $(^2T_1, T_8, T_{10})$, $(^2T_1, T_9, T_{10})$, $(T_1, T_9, ^2T_{10})$, $(^2T_2, T_8, T_{10})$, $(^2T_5, T_9, T_{10})$, $(T_2, T_5, ^2T_{10})$, (T_2, T_6, T_8, T_{10}) , $(T_2, ^2T_7, T_{10})$, $(T_5, T_9, ^2T_{10})$, $(^3T_7, T_{10})$, $(^2T_7, ^2T_{10})$, $(T_1, ^3T_{10})$, $(T_5, ^3T_{10})$ 和 $(T_8, ^3T_{10})$ 分别四次; $(^2T_1, ^2T_{10})$, $(T_6, ^2T_8, T_{10})$, (T_2, T_7, T_8, T_{10}) , $(^2T_7, T_8, T_{10})$, $(T_7, ^2T_8, T_{10})$, $(T_6, T_8, ^2T_{10})$ 和 $(T_7, T_8, ^2T_{10})$ 分别六次; (T_1, T_5, T_9, T_{10}) , $(T_1, ^2T_8, T_{10})$, (T_2, T_5, T_8, T_{10}) , $(T_2, T_8, ^2T_{10})$, $(^3T_5, T_{10})$ 和 $(^3T_8, T_{10})$ 分别八次; $(T_1, ^2T_5, T_{10})$, $(T_1, T_5, ^2T_{10})$, $(T_1, T_8, ^2T_{10})$, $(T_2, ^2T_8, T_{10})$ 和 $(^2T_8, ^2T_{10})$ 分别十二次; (T_1, T_5, T_8, T_{10}) 十四次; $(^2T_5, ^2T_{10})$, $(T_5, ^2T_8, T_{10})$ 和 $(T_5, T_8, ^2T_{10})$ 分别十六次; $(^2T_5, T_8, T_{10})$ 二十次.

注 5 由上述前四层的组合来看, 如果 L 中存在不同结构的四层, 那么其可能性只能如下所示: (T_1, T_5, T_8, T_{10}) , (T_1, T_5, T_9, T_{10}) , (T_2, T_5, T_8, T_{10}) , (T_2, T_5, T_9, T_{10}) , (T_2, T_6, T_8, T_{10}) 或 (T_2, T_7, T_8, T_{10}) . 它们都以 T_{10} 作为最下层, 因此, L 中不存在不同结构的五层.

在子群 $K/K^{(32)}$ 中, 存在 972 个非平凡的幂为 32 的 G -不变子群, 分别如下:

秩为 1: $(^5T_1)$ 一次.

秩为 3: $(^4T_1, T_3)$ 和 $(^4T_1, T_4)$ 分别一次; $(^4T_1, T_5)$, $(T_2, ^4T_7)$, $(^2T_2, ^3T_7)$ 和 $(^5T_7)$ 分别两次; $(T_2, ^4T_5)$, $(T_1, ^4T_5)$ 和 $(^5T_5)$ 分别四次; $(^3T_1, ^2T_5)$ 六次.

秩为 4: $(^4T_1, T_8)$ 一次; $(^3T_1, ^2T_8)$ 两次; $(^3T_1, T_5, T_8)$, $(^2T_2, ^2T_7, T_8)$, $(^2T_2, T_7, ^2T_8)$, $(^2T_1, ^3T_8)$, $(T_2, ^3T_5, T_8)$, $(T_2, ^2T_5, ^2T_8)$, $(^2T_2, ^3T_8)$, $(T_2, T_6, ^3T_8)$, $(T_2, ^3T_7, T_8)$, $(T_2, T_7, ^3T_8)$, $(T_1, ^4T_8)$, $(T_6, ^4T_8)$, $(^4T_7, T_8)$, $(^3T_7, ^2T_8)$, $(^2T_7, ^3T_8)$, $(T_7, ^4T_8)$ 和 $(^5T_8)$ 分别四次; $(^2T_1, T_5, ^2T_8)$, $(T_1, ^3T_5, T_8)$, $(T_2, ^2T_7, ^2T_8)$, $(T_2, T_5, ^3T_8)$, $(T_2, ^4T_8)$, $(^4T_5, T_8)$, $(^3T_5, ^2T_8)$ 和 $(T_5, ^4T_8)$ 分别八次; $(^2T_1, ^2T_5, T_8)$ 和 $(T_1, T_5, ^3T_8)$ 分别二十次; $(^2T_5, ^3T_8)$ 十六次; $(T_1, ^2T_5, ^2T_8)$ 二十次.

秩为 5: $(^4T_1, T_9)$, $(^3T_1, T_3, T_9)$, $(^3T_1, T_4, T_9)$ 和 $(T_2, ^3T_5, T_9)$ 分别两次; $(^3T_1, T_5, T_9)$, $(^3T_1, ^2T_9)$, $(T_1, ^3T_5, T_9)$ 和 $(^4T_5, T_9)$ 分别四次.

秩为 6: $(^2T_2, T_6, ^2T_{10})$, $(^2T_2, T_7, ^2T_{10})$, $(^2T_2, ^3T_{10})$, $(T_2, T_5, T_9, ^2T_{10})$, $(T_2, T_9, ^3T_{10})$, $(T_3, T_9, ^3T_{10})$, $(T_4, T_9, ^3T_{10})$ 和 $(^2T_9, ^3T_{10})$ 分别一次; $(^4T_1, T_{10})$, $(^3T_1, T_3, T_{10})$, $(^3T_1, T_4, T_{10})$, $(T_1, T_3, ^3T_{10})$, $(T_1, T_4, ^3T_{10})$,

$(^2T_2, T_6, T_8, T_{10}), (^2T_2, ^2T_7, T_{10}), (T_2, ^2T_5, T_9, T_{10}), (T_2, T_6, ^3T_{10}), (T_2, T_7, ^3T_{10}), (T_2, ^4T_{10}), (T_3, ^4T_{10}), (T_4, ^4T_{10}), (T_6, ^4T_{10}), (T_7, ^4T_{10}), (T_9, ^4T_{10})$ 和 $(^5T_{10})$ 分别两次; $(^3T_1, T_5, T_{10}), (^3T_1, T_8, T_{10}), (^3T_1, T_9, T_{10}), (^2T_1, ^3T_{10}), (T_1, ^4T_{10}), (^2T_2, T_7, T_8, T_{10}), (^2T_2, T_8, ^2T_{10}), (T_2, ^3T_5, T_{10}), (T_2, ^2T_5, ^2T_{10}), (T_2, T_5, ^3T_{10}), (T_2, ^3T_7, T_{10}), (T_2, ^2T_7, ^2T_{10}), (^3T_5, T_9, T_{10}), (^2T_5, T_9, ^2T_{10}), (T_5, T_9, ^3T_{10}), (T_5, ^4T_{10}), (T_6, T_8, ^3T_{10}), (T_7, T_8, ^3T_{10}), (^4T_7, T_{10}), (^3T_7, ^2T_{10}), (^2T_7, ^3T_{10})$ 和 $(T_8, ^4T_{10})$ 分别四次; $(^3T_1, ^2T_{10}), (T_1, T_9, ^3T_{10}), (T_2, T_6, T_8, ^2T_{10}), (T_2, T_7, T_8, ^2T_{10}), (T_2, T_8, ^3T_{10}), (T_6, ^3T_8, T_{10}), (^3T_7, T_8, T_{10})$ 和 $(T_7, ^3T_8, T_{10})$ 分别六次; $(^2T_1, T_5, T_9, T_{10}), (^2T_1, ^2T_8, T_{10}), (T_1, ^3T_5, T_{10}), (T_1, ^2T_5, T_9, T_{10}), (^2T_1, T_9, ^2T_{10}), (T_1, ^3T_8, T_{10}), (T_1, T_8, ^3T_{10}), (^2T_2, ^2T_8, T_{10}), (T_2, ^2T_5, T_8, T_{10}), (T_2, T_6, ^2T_8, T_{10}), (T_2, T_7, ^2T_8, T_{10}), (T_5, ^3T_5, T_{10}), (^2T_7, ^2T_8, T_{10}), (^2T_7, T_8, ^2T_{10}), (^4T_8, T_{10})$ 和 $(^2T_8, ^3T_{10})$ 分别八次; $(T_2, ^2T_7, T_8, T_{10}), (T_6, ^2T_8, ^2T_{10})$ 和 $(T_7, ^2T_8, ^2T_{10})$ 分别十次; $(^2T_1, ^2T_5, T_{10}), (^2T_1, T_5, ^2T_{10}), (^2T_1, T_8, ^2T_{10}), (T_1, T_5, ^3T_{10}), (T_1, ^2T_8, ^2T_{10}), (T_2, ^3T_8, T_{10}), (^3T_5, ^2T_{10}), (T_5, ^2T_8, ^2T_{10}), (T_5, T_8, ^3T_{10})$ 和 $(T_8, ^2T_8, ^2T_{10})$ 分别十二次; $(^2T_1, T_5, T_8, T_{10})$ 和 $(^2T_5, ^3T_{10})$ 分别十四次; $(T_2, T_5, ^2T_8, T_{10}), (T_2, T_5, T_8, ^2T_{10}), (T_2, ^2T_8, ^2T_{10}), (T_5, ^2T_5, T_8, T_{10})$ 和 $(T_5, ^3T_8, T_{10})$ 分别十六次; $(T_1, ^2T_5, ^2T_{10})$ 和 $(T_1, T_5, ^2T_8, T_{10})$ 分别二十四次; $(T_1, ^2T_5, T_8, T_{10}), (T_1, T_5, T_8, ^2T_{10}), (^2T_5, ^2T_8, T_{10})$ 和 $(^2T_5, T_8, ^2T_{10})$ 分别二十八次。

类似地, 当 $m = 2^6$ 或 2^7 时, 我们可以找到所有 $K/K^{(m)}$ 中的 $G/K^{(m)}$ 的正规子群. 特别地, 我们用 MAGMA 计算出了 $K/K^{(256)}$ 中的所有 $G/K^{(256)}$ 的正规子群, 但是计算时间花费了 3 天.

根据 L 的六层的组合结构我们可以将层数推广到无限. 现在我们将所有 G -不变子群 L 分成十类, 每一类分别由不同的 T_i (对于 $1 \leq i \leq 10$) 作为最上层. 所有的幂次为 $k \geq 2^6$ 情形在附录中的表 1 (u, v 为整数, 并且 c, d, e 为 2^ℓ 的因子, 并且满足 $c < d < e$) 中给出. 附录中的表 1 中的每一行描述了一类子群, 其中从左到右的列分别给出的是此类群的数量、变量的取值范围、 L 的结构和交换商群 K/L .

- (1) 如果 T_{10} 作为 L 的顶层, 那么下层全为 T_{10} .
- (2) 如果 T_9 作为 L 的顶层, 那么第二层可以为 T_9 或 T_{10} . 但由注 3 可知第三层必须为 T_{10} .
- (3) 如果 T_8 作为 L 的顶层, 那么其他的层只能是 T_8 或 T_{10} . 特别地, 由于不存在 $(^3T_8, ^3T_{10})$ 的情形, 因此 L 不可能为 $(^uT_8, ^vT_{10})$, 其中 $u, v \geq 3$.
- (4) 如果 T_7 作为 L 的顶层, 并且 L 中不存在不同结构的两层, 那么 L 可被看作为“塔”. 如果 L 中存在不同结构的两层或三层, 那么 T_8 或 T_{10} 可以是另外的一层.
- (5) 如果 T_6 作为 L 的顶层, 由注 1 可知 L 不能有“塔”的结构. 如果 L 中存在不同结构的两层或三层, 那么 T_8 或 T_{10} 可以是另外的一层.
- (6) 如果 T_5 作为 L 的顶层, 我们知道 L 可以是“塔”. 如果 L 中存在不同结构的两层, 那么另外一层可以是 T_8, T_9 或 T_{10} ; 如果 L 中存在不同结构的三层, 那么另外两层的组合可以是 T_8 和 T_{10} , 或 T_9 和 T_{10} .
- (7) 如果 T_4 作为 L 的顶层, 我们知道 L 不能是“塔”. 不同于 T_4 的其他层可能为 T_9 或 T_{10} .
- (8) 如果 T_3 作为 L 的顶层, 我们知道 L 不能是“塔”. 不同于 T_3 的其他层可能为 T_9 或 T_{10} .
- (9) 如果 T_2 作为 L 的顶层, 那么我们知道 L 的秩为 2 当且仅当 L 为 $(^uT_2)$, 其中 $u = 1$ 或 2; 如果 L 中存在两个不同的层, 那么另外一层可能为 T_5, T_7, T_8, T_9 或 T_{10} ; 如果 L 中存在三个不同的层, 那么另外两层有以下九种不同的组合方式: T_5 和 T_8 , 或 T_5 和 T_9 , 或 T_5 和 T_{10} , 或 T_6 和 T_8 , 或 T_6 和 T_{10} , 或 T_7 和 T_8 , 或 T_7 和 T_{10} , 或 T_8 和 T_{10} , 或 T_9 和 T_{10} ; 如果 L 中存在四个不同的层, 那么有以下四种不同的组合方式: T_5, T_8 和 T_{10} , 或 T_5, T_9 和 T_{10} , 或 T_6, T_8 和 T_{10} , 或 T_7, T_8 和 T_{10} .
- (10) 如果 T_1 作为 L 的顶层, 那么 L 可以为“塔”. 如果 L 中存在两个不同的层, 那么另外一层可

能为 T_3, T_4, T_5, T_8, T_9 或 T_{10} ; 如果 L 中存在三个不同的层, 那么另外两层有以下九种不同的组合方式: T_3 和 T_9 , 或 T_3 和 T_{10} , 或 T_4 和 T_9 , 或 T_4 和 T_{10} , 或 T_5 和 T_8 , 或 T_5 和 T_9 , 或 T_5 和 T_{10} , 或 T_8 和 T_{10} , 或 T_9 和 T_{10} . 如果 L 中存在四个不同的层, 那么有以下两种不同的组合方式: T_5, T_8 和 T_{10} , 或 T_5, T_9 和 T_{10} .

4 主要结果

综上所述, 我们有以下分类结果. 表格中的每一行描述了一类或两类覆盖, 其中从左到右的列分别给出的是此类群的数量、变量的取值范围和覆盖群 $\mathcal{K}$. 特别地, “条件” 一栏中的 $d \mid m$ 和 $d \parallel m$ 分别表示 d 为 m 的因子和真因子.

定理 1 正八面体的交换正则覆盖的完全分类如下, 其中对于任意素数 k 和正整数 ℓ , 覆盖群 $\mathcal{K}$ 的幂次为 $m = k^\ell$:

- (1) 当 $k \neq 2$ 时, 参见附录中的表 2;
 - (2) 当 $k = 2, \ell \geq 6$ 时, 参见附录中的表 3;
 - (3) 当 $k = 2, \ell \leq 5$ 时, 参见附录中的表 4.
- 特别地, 当 $\ell = 5$ 时, 参见附录中的表 5.

参考文献

- 1 Jones G, Surowski D. Regular cyclic coverings of the platonic maps. *Europ J Combin*, 2000, 21: 333–345
- 2 Conder M, Everitt B. Regular maps on non-orientable surfaces. *Geom Dedicata*, 1995, 56: 209–219
- 3 Conder D E M, Ma J C. Regular maps with simple underlying graphs. *J Combin Theory Ser B*, 2015, 110: 1–18
- 4 Jones A G. Elementary abelian regular coverings of the Platonic maps case I: Ordinary representations. *J Algebraic Comb*, 2015, 41: 461–491
- 5 Conder M, Sirán J, Tucker W T. The genera, reflexivity and simplicity of regular maps. *J Eur Math Soc*, 2010, 12: 343–364
- 6 Conder D E M, Ma J. Arc-transitive abelian covers of cubic graphs. *J Algebra*, 2013, 387: 215–242
- 7 Bosma W, Cannon J, Playoust C. The MAGMA algebra system I: The user language. *J Symbolic Comput*, 1997, 24: 235–265
- 8 Conder M, Dobcsányi P. Determination of all regular maps of small genus. *J Combin Theory Ser B*, 2001, 81: 224–242

附录

表 1 幂次为 2^ℓ 的 G -不变子群 L 的分类

数量	条件	L 的结构	商 K/L
2	$u \geq 2$	$({}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^6 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$({}^2T_9, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^5 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 2$	$(T_9, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^5 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$({}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
4	$u \geq 3$	$(T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
8	$u \geq 2$	$({}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
8	$u \geq 2$	$({}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{2}} \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
12	$u \geq 2$	$({}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
2	$u \geq 2$	$({}^uT_7)$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$

续表

数量	条件	L 的结构	商 K/L
4	$u, v \geq 1, u + v \geq 3$	$({}^uT_7, {}^vT_8)$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 1$	$(T_7, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 1, v \geq 2$	$({}^vT_7, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2$	$(T_7, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$(T_7, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
10	$u \geq 2$	$(T_7, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 1$	$(T_7, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u, v \geq 2$	$({}^vT_7, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 2$	$({}^uT_7, T_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u, v \geq 2$	$({}^uT_7, {}^vT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 2$	$({}^uT_7, {}^2T_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{16}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2, v \geq 3$	$({}^uT_7, {}^2T_8, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2, v \geq 3$	$({}^uT_7, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2$	$(T_6, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 3$	$(T_6, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$(T_6, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$(T_6, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 3$	$(T_6, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 2$	$(T_6, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2$	$({}^uT_5)$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
8	$u \geq 3$	$(T_5, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
8	$u \geq 2$	$({}^uT_5, T_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{2}} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
16	$u \geq 2$	$({}^2T_5, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
8	$u \geq 3, v \geq 2$	$({}^uT_5, {}^vT_8)$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
4	$u \geq 3$	$({}^uT_5, T_9)$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
4	$u \geq 2$	$(T_5, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
14	$u \geq 3$	$({}^2T_5, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3, v \geq 2$	$({}^uT_5, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2$	$({}^uT_5, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3$	$(T_5, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$(T_5, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 2$	$(T_5, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$({}^2T_5, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
20	$u \geq 2$	$({}^2T_5, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
20	$u \geq 3$	$({}^uT_5, T_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{8}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
28	$u \geq 2$	$({}^2T_5, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3, v \geq 2$	$({}^uT_5, {}^vT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 3$	$({}^uT_5, T_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u, v \geq 3$	$({}^uT_5, T_8, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3, v \geq 2$	$({}^uT_5, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u, v \geq 1$	$({}^uT_5, T_9, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 2$	$(T_4, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$(T_4, T_9, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_e$

续表

数量	条件	L 的结构	商 K/L
2	$u \geq 1$	$(T_3, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$(T_3, T_9, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_7)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
2	$u \geq 2$	$({}^2T_2, {}^uT_7)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
4	$u \geq 3$	$(T_2, {}^uT_5)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
8	$u \geq 3$	$(T_2, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^4 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2$	$({}^2T_2, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
1	$u \geq 1$	$({}^2T_2, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^4 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2$	$(T_2, T_5, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
4	$u \geq 2, v \geq 1$	$(T_2, {}^uT_5, {}^vT_8)$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_5, T_9)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
4	$u = 1, 2, v \geq 2$	$(T_2, {}^uT_5, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$(T_2, {}^uT_5, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 2$	$(T_2, {}^3T_5, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{16d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 3, v \geq 2$	$(T_2, {}^uT_5, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2$	$(T_2, T_6, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 1$	$(T_2, T_6, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$({}^2T_2, T_6, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2$	$(T_2, T_7, {}^uT_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
4	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_7, T_8)$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{2}} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
8	$u, v \geq 2$	$(T_2, {}^uT_7, {}^vT_8)$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
4	$u, v \geq 1, u + v \geq 3$	$({}^2T_2, {}^uT_7, {}^vT_8)$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 1$	$(T_2, T_7, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2, v \geq 1$	$(T_2, {}^uT_7, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$({}^2T_2, T_7, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 2, v \geq 1$	$({}^2T_2, {}^uT_7, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4c} \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 1$	$(T_2, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$(T_2, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 1$	$({}^2T_2, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2$	$({}^2T_2, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$({}^2T_2, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{16d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$({}^2T_2, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$(T_2, T_9, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3$	$(T_2, T_5, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$(T_2, T_5, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 2$	$(T_2, T_5, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2, v \geq 3$	$(T_2, {}^uT_5, T_8, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u, v \geq 2$	$(T_2, {}^uT_5, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_5, T_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{8}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 1$	$(T_2, {}^uT_5, T_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{e}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{e}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$

续表

数量	条件	L 的结构	商 K/L
8	$u, v \geq 2$	$(T_2, {}^uT_5, {}^vT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$(T_2, T_5, T_9, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 2, v \geq 1$	$(T_2, {}^uT_5, T_9, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 2$	$(T_2, T_6, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$(T_2, T_6, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{16d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$(T_2, T_6, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$(T_2, T_6, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u = 1, 2$	$(T_2, T_6, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{16d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 1$	$({}^2T_2, T_6, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{16d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 1$	$(T_2, T_7, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 1$	$({}^2T_2, T_7, T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{16d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3$	$(T_2, T_7, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{16d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3$	$({}^2T_2, T_7, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{32d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$(T_2, T_7, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$({}^2T_2, T_7, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$(T_2, T_7, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2$	$({}^2T_2, T_7, {}^uT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u, v \geq 2$	$(T_2, {}^uT_7, T_8, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u, v \geq 2$	$({}^2T_2, {}^uT_7, T_8, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
10	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_7, T_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{c}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 2$	$({}^2T_2, {}^uT_7, T_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{c}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_7, {}^2T_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{c}{8}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 1$	$({}^2T_2, {}^uT_7, {}^2T_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{c}{8}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2, v \geq 3$	$(T_2, {}^uT_7, {}^vT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2, v \geq 3$	$({}^2T_2, {}^uT_7, {}^vT_8, T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
20	$u \geq 2$	$(T_2, {}^uT_7, {}^2T_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{c}{16}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 1$	$({}^2T_2, {}^uT_7, {}^2T_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{c}{16}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3$	$({}^2T_2, T_7, {}^2T_8, {}^uT_{10})$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{32d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 2, v \geq 3$	$(T_2, {}^uT_7, {}^2T_8, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2, v \geq 3$	$({}^2T_2, {}^uT_7, {}^2T_8, {}^vT_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2, v \geq 3$	$(T_2, {}^uT_7, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 2, v \geq 3$	$({}^2T_2, {}^uT_7, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$(\mathbb{Z}_c)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4c} \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
1	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_3)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
1	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_4)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_5)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
4	$u \geq 3$	$(T_1, {}^uT_5)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
6	$u \geq 1$	$({}^uT_1, {}^2T_5)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^4$
1	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_8)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^3 \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
4	$u \geq 1, v \geq 3$	$({}^uT_1, {}^vT_8)$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, {}^2T_8)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^3 \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_9)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^4 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
4	$u \geq 2$	$({}^uT_1, {}^2T_9)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{4}})^4 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{c}{2}})^5 \oplus \mathbb{Z}_e$

续表

数量	条件	L 的结构	商 K/L
6	$u \geq 2$	$({}^uT_1, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^5 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 3$	$({}^2T_1, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^5 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 2$	$(T_1, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^5 \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_3, T_9)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_3, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 1$	$(T_1, T_3, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_4, T_9)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
2	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_4, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
2	$u \geq 2$	$(T_1, T_4, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_5, T_8)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
12	$u \geq 1, v \geq 3$	$({}^uT_1, T_5, {}^vT_8)$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
8	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_5, {}^2T_8)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
20	$u \geq 1, v \geq 2$	$({}^uT_1, {}^2T_5, {}^vT_8)$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
12	$u \geq 1$	$({}^uT_1, {}^2T_5, T_8)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}} \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
8	$u \geq 3, v \geq 1$	$(T_1, {}^uT_5, {}^vT_8)$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_{2c})^2 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_e)^3$
4	$u \geq 1$	$(T_1, {}^uT_5, T_9)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
4	$u \geq 2$	$({}^uT_1, T_5, T_9)$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_e)^2$
12	$u \geq 2$	$(T_1, T_5, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$(T_1, {}^uT_5, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2, v \geq 3$	$(T_1, {}^uT_5, {}^vT_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_{2c})^2 \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 3$	$(T_1, {}^uT_5, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_5, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2$	$({}^uT_1, T_5, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 1$	$({}^uT_1, {}^2T_5, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 2$	$({}^uT_1, {}^2T_5, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{16}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^3 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$(T_1, T_8, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u, v \geq 1$	$({}^uT_1, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^3 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 1, v \geq 2$	$({}^uT_1, {}^vT_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
4	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_9, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^4 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}} \oplus \mathbb{Z}_e$
6	$u \geq 3$	$(T_1, T_9, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^4 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u, v \geq 1$	$(T_1, {}^uT_5, T_9, {}^vT_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_{2c})^2 \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_5, T_9, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}} \oplus \mathbb{Z}_e$
16	$u \geq 3$	$(T_1, {}^uT_5, T_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
20	$u \geq 2$	$({}^uT_1, {}^2T_5, T_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{16}})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
14	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_5, T_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
24	$u \geq 1, v \geq 2$	$({}^uT_1, T_5, {}^vT_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
32	$u \geq 2$	$(T_1, {}^2T_5, {}^uT_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
28	$u, v \geq 2$	$({}^uT_1, {}^2T_5, {}^vT_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3, v \geq 2$	$(T_1, {}^uT_5, {}^vT_8, T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_{2c})^2 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
20	$u \geq 1, v \geq 2$	$({}^uT_1, T_5, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
20	$u \geq 1$	$({}^uT_1, T_5, T_8, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{16}})^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
24	$u \geq 2$	$({}^uT_1, {}^vT_5, T_8, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{8}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{\epsilon}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$

续表

数量	条件	L 的结构	商 K/L
28	$u \geq 2$	$(T_1, {}^2T_5, {}^uT_8, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{8d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{d}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 3, v \geq 2$	$(T_1, {}^uT_5, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_{2c})^2 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{d}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
24	$u, v \geq 2$	$({}^uT_1, {}^2T_5, {}^vT_8, {}^2T_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{d}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
8	$u \geq 3$	$(T_1, T_5, T_8, {}^uT_{10})$	$\mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$
12	$u \geq 2, v \geq 3$	$(T_1, {}^uT_5, T_8, {}^vT_{10})$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_{2c})^2 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_e$

表 2 当 $k \neq 2$ 时, $\mathcal{K}$ 的分类

No.	条件	$\mathcal{K}$	No.	条件	$\mathcal{K}$
1		$\mathbb{Z}_m^7$	1	$c, d \mid m$, 且 $c \parallel m$ 或 $d \parallel m$	$\mathbb{Z}_c \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$, $(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_m$

表 3 当 $k = 2, \ell \geq 6$ 时, $\mathcal{K}$ 的分类

No.	条件	$\mathcal{K}$	No.	条件	$\mathcal{K}$
1		$\mathbb{Z}_m^7$	1	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^6 \oplus \mathbb{Z}_m$
1	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^5 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_m$	1	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^5 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus \mathbb{Z}_m$
4	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$	4	$d \parallel \frac{m}{8}$	$\mathbb{Z}_d^4 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^2$
8	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^2$	8	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{m}{2}} \oplus (\mathbb{Z}_m)^2$
12	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^4 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{m}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_m)^2$	2	$d \parallel \frac{m}{2}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_m)^4$
4	$c \parallel d \parallel m$, 且 $c \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$	12	$d \parallel \frac{m}{2}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_m$
4	$2c \mid d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_m$	4	$d \mid \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
8	$d \parallel \frac{m}{32}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	10	$d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
6	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	8	$4c \mid d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
16	$d \parallel \frac{m}{32}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{m}{16}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	12	$4c \mid d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
12	$4c \mid d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	4	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$
4	$d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	4	$d \parallel \frac{m}{32}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
6	$d \parallel \frac{m}{32}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	6	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
4	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_m)^4$	8	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$
8	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{m}{2}} \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$	16	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$
8	$8c \mid d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$	4	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^2 \oplus (\mathbb{Z}_m)^2$
4	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^3 \oplus \mathbb{Z}_m$	14	$d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^3 \oplus \mathbb{Z}_m$
12	$8c \mid d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus (\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_m$	8	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^3 \oplus \mathbb{Z}_m$
12	$d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	12	$d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
16	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	8	$d \parallel \frac{m}{32}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{8d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
20	$d \parallel \frac{m}{32}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	20	$d \parallel \frac{m}{32}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{m}{8}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
28	$d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	12	$8c \mid d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
16	$d \parallel \frac{m}{16}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{m}{4}} \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{2}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	12	$8c \mid d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
8	$8c \mid d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$	4	$2c \mid d \parallel \frac{m}{2}$	$(\mathbb{Z}_c)^3 \oplus \mathbb{Z}_d \oplus (\mathbb{Z}_{\frac{m}{4}})^2 \oplus \mathbb{Z}_m$
2	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus \mathbb{Z}_m$	2	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^4$
2	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{4d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^4$	4	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus \mathbb{Z}_{2d} \oplus (\mathbb{Z}_m)^4$
8	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$	2	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{2d})^4 \oplus \mathbb{Z}_m$
4	$d \parallel \frac{m}{8}$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^2 \oplus (\mathbb{Z}_m)^3$	1	$d \parallel \frac{m}{4}$	$(\mathbb{Z}_d)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{4d})^4 \oplus \mathbb{Z}_m$

续表

[illegible]

续表

[illegible]表 5 当 $k=2, \ell=5$ 时, $\mathcal{K}$ 的分类

No.	$\mathcal{K}$
1	$(\mathbb{Z}_{25})^6$
1	$(\mathbb{Z}_{24})^3 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3, (\mathbb{Z}_{22})^4 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_{22})^2 \oplus \mathbb{Z}_{23} \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus \mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{25}$
2	$\mathbb{Z}_{22} \oplus (\mathbb{Z}_{25})^4, (\mathbb{Z}_{23})^3 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3, (\mathbb{Z}_{24})^4 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^2, (\mathbb{Z}_{24})^4 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^2, (\mathbb{Z}_{24})^5 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $\mathbb{Z}_{22} \oplus (\mathbb{Z}_{24})^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_{22} \oplus (\mathbb{Z}_{23})^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_{23})^2 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^4 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_{25}$
4	$(\mathbb{Z}_{24})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^4, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^4, (\mathbb{Z}_{23})^2 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3, \mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3, (\mathbb{Z}_{22})^3 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3,$ $\mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{23} \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3, (\mathbb{Z}_{22})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3, (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^3, (\mathbb{Z}_{23})^4 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^2, (\mathbb{Z}_{24})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{25})^2,$ $(\mathbb{Z}_{23})^3 \oplus (\mathbb{Z}_{24})^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_{23})^4 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_{23})^2 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_{22})^2 \oplus (\mathbb{Z}_{23})^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_{22})^5 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $(\mathbb{Z}_{22})^2 \oplus \mathbb{Z}_{23} \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^5 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_{25})^3$

续表

No.	$\mathcal{K}$
6	$(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^4, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^4, (\mathbb{Z}_5)^4, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^2, (\mathbb{Z}_3)^5 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $(\mathbb{Z}_2)^4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
8	$(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^2,$ $(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
10	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3$
12	$\mathbb{Z}_4 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3,$ $(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_4)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $(\mathbb{Z}_2)^3 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
14	$(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
16	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_3)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_2)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
18	$(\mathbb{Z}_3)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
20	$\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_5)^3$
22	$\mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
24	$(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^3 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
28	$(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, (\mathbb{Z}_2)^2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25},$ $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
32	$\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$
36	$\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_4)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_3)^2 \oplus \mathbb{Z}_{25}$

Abelian regular covers of the octahedron map

MA JiCheng

Abstract In this paper, we classify the orientably-regular maps which are abelian regular coverings of the octahedron map of type $\{3, 4\}$, branched over the faces. A complete classification is given by a layer characterization technique. The method involves studying the arc-transitive abelian regular covering graphs of cubic graphs by Conder and the author.

Keywords octahedron map, regular cover, abelian regular cover

MSC(2010) 05C25, 20B25

doi: 10.1360/012014-59