局部和两点 bocs 的表示型

张英伯*, 张雪颖, 赵双美

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

* E-mail: zhangyb@bnu.edu.cn

收稿日期: 2008-06-13; 接受日期: 2008-10-26

国家自然科学基金 (批准号: 10731070) 资助项目

摘要 设 k 是一个代数闭域, 2005 年, 张等人证明了, 如果域 k 上的一个 bocs 是 tame 表示型的, 则首箭微分的次数必须小于等于 3. 我们在本文中证明: 当首箭微分的次数等于 3 时, bocs 仍然是野型的. 特别地, 只含一个实箭的 bocs 是 tame 型, 当且仅当首箭微分的次数小于等于 2. 在这种情形下, 文章进一步对 bocs 表示范畴的生长情形进行了分类, 给出了 bocs 为有限型、tame 型 domestic 以及 tame 型指数生长的充分必要条件.

关键词 bocs 约化 tame 型 野型 domestic

MSC(2000) 主题分类 15A21, 16G20, 16G60, 16G70

1 引言

令 k 是一个代数闭域, Λ 是一个有限维 k 代数, 它是结合有单位元的. Drozd 著名的 Tame 与 Wild 定理指出, Λ 或是 tame 型的, 或是野型的^[1,2]. Tame 与 Wild 定理的证明基于将有限维代数转化成与之表示等价的 bocs.

设 A 是一个骨架小范畴, V 是一个 A 上的余代数, 带有余单位 ϵ 和余乘 μ , 则称 $\mathcal{A} = (A, V)$ 为一个 bocs. 如果 A' 是一个极小范畴, A 在 A' 上由不可分解射元 $a_1, \dots, a_n$ (实箭) 自由生成, 而 $\ker(\epsilon) = \overline{V}$ 是由 $v_1, \dots, v_m$ (虚箭) 生成的自由 A - A 双模, $V \simeq A \oplus \overline{V}$, 那么就称 $L = (A'; \omega; a_1, \dots, a_n; v_1, \dots, v_m)$ 是 bocs $\mathcal{A}$ 的一个 layer, 其中 $\omega: A' \rightarrow_{A'} V_{A'}$ 是一个反射子. 特别地, 当 $A = A'$ 时, $\mathcal{A}$ 为一个极小 bocs. 这时若 $A' \simeq k \times k \times \dots \times k$, 则称极小 bocs $\mathcal{A}$ 为平凡的.

设 $\mathcal{A} = (A, V)$ 是一个 bocs, $\theta: A \rightarrow B$ 是从 A 到骨架小范畴 B 的一个函子. 我们可以构造一个诱导 bocs $\mathcal{A}^B = (B, {}^B V^B)$, 其中 ${}^B V^B = B \otimes_A V \otimes_A B$. 进一步, 我们有一个 bocs 的态射 $\theta_I: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^B$, 其中 $\theta_I = (\theta, \theta_1)$, $\theta_1: V \cong A \otimes_A V \otimes_A A \xrightarrow{\theta \otimes \text{id} \otimes \theta} B \otimes_A V \otimes_A B_A$ 是一个 A - A 双模射. θ_I 诱导出表示范畴之间的一个忠实满函子 $\theta_I^*: R(\mathcal{A}^B) \rightarrow R(\mathcal{A})$. 诱导函子一般由正则化、边约化、解圈三种约化得到. 通过反复的约化, 对于给定的维数 n , 可以将一个 tame 型的 bocs 转化为有限多个极小 bocs.

下述定义摘自文献 [3, 4], 在那里是对代数 Λ 而言, 我们将其平移到 bocs $\mathcal{A}$.

引用格式: 张英伯, 张雪颖, 赵双美. 局部和两点 bocs 的表示型. 中国科学 A, 2009, 39(3): 257–266
Zhang Y B, Zhang X Y, Zhao S M. Representation type of local and two-vertex bocses. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0031-9

定义 1.1 一个 bocs $\mathcal{A}$ 为 tame 型, 若任取维数 n , 存在有限多个 parameter-holding 函子 $F_i: \text{mod } k[x] \rightarrow R(\mathcal{A}), 1 \leq i \leq r_n$, 使得

(1) $F_i = M_i \otimes_{k[x]} -$, 其中 M_i 是一个有限生成的 $\mathcal{A}$ - $k[x]$ 双模, 且 M_i 作为一个右 $k[x]$ 模是自由的, $1 \leq i \leq r_n$,

(2) 除有限多个同构类之外, 几乎所有的 n 维不可分解 $\mathcal{A}$ 模同构于 $F_i(S)$, 其中 S 是一个 $k[x]$ 单模.

否则, $\mathcal{A}$ 为野型的.

对于给定的 bocs $\mathcal{A}$ 和维数 n , 记 $\mu_{\mathcal{A}}(n)$ 为满足定义 1.1 条件 (1) 和 (2) 的 parameter-holding 函子的最小个数.

定义 1.2 一个 tame 型的 bocs $\mathcal{A}$ 的表示范畴 $R(\mathcal{A})$ 称为 domestic 的, 若存在自然数 m , 使得对于任意维数 $n, \mu_{\mathcal{A}}(n) \leq m$.

定义 1.3 一个 tame 型的 bocs $\mathcal{A}$ 的表示范畴 $R(\mathcal{A})$ 为多项式生长的, 若存在自然数 m , 使得对于任意维数 $n \geq 2, \mu_{\mathcal{A}}(n) \leq n^m$. 特别地, 若存在自然数 p 使得 $\mu_{\mathcal{A}}(n) \leq pn$, 则称 $R(\mathcal{A})$ 为线性生长的.

定义 1.4 一个 tame 型的 bocs $\mathcal{A}$ 的表示范畴 $R(\mathcal{A})$ 为指数生长的, 若存在正常数 $p, q, \alpha, \beta, \alpha > 1$, 使得对于任意维数 $n, \mu_{\mathcal{A}}(n) \geq p\alpha^{qn^\beta}$.

定理 1.5 令 $\mathcal{A} = (A, V)$ 是一个 bocs, 带有 layer $L = (A'; \omega; a_1, \dots, a_n; v_1, \dots, v_m)$, 如果 $\mathcal{A}$ 是 tame 表示型的, 则首箭 a_1 的微分是下述形式之一:

(1) $\delta(a_1) = (x - \lambda)u + v(y - \mu)$, 其中在局部情形下, $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}], f(\lambda) \neq 0, f(\mu) \neq 0$, 在两点情形下, $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}], f(\lambda) \neq 0, A'(Y, Y) = k[y, g(y)^{-1}], g(\mu) \neq 0$.

(2) $\delta(a_1) = (x - \lambda)(x - \mu)v$, 或 $\delta(a_1) = (x - \lambda)v$, 其中 $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}], f(\lambda) \neq 0, f(\mu) \neq 0, A'[Y, Y] = k$. (当 X 平凡, Y 非平凡时是这种情形的对偶)

(3) a_1 的始点和终点都是平凡的.

推论 1.6 令 $\mathcal{A} = (A, V)$ 是一个仅含一个实箭的 bocs, 带有 layer $L = (A'; \omega; a; v_1, \dots, v_m)$, 则 $\mathcal{A}$ 是 tame 表示型的, 当且仅当 a 的微分是定理 1.1 的三种情形之一. 这时, $\mathcal{A}$ 的表示范畴 $R(\mathcal{A})$ 的生长情形如下:

(1) 在局部情形下, 当 $\lambda = \mu$ 时, $R(\mathcal{A})$ 是指数生长的; 当 $\lambda \neq \mu$ 时, 是 domestic 的. 在两点情形下, $R(\mathcal{A})$ 是 domestic 的.

(2) $R(\mathcal{A})$ 是 domestic 的.

(3) 如果 bocs $\mathcal{A}$ 是局部的且 $\delta(a_1) = 0$, 则 $R(\mathcal{A})$ 是 domestic 的. 否则 bocs $\mathcal{A}$ 为有限型的.

定理 1.5 和推论 1.6 的证明 (1) 在局部情形下, 当 $\lambda = \mu$ 时, 定理 1.5(1) 由文献 [5] 中的引理 4.2(3) 得到, 推论 1.6(1) 由文献 [6] 给出. 当 $\lambda \neq \mu$ 时, 可以用 rolled up 技巧归结到

两点的情形. 在两点的情形下, 定理 1.5(1) 的证明由下面的引理 2.1 和 2.2 给出, 推论 1.6(1) 见文献 [7, 定理 2.1].

(2) 定理 1.5(2) 的证明由下面的引理 3.1 – 3.3 得到. 推论 1.6(2) 的证明见文献 [8] 和 [7, 定理 3.1].

(3) 定理 1.5(3) 显然成立. 推论 1.6(3) 的证明如下: 当 $\delta(a) = 0$ 且 a 的起点和终点相同时, 则对 a 进行圈约化得到一个参变量, 也就得到一个诱导的局部极小 bocs, 它的表示范畴是 domestic 的. 当 $\delta(a) = 0$ 且 a 的起点和终点不同时, 则对 a 进行边约化出现一个新的点, 我们得到一个含有三个点的诱导平凡 bocs. 当 $\delta(a) = v$ 时, a 和 v 被正则化消去, 我们得到一个局部或两点的诱导平凡 bocs.

2 有两个非平凡点的极小野 bocs

引理 2.1 设一个 layered bocs 由 $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}]$, $A'(Y, Y) = k[y, g(y)^{-1}]$ 以及下述图形和微分给出:

$$x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} X \bullet \xrightarrow[u, v]{a} \bullet Y \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} y$$

$$\delta(a) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)u + v(y - \mu), \quad \lambda, \mu \in k, \quad f(\lambda_1) \neq 0, \quad f(\lambda_2) \neq 0, \quad g(\mu) \neq 0.$$

令

$$x \longrightarrow J_1(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_2(\lambda_2) \oplus J_3(\lambda_2), \quad y \longrightarrow J_1(\mu) \oplus J_2(\mu) \oplus J_3(\mu) \oplus J_4(\mu),$$

进行解圈, 然后经过一系列边约化和正则化, 我们可以得到一个诱导的野型 bocs:

$$1 \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{d} \\ \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{b} \end{array} \bullet 2, \quad \delta(b) = 0, \quad \delta(c) = 0, \quad \delta(d) = 0.$$

证明 运用 bocs 约化的 Belitskii 算法 [9], 得到 x 对应的 Weyr 矩阵 W_1 及其与之交换的矩阵 S_1 :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \\ & & & & & & \lambda_2 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & \lambda_2 & 0 \\ & & & & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_{12} & x_{11}^1 & & & & & & \\ & x_2 & x_{21}^1 & & & & & & \\ & & x_1 & & & & & & \\ & & & y_1 & y_{12} & y_{13} & y_{11}^1 & y_{12}^1 & y_{11}^2 \\ & & & & y_2 & y_{23} & y_{21}^1 & y_{22}^1 & y_{21}^2 \\ & & & & & y_3 & 0 & y_{32}^1 & y_{31}^2 \\ & & & & & & y_1 & y_{12} & y_{11}^1 \\ & & & & & & & y_2 & y_{21}^1 \\ & & & & & & & & y_1 \end{pmatrix},$$

其中空白处的元素均为零. 同理得到 y 对应的 Weyr 矩阵 W_2 (略去) 及其与之相交的矩阵

S_2 :

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{11}^1 & z_{12}^1 & z_{13}^1 & z_{11}^2 & z_{12}^2 & z_{11}^3 \\ & z_2 & z_{23} & z_{24} & z_{21}^1 & z_{22}^1 & z_{23}^1 & z_{21}^2 & z_{22}^2 & z_{21}^3 \\ & & z_3 & z_{34} & 0 & z_{32}^1 & z_{33}^1 & z_{31}^2 & z_{32}^2 & z_{31}^3 \\ & & & z_4 & 0 & 0 & z_{43}^1 & 0 & z_{42}^2 & z_{41}^3 \\ & & & & z_1 & z_{12} & z_{13} & z_{11}^1 & z_{12}^1 & z_{11}^2 \\ & & & & & z_2 & z_{23} & z_{21}^1 & z_{22}^1 & z_{21}^2 \\ & & & & & & z_3 & 0 & z_{32}^1 & z_{31}^2 \\ & & & & & & & z_1 & z_{12} & z_{11}^1 \\ & & & & & & & & z_2 & z_{21}^1 \\ & & & & & & & & & z_1 \end{pmatrix}.$$

这时, u 和 v 分别对应于 9×10 阶全矩阵 U 和 V , 它们中的元素线性无关. 而

$$W_1(W_1 - 1)U + VW_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad (1)$$

矩阵中的 $*$ 代表线性无关的元素, 并且与 S_1 和 S_2 中的元素线性无关. 因为

$$AS_2 - S_1A = W_1(W_1 - 1)U + VW_2,$$

于是实箭 a 对应的 9×10 阶矩阵 A 有下述形式:

$$A = \begin{pmatrix} \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \end{pmatrix}.$$

这个矩阵中的元素 ϕ 表示被矩阵 (1) 中的元素 $*$ 正则化掉的元素. 为简单起见, 考察下述约化方程即可:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_{21} \\ & x_1 \\ & & y_3 & y_{32}^1 & y_{31}^2 \\ & & & y_2 & y_{21}^1 \\ & & & & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ & z_2 & z_{23} & z_{24} \\ & & z_3 & z_{34} \\ & & & z_4 \end{pmatrix}.$$

关于 b_{11} 的约化方程为 $y_1 b_{11} - b_{11} z_1 = 0$, 令 $b_{11} = 1$. 这时 $y_1 = z_1$ 且 $b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{21}$ 被正则化, 故 $z_{12}, z_{13}, z_{14}, y_{21}^1$ 都化为零. 关于 b_{22} 的约化方程是 $y_2 b_{22} - b_{22} z_2 = 0$, 令 $b_{22} = 1$, 则 $y_2 = z_2$. 这时 $b_{23}, b_{24}, b_{31}, b_{32}$ 都被正则化, 故 $y_{32}^1, y_{31}^2, z_{23}, z_{24}$ 都化为零. 关于 b_{33} 的约化方程是 $y_3 b_{33} - b_{33} z_3 = 0$, 令 $b_{33} = 1$, 则 $y_3 = z_3$, 且 b_{34} 化为 ϕ 而 z_{34} 化为零. 于是约化方程变为

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_{21} & & & \\ & x_1 & & & \\ & & y_3 & 0 & 0 \\ & & & y_2 & 0 \\ & & & & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \phi & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \phi & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 & 0 \\ & y_2 & 0 & 0 \\ & & y_3 & 0 \\ & & & z_4 \end{pmatrix}.$$

令 $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{13} = 1, a_{14} = 1$, 则 $x_1 = y_1 = y_2 = y_3 = z_4$. a_{21} 被正则化且 x_{21} 化为零. 约化方程变为

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & & & \\ & x_1 & & & \\ & & x_1 & 0 & 0 \\ & & & x_1 & 0 \\ & & & & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \phi & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \phi & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & 0 & 0 \\ & & x_1 & 0 \\ & & & z_4 \end{pmatrix}.$$

其中 $b = a_{22}, c = a_{23}, d = a_{24}$. 所得诱导野 bocs 的图形和微分为

$$1 \bullet \begin{matrix} \xleftarrow{d} \\ \xleftarrow{c} \\ \xleftarrow{b} \end{matrix} 2 \bullet, \quad \delta(b) = 0, \quad \delta(c) = 0, \quad \delta(d) = 0.$$

证毕.

引理 2.2 设一个 layered bocs 由 $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}]$, $A'(Y, Y) = k[y, g(y)^{-1}]$ 以及下述图形和微分给出:

$$x \curvearrowright X \bullet \xrightarrow[u, v]{a} \bullet Y \curvearrowright y$$

$$\delta(a) = (x - \lambda)^2 u + v(y - \mu), \quad \lambda, \mu \in k, f(\lambda) \neq 0, g(\mu) \neq 0.$$

令

$$x \rightarrow J_2(\lambda) \oplus J_3(\lambda) \oplus J_4(\lambda), \quad y \rightarrow J_1(\mu) \oplus J_2(\mu) \oplus J_3(\mu) \oplus J_4(\mu),$$

进行解圈, 然后经过一系列的边约化和正则化, 我们得到一个诱导的野型 bocs:

$$z \curvearrowright 1 \bullet \xleftarrow{b} 2 \bullet, \quad \delta(b) = 0.$$

证明 运用 bocs 约化的 Belitskii 算法, 我们得到 x, y 对应的 Weyr 矩阵 W_1, W_2 及与之交换的矩阵 S_1, S_2 , 因为它们与引理 2.1 的情形类似, 此处略去.

这时, u 和 v 分别对应于 9×10 阶全矩阵 U 和 V , 它们中的元素线性无关. 而

$$AS_2 - S_1A = W_1^2U + VW_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \quad (2)$$

于是实箭 a 对应的 9×10 阶矩阵 A 以及约化方程有下述简单形式:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_{32}^1 & x_{33}^1 & x_{31}^2 & x_{32}^2 & x_{31}^3 \\ & x_2 & x_{23}^1 & x_{21}^1 & x_{22}^2 & x_{21}^2 \\ & & x_3 & 0 & x_{32}^1 & x_{31}^1 \\ & & & x_1 & x_{12} & x_{11}^1 \\ & & & & x_2 & x_{21}^1 \\ & & & & & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ & y_2 & y_{23} & y_{24} \\ & & y_3 & y_{34} \\ & & & y_4 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

令 $a_{11} = 1$, 则 $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{21} = \phi$, 且 $x_1 = y_1, y_{12} = y_{13} = y_{14} = x_{21}^1 = 0$; 令 $a_{22} = 1$, 则 $a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = \phi$, 且 $x_2 = y_2, y_{23} = y_{24} = x_{12} = x_{11}^1 = 0$; 令 $a_{33} = 1$, 则 $a_{34} = a_{41} = a_{42} = \phi$, 且 $x_3 = y_3, y_{34} = x_{32}^1 = x_{31}^2 = 0$; 再令 $a_{43} = 1, a_{44} = 1$ 得到 $x_3 = x_1, x_3 = y_4$, 这时 $a_{51} = a_{52} = a_{53} = \phi$, 使得 $x_{23} = x_{22}^2 = x_{21}^2 = 0$, 并且 $a_{61} = a_{62} = a_{63} = \phi$, 使得 $x_{33}^1 = x_{32}^2 = x_{31}^3 = 0$. 得到新的约化方程:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & x_1 & 0 & 0 \\ & & & & x_2 & 0 \\ & & & & & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & \phi & \phi & z \\ \phi & \phi & \phi & b \\ \phi & \phi & 1 & 1 \\ \phi & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & \phi & \phi & z \\ \phi & \phi & \phi & b \\ \phi & \phi & 1 & 1 \\ \phi & \phi & 1 & \phi \\ \phi & 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ & x_2 & 0 & 0 \\ & & x_1 & 0 \\ & & & x_1 \end{pmatrix},$$

其中 $b = a_{54}, z = a_{64}$. 所得诱导 bocs 的图形和微分为:

$$z \circlearrowleft \bullet 1 \xleftarrow{b} \bullet 2, \quad \delta(b) = 0.$$

证毕.

3 有一个非平凡点和一个平凡点的极小野 bocs

引理 3.1 设一个 layered bocs 由 $A'(X, X) = k[x, f(x)]$, $A'(Y, Y) = k$ 以及下述图形和微分给出:

$$x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} X \bullet \xrightarrow[\quad v]{\quad a \quad} \bullet Y,$$

$$\delta(a) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)v, \quad \lambda_i \in k, f(\lambda_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

令

$$x \rightarrow (J_1(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_1)) \oplus (J_1(\lambda_2) \oplus J_2(\lambda_2) \oplus J_3(\lambda_2)) \oplus (J_1(\lambda_3) \oplus J_2(\lambda_3) \oplus J_3(\lambda_3)),$$

进行解圈, 并在点 Y 取 3 维向量空间, 然后经过一系列的边约化和正则化, 我们可以得到一个诱导的野型 bocs:

$$z \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \bullet \xleftarrow[\quad b \quad]{} \bullet 2, \quad \delta(b) = 0.$$

证明 运用 Belitskii 算法, 我们得到 x 对应的 Weyr 矩阵 W 及其与之交换的矩阵 S_1 :

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & & \\ & W_2 & \\ & & W_3 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad W_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 \\ & & & \lambda_i & 0 & 1 \\ & & & & \lambda_i & 0 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} X & & \\ & Y & \\ & & Z \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_{12} & x_{11}^1 \\ & x_2 & x_{21}^1 \\ & & x_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_{12}^1 & y_{13}^1 & y_{11}^2 & y_{12}^2 & y_{11}^3 \\ & y_2 & y_{23}^1 & y_{21}^2 & y_{22}^2 & y_{21}^3 \\ & & y_3 & 0 & y_{32}^2 & y_{31}^3 \\ & & & y_1 & y_{12}^1 & y_{11}^2 \\ & & & & y_2 & y_{21}^2 \\ & & & & & y_1 \end{pmatrix},$$

其中 $i = 2, 3$, Z 的形式与 Y 相仿. 这时我们在点 Y 有一个 3 阶全矩阵 $S_2 = (w_{ij})$. 而 a, v 分别对应于 15×3 阶全矩阵 A, V . 因为

$$AS_2 - S_1A = (W - \lambda_1)(W - \lambda_2)(W - \lambda_3)V = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

其中 T 表示矩阵的转置. 于是 15×4 阶矩阵 A 只有 8 行是有效的, 其余的被正则化. 为简单起见, 我们考察约化方程 $A'S_2 = S'_1A'$, 其中 S'_1, A', S_2 由下述矩阵给出:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_{21}^1 \\ & x_1 \\ & & y_3 & y_{32}^1 & y_{31}^2 \\ & & & y_2 & y_{21}^1 \\ & & & & y_1 \\ & & & & & z_3 & z_{32}^1 & z_{31}^2 \\ & & & & & & z_2 & z_{21}^1 \\ & & & & & & & z_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}.$$

对矩阵 A' 的最下面 3 行作约化, 得到 I_3 和 $S_2 = Z$. 对矩阵 A' 的中间 3 行作约化可得:

$$\begin{pmatrix} \phi & \phi & 1 \\ \phi & 1 & \phi \\ 1 & \phi & \phi \end{pmatrix}, \quad S_2 = Z = \begin{pmatrix} y_3 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix}.$$

最后约化 A' 最上面的两行, 得到方程

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & b & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & b & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

其中 $b = a_{12}$, z 由 a_{13} 作圈约化得来.

$$z \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet 1 \xleftarrow{b} \bullet 2, \quad \delta(b) = 0.$$

引理证毕.

引理 3.2 设一个 layered bocs 由 $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}]$, $A'(Y, Y) = k$ 以及下述图形和微分给出:

$$x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} X \bullet \xrightarrow[\quad v]{\quad a \quad} \bullet Y,$$

$$\delta(a) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)v, \quad \lambda_i \in k, f(\lambda_i) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

令

$$x \rightarrow (J_2(\lambda_1) \oplus J_3(\lambda_1) \oplus J_4(\lambda_1)) \oplus (J_1(\lambda_2) \oplus J_2(\lambda) \oplus J_3(\lambda_2)),$$

进行解圈, 并在点 Y 取 4 维向量空间, 然后经过一系列的边约化和正则化, 可以得到一个诱导的野型 bocs:

$$z \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \bullet \xleftarrow{b} \bullet 2, \quad \delta(b) = 0.$$

证明 与前面的引理类似, 将 15×4 阶矩阵降为 9×4 阶, 考察下述约化方程:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_{32}^1 & x_{33}^1 & x_{31}^2 & x_{32}^2 & x_{31}^3 \\ & x_2 & x_{23}^1 & x_{21}^1 & x_{22}^2 & x_{21}^2 \\ & & x_3 & 0 & x_{32}^1 & x_{31}^2 \\ & & & x_1 & x_{12} & x_{11}^1 \\ & & & & x_2 & x_{21}^1 \\ & & & & & x_1 \\ & & & & & & y_3 & y_{32}^1 & y_{31}^2 \\ & & & & & & & y_2 & y_{21}^1 \\ & & & & & & & & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{12} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix}.$$

对矩阵 A 的最下面 3 行进行约化后得到方程:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_{32}^1 & x_{33}^1 & x_{31}^2 & x_{32}^2 & x_{31}^3 \\ & x_2 & x_{23}^1 & x_{21}^1 & x_{22}^2 & x_{21}^2 \\ & & x_3 & 0 & x_{32}^1 & x_{31}^2 \\ & & & x_1 & x_{12} & x_{11}^1 \\ & & & & x_2 & x_{21}^1 \\ & & & & & x_1 \\ & & & & & & y_3 & y_{32}^1 & y_{31}^2 \\ & & & & & & & y_2 & y_{21}^1 \\ & & & & & & & & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & \phi & \phi \\ 0 & 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & \phi & \phi \\ 0 & 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ & y_3 & y_{32}^1 & y_{31}^2 \\ & & y_2 & y_{21}^1 \\ & & & y_1 \end{pmatrix}.$$

易见对上面 6 行的约化恰为引理 2.2 公式 (1) 的情形. 引理证毕.

引理 3.3 设一个 layered boc s 由 $A'(X, X) = k[x, f(x)^{-1}]$, $A'(Y, Y) = k$ 以及下述图形和微分给出:

$$x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} X \bullet \xrightarrow[\quad v]{\quad a \quad} \bullet Y,$$

$$\delta(a) = (x - \lambda)^3 v, \quad \lambda \in k, f(\lambda) \neq 0,$$

令

$$x \rightarrow J_1(\lambda) \oplus J_4(\lambda) \oplus J_7(\lambda)$$

进行解圈, 并在点 Y 取 3 维向量空间, 然后经过一系列的边约化和正则化, 可以得到一个诱导的野型 boc s :

$$z \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \bullet \xleftarrow[\quad b]{\quad} \bullet 2, \quad \delta(b) = 0.$$

证明 与前面的引理类似, 将 12×3 阶矩阵降为 7×3 阶, 考察下述简化后的约化方程:

$$\begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 & x_{32}^3 & 0 & 0 & x_{31}^6 \\ & x_2 & x_{22}^1 & x_{22}^2 & x_{21}^3 & x_{21}^4 & x_{21}^5 \\ & & x_2 & x_{22}^1 & 0 & x_{21}^3 & x_{21}^4 \\ & & & x_2 & 0 & 0 & x_{21}^3 \\ & & & & x_1 & x_{11}^1 & x_{11}^2 \\ & & & & & x_1 & x_{11}^1 \\ & & & & & & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}.$$

对矩阵 A 的最下面三行做约化得到 I_3 和 $S_2 = Y$, 其中 Y 由上述约化方程中第 1 个矩阵右下角的 3 行 3 列组成. 此时约化方程变为

$$\begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 & x_{32}^3 & 0 & 0 & x_{31}^6 \\ & x_2 & x_{22}^1 & x_{22}^2 & x_{21}^3 & x_{21}^4 & x_{21}^5 \\ & & x_2 & x_{22}^1 & 0 & x_{21}^3 & x_{21}^4 \\ & & & x_2 & 0 & 0 & x_{21}^3 \\ & & & & x_1 & x_{11}^1 & x_{11}^2 \\ & & & & & x_1 & x_{11}^1 \\ & & & & & & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ 1 & \phi & \phi \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ 1 & \phi & \phi \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_{11}^1 & x_{11}^2 \\ & x_1 & x_{11}^1 \\ & & x_1 \end{pmatrix}.$$

令 $a_{41}=1$, 得到 $x_2=x_1$. 则 a_{42}, a_{43} 被正则化, 使得 $x_{11}^1=0, x_{21}^3=x_{11}^2$. 同时 $a_{31}=\phi, a_{32}=\phi, a_{33}=\phi, a_{21}=\phi, a_{11}=\phi$ 使得 $x_{22}^1=0, x_{21}^3=0, x_{21}^4=0, x_{22}^2=0, x_{32}^3=0$. 这时需对 a_{22} 做圈约化, 将其记作 z , 且 $a_{23}=\phi, a_{13}=\phi$ 使得 $x_{21}^5=0, x_{31}^6=0$. 最后得到一个微分为零的实箭和下述约化方程:

$$\begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & x_1 & 0 & 0 \\ & & & & & x_1 & 0 \\ & & & & & & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & b & \phi \\ \phi & z & \phi \\ \phi & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & b & \phi \\ \phi & z & \phi \\ \phi & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi \\ 1 & \phi & \phi \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ & x_1 & 0 \\ & & x_1 \end{pmatrix},$$

其中 $b = a_{12}$, 所得诱导 boc 的图形和微分为:

$$z \circlearrowleft \bullet 1 \xleftarrow{b} \bullet 2, \quad \delta(b) = 0.$$

证毕.

参考文献

- 1 Crawley-Boevey W W. On tame algebras and bocses. *Proc London Math Soc*, **56**: 451–483 (1998)
- 2 Drozd Y A. Tame and wild matrix problems, Representations and Quadratic Forms (in Russian). Kiev: Inst Math Akad Nauk U SSR, 1979, 39–74
- 3 Norenberg R, Skowronski A. Tame minimal non-polynomial growth strongly simply connected algebras. *Colloq Math*, **73**: 301–330 (1997)
- 4 Skowronski A. Algebras of polynomial growth. In: Topics in Algebra, Banach Center Publications, **26**: (1990)
- 5 Zhang Y B, Xu Y G. On tame and wild bocses. *Sci China Ser A*, **48**: 456–468 (2005)
- 6 Li L C. A linear matrix problem of exponential growth (in Chinese). *J Beijing Normal Univer (Nat Sci)*, **37**: 456–463 (2001)
- 7 Zhang X Y, Zhang Y B. Two classes of domestic bocses. Preprint, 2008
- 8 Pan J, Zhang Y B. A class of domestic bocses. *J Beijing Normal Univer (Nat Sci)*, **42**: 467–472 (2006)
- 9 Sergeichuk V V. Canonical matrices for linear matrix problems. *Linear Algebra Appl*, **317**: 53–102 (2000)
- 10 Auslander M, Reiten I, Smalø S. Representation Theory of Artin Algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1995