利用分数阶 Carleson 测度刻画 BMO^α -鞅空间

张超^{①*}, 陈伟^②, 刘培德^③^① 浙江工商大学统计与数学学院, 杭州 310018;^② 扬州大学数学科学学院, 扬州 225002;^③ 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: zaoyangzhangchao@163.com, weichen@yzu.edu.cn, pdliu@whu.edu.cn

收稿日期: 2014-03-31; 接受日期: 2014-08-26; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401525, 11101353, 11471251 和 11401526)、浙江省自然科学基金 (批准号: LQ14A010001)、江苏省教育厅自然科学基金 (批准号: 11KJB110018) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK2012682) 资助项目

摘要 我们利用分数阶 Carleson 测度给出了 BMO^α -鞅空间的一个刻画. 该刻画表明一个鞅 f 属于 BMO^α -鞅空间当且仅当与该鞅的鞅差有关的某个张量测度为有界 α -Carleson 测度. 利用这个刻画, 我们给出了鞅变换算子、均方算子在 BMO^α -鞅空间上的有界性的非常简洁的证明. 此外, 我们还证明了在鞅背景下与分数阶 Carleson 测度有关的 Carleson 不等式. 最后, 我们利用分数阶 Carleson 测度给出了 UMD 空间的一个刻画.

关键词 鞅空间 Carleson 测度 Carleson 不等式 鞅变换 均方函数

MSC (2010) 主题分类 60G42, 42A61, 46B25

1 引言

在调和分析中, 有界平均震荡函数空间 (BMO -空间) 是一个重要的研究对象. 称 $\mathbb{R}^n$ 上的一个局部可积函数属于 $BMO(\mathbb{R}^n)$ -空间, 如果

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx,$$

其中 $|Q|$ 是方体 Q 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度, f_Q 表示 f 在 Q 上的平均 (或者, 均值), 上确界是对 $\mathbb{R}^n$ 中所有的方体 Q 上取得. 作为 Hardy 空间 H^1 的对偶空间及在内插空间理论中, 它是 L^∞ 空间的一个很好的替代. 另外, 在调和分析中, Carleson 测度是该理论中最有用的工具之一. 称 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的某个正测度 μ 是 Carleson 测度, 如果

$$\|\mu\| = \sup_Q \frac{\mu(Q \times (0, l(Q)))}{|Q|} < \infty,$$

其中 $l(Q)$ 表示方体 Q 的边长. Fefferman 和 Stein 发现 BMO -空间与 Carleson 测度有一种天然的、密切的联系, 见文献 [1, 2]. 在文献 [3] 中, 作者们研究了 Morrey 空间中的函数和某种广义的 Carleson 测度之间的关系. 这种广义的 Carleson 测度定义如下: 对于 $0 < p < 1$, 称 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的正测度 μ 为有界的 p -Carleson 测度, 如果

$$\|\mu\| = \sup_Q \frac{\mu(Q \times (0, l(Q)))}{|Q|^{1+p}} < \infty.$$

英文引用格式: Zhang C, Chen W, Liu P D. A characterization of BMO^α -martingale spaces by fractional Carleson measures (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 365–372, doi: 10.1360/012015-11

在本文中, 我们将在鞅空间中研究类似的结果.

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个完备的概率空间. 当 $1 \leq p < \infty$ 时, 我们记由 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上强 p -可积的标量值的函数构成的普通的 L_p -空间为 $L^p(\Omega)$, 或者, 简单地记为 L^p . 假设 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一系列单调递增的子 σ -域使得 $\mathcal{F} = \vee \mathcal{F}_n$. 称 L^1 中的一个适应序列 $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 是一个鞅, 如果对于每个 $n \geq 0$ 都有 $\mathbb{E}(f_{n+1}|\mathcal{F}_n) = f_n$, 其中 $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_n)$ 表示函数关于 $\mathcal{F}_n$ 的条件期望. 令 $d_n f = f_n - f_{n-1}$, 约定 $f_{-1} = 0$, 我们称 $(d_n f)_{n \geq 0}$ 为鞅 f 的鞅差序列. 为了避免关于无穷序列的不必要的收敛问题的讨论, 除了特别提到, 假设我们所考虑的所有的鞅都是有限的. 如果鞅 $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 的极限 f_∞ 存在, 我们将鞅与它的极限值不做区别. 而且, 如果 $f \in L^1$, 仍然用 f 来表示由该函数生成的鞅 (f_n) , 且 $f_n = \mathbb{E}(f_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. 对于更多的关于鞅理论方面的知识, 参见文献 [4-7].

本文的主要研究对象 BMO^α -鞅空间的定义如下 (参见文献 [7]):

定义 1.1 (BMO^α -鞅空间) 假设 $0 \leq \alpha \leq 1$, $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上一列单调递增的 σ -代数流, $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 是与 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 适应的 L^2 -鞅. 称 f 属于 BMO^α -鞅空间, 如果

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_n} P(A)^{-1/2-\alpha} \left(\int_A |f - f_{n-1}|^2 dP \right)^{1/2} < \infty.$$

BMO^α -鞅空间上的范数为

$$\|f\|_{BMO^\alpha} = \sup_{n \geq 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_n} P(A)^{-1/2-\alpha} \left(\int_A |f - f_{n-1}|^2 dP \right)^{1/2}.$$

注意, 当 $\alpha = 0$ 时, BMO^0 -鞅空间就是 BMO -鞅空间.

实际上, 如果我们把定义 1.1 中的条件替换为

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_n} P(A)^{-1/p-\alpha} \left(\int_A |f - f_{n-1}|^p dP \right)^{1/p} < \infty,$$

对于任意的 $1 \leq p < \infty$ 和 L^p -鞅空间中的鞅 $f \in L^p$ 都成立, 那么该定义与定义 1.1 中的定义是等价的.

此外, 在二进的情形下, 我们可以用一种特殊的方法来定义 BMO^α -鞅空间. 这种定义可以在文献 [5, 6] 中找到.

假设 $\mathcal{I}^{(n)}$ 为所有的 $\mathcal{F}_n$ -原子构成的集合, $n \geq 0$. 记

$$\omega_n = \sum |I^{(n)}| \chi_{I^{(n)}},$$

其中的求和取遍所有的 $I^{(n)} \in \mathcal{I}^{(n)}$.

定义 1.2 (二进 BMO^α -鞅空间) 假设 $0 \leq \alpha \leq 1$, $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的单调递增的 σ -代数流, $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 是与 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 适应的 L^2 -鞅. 称 f 属于二进 BMO^α -鞅空间, 如果

$$\sup_n \|\omega_n^{-\alpha} E(|f - f_{n-1}|^2 | \mathcal{F}_n)\|_\infty^{1/2} < \infty.$$

此时, BMO^α -空间上的范数为 $\|f\|_{BMO^\alpha} = \sup_n \|\omega_n^{-\alpha} E(|f - f_{n-1}|^2 | \mathcal{F}_n)\|_\infty^{1/2}$.

调和分析中的广义 Carleson 测度在鞅空间中具有如下类似的定义:

定义 1.3 (有界 α -Carleson 测度) 假设 μ 为 $\Omega \times \mathbb{N}$ 上一个非负的测度, 其中 $\mathbb{N}$ 为自然数集赋予计数测度 dm . 称 μ 为一个有界 α -Carleson 测度, 如果

$$\|\mu\|_\alpha := \sup_\tau \frac{\mu(\hat{\tau})}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} < \infty,$$

其中的上确界取遍所有的停时 τ , $\hat{\tau}$ 表示停时 τ 的“帐篷”:

$$\hat{\tau} = \{(\omega, k) \in \Omega \times \mathbb{N} : k \geq \tau(\omega), \tau(\omega) < \infty\}.$$

当 $\alpha = 0$ 时, α -Carleson 测度就是鞅理论中的 Carleson 测度. 在文献 [8,9] 中, 作者研究了 Carleson 测度和向量值 BMO -鞅空间之间的关系. 基于文献 [8] 中的结论, 本文将利用 α -Carleson 测度来刻画 BMO^α -鞅空间中的鞅. 实际上, 我们有如下结论.

定理 1.4 以下两个命题等价:

- (I) $f \in BMO^\alpha$ -鞅空间;
- (II) 测度 $|d_k f|^2 dP \otimes dm$ 是有界 α -Carleson 测度, 即

$$\sup_{\tau} \frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |d_k f|^2 dP \otimes dm < \infty.$$

在调和分析中, 有一个与 Carleson 测度相关的著名的 Carleson 不等式. 该不等式最初由 Carleson 证明, 但是比较繁琐. 对于该不等式的简单的证明, 参见文献 [10].

定理 1.5 对于任意的 Carleson 测度 μ 和每个 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的 μ -可测函数 f , 我们有

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(x, t)|^p d\mu(x, t) \leq C_n \|\mu\| \int_{\mathbb{R}^n} (f^*(x))^p dx$$

对所有的 $0 < p < \infty$ 成立, 其中 $f^*(x) = \sup_{(y, t) \in \{|y-x| < t\}} |f(y, t)|$.

在鞅背景下, 我们可以得到一个与有界 α -Carleson 测度相关的 Carleson 不等式. 有别于 $\alpha = 0$ 时的情形 (见文献 [6]), 我们只能得到 $1 < p < \infty$ 时的不等式.

定理 1.6 假设 $d\mu = \mu_k dP \otimes dm$ 为一个有界 α -Carleson 测度 ($0 < \alpha < 1$), 其中 μ_k 为非负的随机变量, 且 $1 < p < \infty$. 则对于所有的适应过程 $f = (f_n)_{n \geq 0}$, 有

$$\int_{\Omega \times N} |f_k|^p \mu_k dP \otimes dm \leq \frac{p}{p-1} \|\mu\|_\alpha \|Mf\|_{L^{\frac{1}{2\alpha}}} \|Mf\|_{L^{p-1}}^{p-1}, \quad (1.1)$$

其中 $Mf(x) = \sup_n |f_n(x)|$ 是 $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 的极大函数. 反过来, 如果不等式 (1.1) 对某个 $1 < p < \infty$ 成立, 且 $\frac{p}{p-1} \|\mu\|_\alpha$ 被一个常数 C_p 所替代, 那么 μ 是一个有界 α -Carleson 测度, 且 $\|\mu\|_\alpha \leq C_p$.

在第 2 节中, 我们将给出定理 1.4 和 1.6 的证明. 在第 3 节中, 我们利用定理 1.4, 可以容易地得到一致有界鞅变换算子和均方算子在 BMO^α -鞅空间上的有界性.

2 主要定理的证明

本节首先给出定理 1.4 的证明. 为了达到这个目的, 我们需要如下引理.

引理 2.1 假设 $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 为一个 L^2 -鞅, 那么

$$\|f\|_{BMO^\alpha} = \sup_{\tau} P(\tau < \infty)^{-1/2-\alpha} \|f - f_{\tau-1}\|_{L^2},$$

其中的上确界取遍所有的停时 τ .

证明 假设 $\|f\|_{BMO^\alpha} < \infty$, τ 为任意一个停时, 那么

$$P(\tau < \infty)^{-1-2\alpha} \|f - f_{\tau-1}\|_{L^2}^2 = P(\tau < \infty)^{-1-2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} |f - f_{n-1}|^2 dP$$

$$\leq \|f\|_{BMO^\alpha}^2 P(\tau < \infty)^{-1-2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n)^{1+2\alpha} = \|f\|_{BMO^\alpha}^2.$$

反过来, 令 $\beta = \sup_{\tau} P(\tau < \infty)^{-1/2-\alpha} \|f - f_{\tau-1}\|_{L^2}$. 对于任意的 $n \geq 0$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$, 定义

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} n, & \omega \in A, \\ \infty, & \omega \notin A. \end{cases}$$

那么,

$$P(A)^{-1-2\alpha} \int_A |f - f_{n-1}|^2 dP = P(\tau_A < \infty)^{-1-2\alpha} \|f - f_{\tau_A-1}\|_{L^2}^2 \leq \beta^2.$$

这就证明了 $\|f\|_{BMO^\alpha} \leq \beta$. 引理得证. □

利用上面的引理 2.1, 我们可以给出定理 1.4 的证明如下:

定理 1.4 的证明 (I) $\Rightarrow$ (II). 假设 $f \in BMO^\alpha$. 对任意的 $0 \leq n \leq m$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_A \sum_{k=n}^m |d_k f|^2 dP &\leq C \int_A |f_m - f_{n-1}|^2 dP \\ &\leq C \int_A |f - f_{n-1}|^2 dP \leq CP(A)^{1+2\alpha} \|f\|_{BMO^\alpha}^2. \end{aligned}$$

这表示

$$P(A)^{-1-2\alpha} \int_A \sum_{k=n}^{\infty} |d_k f|^2 dP \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}^2,$$

对于任意的 $n \geq 0$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$ 成立. 定义

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} n, & \omega \in A, \\ \infty, & \omega \notin A. \end{cases}$$

因为 $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(\tau_A < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\widehat{\tau_A}} |d_k f|^2 dP \otimes dm &= \frac{1}{P(\tau_A < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\Omega} \sum_{k=\tau_A}^{\infty} |d_k f|^2 \chi_{\{\tau_A < \infty\}} dP \\ &= \frac{1}{P(A)^{1+2\alpha}} \int_A \sum_{k=n}^{\infty} |d_k f|^2 dP \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}^2. \end{aligned}$$

通过对所有的停时取上确界, 可知测度 $|d_k f|^2 dP \otimes dm$ 是有界 α -Carleson 测度.

(II) $\Rightarrow$ (I). 让我们考虑新的 σ -域 $(\mathcal{F}_{k \vee \tau})_{k \geq 0}$ 和相应的由 $f - f_\tau$ 生成的鞅 $\tilde{f}$. 由 Doob 停时定理,

$$\tilde{f}_k = \mathbb{E}(f - f_\tau | \mathcal{F}_{k \vee \tau}) = \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_{k \vee \tau}) - f_\tau = f_{k \vee \tau} - f_\tau.$$

由 Burkholder-Gundy 不等式, 得

$$\|f - f_\tau\|_{L^2}^2 = \|\tilde{f}\|_{L^2}^2 \leq C \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |d_k \tilde{f}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2}^2 = C \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_{(k+1) \vee \tau} - f_{k \vee \tau}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2}^2$$

$$= C \left\| \left(\sum_{k=\tau}^{\infty} |f_{k+1} - f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2}^2 = C \left\| \left(\sum_{k=\tau+1}^{\infty} |d_k f|^2 \right)^{1/2} \chi_{\{\tau < \infty\}} \right\|_{L^2}^2.$$

因此,

$$\|f - f_{\tau-1}\|_{L^2}^2 \leq C(\|f - f_{\tau}\|_{L^2}^2 + \|f_{\tau} - f_{\tau-1}\|_{L^2}^2) = C \left\| \left(\sum_{k=\tau}^{\infty} |d_k f|^2 \right)^{1/2} \chi_{\{\tau < \infty\}} \right\|_{L^2}^2. \quad (2.1)$$

因此, 由引理 2.1 和式 (2.1) 得

$$\begin{aligned} \|f\|_{BMO^{\alpha}} &\leq C \sup_{\tau} P(\tau < \infty)^{-1/2-\alpha} \left\| \left(\sum_{k=\tau}^{\infty} |d_k f|^2 \right)^{1/2} \chi_{\{\tau < \infty\}} \right\|_{L^2} \\ &= C \sup_{\tau} \left(\frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |d_k f|^2 dP \otimes dm \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

由上面的证明, 我们知道

$$\|f\|_{BMO^{\alpha}} \sim \sup_{\tau} \left(\frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |d_k f|^2 dP \otimes dm \right)^{1/2}.$$

定理证毕. □

接下来, 我们将给出定理 1.6 的证明.

定理 1.6 的证明 首先注意, 假设 μ 是一个有界 α -Carleson 测度, $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 是一个适应过程. 对于任意的 $\lambda > 0$, 定义停时 $\tau = \inf\{n : |f_n| > \lambda\}$. 则有

$$\{(\omega, k) : |f_k| > \lambda\} \subset \{(\omega, k) : k \geq \tau(\omega), \tau(\omega) < \infty\}.$$

那么,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \mathbb{N}} |f_k|^p \mu_k dP \otimes dm &= p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mu(\{(\omega, k) : |f_k| > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mu(\{(\omega, k) : k \geq \tau(\omega), \tau(\omega) < \infty\}) d\lambda \\ &\leq \|\mu\|_{\alpha} p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} P(\tau < \infty)^{1+2\alpha} d\lambda \\ &= \|\mu\|_{\alpha} p \int_0^{\infty} \lambda (P(\{Mf > \lambda\}))^{2\alpha} \lambda^{p-2} P(\{Mf > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq \|\mu\|_{\alpha} \|Mf\|_{L^{\frac{1}{2\alpha}}, \infty} \cdot p \int_0^{\infty} \lambda^{p-2} P(\{Mf > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq \frac{p}{p-1} \|\mu\|_{\alpha} \|Mf\|_{L^{\frac{1}{2\alpha}}} \|Mf\|_{L^{p-1}}. \end{aligned}$$

故, 不等式 (1.1) 成立.

反之, 假设 (1.1) 对于某个 $1 < p < \infty$ 和常数 C_p 成立. 对于任意的停时 τ , 令 $f_n(\omega) = \chi_{\{\tau \leq n\}}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $n \geq 0$. 那么, $Mf(\omega) = \chi_{\{\tau < \infty\}}(\omega)$, 且

$$\int_{\Omega \times \mathbb{N}} \chi_{\{\tau \leq k\}} \mu_k dP \otimes dm = \int_{\Omega \times \mathbb{N}} |f_k|^p \mu_k dP \otimes dm \leq C_p \|Mf\|_{L^{\frac{1}{2\alpha}}} \|Mf\|_{L^{p-1}}^{p-1} = C_p |\{\tau < \infty\}|^{1+2\alpha}.$$

这表明 $\|\mu\|_\alpha \leq C_p$. 定理得证. $\square$

注 2.2 特别地, 如果 $d\mu = |d_k f|^2 dP \otimes dm$, 其中 $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 为一个鞅, 那么, 结合定理 1.4, 我们有 $f \in BMO^\alpha$, 当且仅当

$$\int_{\Omega \times \mathbb{N}} |f_k|^p |d_k f|^2 dP \otimes dm = \int_{\Omega \times \mathbb{N}} |f_k|^p d\mu \leq C_p \|Mf\|_{L^{\frac{1}{2\alpha}}} \|Mf\|_{L^{p-1}}^{p-1}$$

对所有的适应序列 $f = (f_n)_{n \geq 0}$ 和 $1 < p < \infty$ 成立.

3 定理 1.4 的几个应用

本节给出定理 1.4 的几个应用. 为了将该定理应用到我们的结果上, 我们需要如下的注记.

注 3.1 定理 1.4 可以拓展到 Hilbert-空间值的情形. 如果 f 在一个 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 中取值并将该定理中的绝对值替换为空间 $\mathbb{H}$ 上的范数, 那么该定理的结论仍然成立.

关于更多的向量值鞅的内容, 读者可以参见文献 [5, 11–14].

在本节中将会讨论鞅变换的有界性, 关于鞅变换的经典内容, 参见文献 [4, 15–17].

3.1 鞅变换在 BMO^α -鞅空间上的有界性

定理 3.2 假设 $(v_n)_{n \geq 0}$ 为一个一致有界的 $\mathcal{F}_n$ -可料序列. 那么, 鞅变换

$$(Tf)_n = \sum_{k=0}^n v_k d_k f$$

在 BMO^α -鞅空间上是有界的.

证明 对于任意的 $f \in BMO^\alpha$, 由定理 1.4, 则对于任意的停时 τ , 有

$$\frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |d_k f|^2 dP \otimes dm \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}^2.$$

因为 $(v_k)_{k \geq 0}$ 是一致有界的, 所以, 对于任意的停时 τ , 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |d_k(Tf)|^2 dP \otimes dm &= \frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |v_k d_k f|^2 dP \otimes dm \\ &\leq C \cdot \frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |d_k f|^2 dP \otimes dm \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}^2. \end{aligned}$$

故, 由定理 1.4, 我们得到 $Tf \in BMO^\alpha$ 且 $\|Tf\|_{BMO^\alpha} \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}$.

3.2 均方函数在 BMO^α -鞅空间上的有界性

定理 3.3 均方函数

$$S(f) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |d_k f|^2 \right)^{1/2}$$

在 BMO^α -鞅空间上是有界的.

证明 我们考虑 ℓ^2 -值的鞅变换:

$$Uf = \sum_{k=1}^{\infty} v_k d_k f \quad \text{和} \quad U_n f = \sum_{k=1}^n v_k d_k f,$$

其中 $v_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $k \geq 1$. 它将 $\mathbb{R}$ - 值鞅映射为 ℓ^2 - 值鞅. 因此, 对于任意的 $f \in BMO^\alpha$, 由定理 1.4, 有

$$\frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} \|d_k(Uf)\|_{\ell^2}^2 dP \otimes dm = \frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} |d_k f|^2 dP \otimes dm \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}^2.$$

因此, 由注 3.1, 我们有 $Uf \in BMO_{\ell^2}^\alpha$ 且 $\|U(f)\|_{BMO_{\ell^2}^\alpha} \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}$. 因为, 对于任意的 $n \geq 1$,

$$\|U_n f\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=1}^n |d_k f|^2 \right)^{1/2} = S_n(f),$$

所以, 对于任意的 $A \in \mathcal{F}_n$,

$$\begin{aligned} P(A)^{-1-2\alpha} \int_A |S(f) - S_{n-1}(f)|^2 dP &= P(A)^{-1-2\alpha} \int_A \|\|Uf\|_{\ell^2} - \|U_{n-1}(f)\|_{\ell^2}\|^2 dP \\ &\leq P(A)^{-1-2\alpha} \int_A \|U(f) - U_{n-1}(f)\|_{\ell^2}^2 dP \leq C \|U(f)\|_{BMO_{\ell^2}^\alpha}^2. \end{aligned}$$

从而, $\|S(f)\|_{BMO^\alpha} \leq C \|U(f)\|_{BMO_{\ell^2}^\alpha} \leq C \|f\|_{BMO^\alpha}$. $\square$

3.3 极大函数在 BMO^α - 鞅空间上的有界性

定理 3.4 极大函数 $M(f) = \sup_{n \geq 0} |f_n|$ 在 BMO^α - 鞅空间上是有界的.

定理 3.4 的证明与文献 [6] 中关于极大函数在 BMO - 鞅空间上的有界性的证明是类似的, 故此处略去.

3.4 UMD Banach 格

在文献 [15] 中, Burkholder 考虑了如下的 UMD 空间.

定义 3.5 称一个 Banach 空间 $\mathbb{B}$ 为 UMD 空间, 如果对于所有的 $\mathbb{B}$ - 值鞅 $(f_n)_{n \geq 0}$ 和所有的适应序列 $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, 都有

$$\|\varepsilon_0 d_0 f + \dots + \varepsilon_k d_k f\|_{L_{\mathbb{B}}^p} \leq C_p \|d_0 f + \dots + d_k f\|_{L_{\mathbb{B}}^p},$$

对所有的 $k \geq 0$ 成立, 其中 $1 < p < \infty$ 且常数 $C_p > 0$ 与 k 无关.

我们知道, 上面定义中使得不等式成立的某个 p_0 的存在可以保证该不等式对于其他的 p , $1 < p < \infty$, 也成立. 本节主要关注 Banach 格的情形. 假设 $\mathbb{B}$ 是一个 Banach 格. 不失一般性, 假设 $\mathbb{B}$ 是由可测空间 (Ω, dP) 上的可测函数构成的 Banach 格. 关于 Banach 格的更多内容, 读者可以参考文献 [18].

由文献 [8] 中的定理 3.4 和本文中的定理 1.4, 作为推论, 我们可以得到如下的关于 UMD Banach 格的刻画.

定义 3.6 假设 $\mathbb{B}$ 为一个 Banach 格. 则下面两个命题等价:

- (I) $\mathbb{B}$ 是一个 UMD 空间;
- (II) 存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$C^{-1} \|f\|_{BMO_{\mathbb{B}}^\alpha} \leq \sup_{\tau} \left(\frac{1}{P(\tau < \infty)^{1+2\alpha}} \int_{\hat{\tau}} \|d_k f\|_{\mathbb{B}}^2 dP \otimes dm \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{BMO_{\mathbb{B}}^\alpha},$$

对于所有的 $\mathbb{B}$ - 值鞅 f 都成立.

致谢 非常感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables. Acta Math, 1972, 129: 137–193
- 2 Grafakos L. Classical and Modern Fourier Analysis. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2004
- 3 Wu Z, Xie C. Q spaces and Morrey spaces. J Funct Anal, 2003, 201: 282–297
- 4 Burkholder D L. Martingale transforms. Ann Math Statist, 1966, 37: 149–504
- 5 刘培德. 鞅与 Banach 空间几何学. 北京: 科学出版社. 2007
- 6 Long R. Martingale spaces and inequalities. Beijing: Peking University Press, 1993
- 7 Weisz F. Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes in Mathematics, 1568. Berlin: Springer-Verlag, 1994
- 8 Jiao Y. Carleson measures and vector-valued BMO martingales. Probab Theory Related Fields, 2009, 145: 421–434
- 9 Ouyang C, Xu Q. BMO functions and Carleson measures with values in uniformly convex spaces. Canad J Math, 2010, 62: 827–844
- 10 Stein E M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. With the assistance of Timothy S. Murphy. Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton: Princeton University Press, 1993
- 11 Jiao Y, Wu L, Popa M. Operator-valued martingale transforms in rearrangement invariant spaces and applications. Sci China Math, 2013, 56: 831–844
- 12 Martínez T. Uniform convexity in terms of martingale H^1 and BMO spaces. Houst J Math, 2001, 27: 461–478
- 13 Martínez T, Torrea J L. Operator-valued martingale transforms. Tohoku Math J, 2000, 52: 449–474
- 14 Martínez T, Torrea J L. Boundedness of vector-valued Martingale transforms on extreme points and applications. J Aust Math Soc, 2004, 76: 207–221
- 15 Burkholder D L. A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Ann Probab, 1981, 9: 997–1011
- 16 Pisier G. Martingales with values in uniformly convex spaces. Israel J Math, 1975, 20: 326–350
- 17 Rubio de Francia J. L. Martingale and integral transforms of Banach space valued functions. In: Probability and Banach Spaces. Lecture Notes in Math, 1221. Berlin: Springer-Verlag, 1986, 195–222
- 18 Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces. II. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1979

A characterization of BMO^α -martingale spaces by fractional Carleson measures

ZHANG Chao, CHEN Wei & LIU PeiDe

Abstract We give a characterization of BMO^α -martingale spaces by using fractional Carleson measures. This characterization says that a martingale belongs to BMO^α -martingale spaces if and only if a measure related to this martingale is a bounded α -Carleson measure. We get the boundedness of martingale transform and square function on BMO^α -martingale spaces easily by using this characterization. We also prove the martingale version of Carleson's inequality related to bounded α -Carleson measures. At last, we give a characterization of UMD-space by using fractional Carleson measure.

Keywords martingale spaces, Carleson measure, Carleson's inequality, martingale transforms, square function

MSC(2010) 60G42, 42A61, 46B25

doi: 10.1360/012015-11