带自同构箭图在有限域上的表示

献给万哲先教授 90 华诞

邓邦明^{1*}, 阿布都卡的 - 吾甫², 庞雅丽³

1. 清华大学丘成桐数学科学中心, 北京 100084;

2. 新疆大学数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830046;

3. 上海师范大学教育学院, 上海 200234

E-mail: bmdeng@math.tsinghua.edu.cn, abdu@vip.sina.com, ylpang@shnu.edu.cn

收稿日期: 2017-02-09; 接受日期: 2017-04-17; 网络出版日期: 2017-06-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11331006 和 11671024) 资助项目

摘要 设 $\mathbb{F}_q$ 是一个含有 q 个元素的有限域且 $k = \overline{\mathbb{F}_q}$ 是它的代数闭包. 设 Q 是一个带有自同构 σ 的箭图且 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ 是对应的 $\mathbb{F}_q$ -代数. 本文主要利用箭图 Q 在域 k 上的 F -稳定表示研究 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模, 并且给出不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模同构类个数的若干多项式. 特别地, 本文将引入 σ -绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的概念. 当 Q 是仿射箭图时, 给出具有给定维数向量的 σ -绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模同构类个数的公式.

关键词 带自同构箭图 遗传代数 不可分解表示

MSC (2010) 主题分类 16G20, 17B67

1 引言

箭图及其表示的概念最早由 Gabriel^[1,2] 于 1972 年引入. 著名的 Gabriel 定理和 Kac 定理揭示了代数表示理论与 Lie 理论的深刻联系. 特别地, 箭图的表示簇是几何表示论中重要的研究对象 (参见文献 [3-5]), 而且箭图在有限域上的表示与算术代数几何密切相关. 给定一个箭图, 我们有对应的路代数和对称的 Kac-Moody Lie 代数. 为了处理可对称化情形, 文献 [6-8] 研究了赋值箭图 (或 species) 的表示理论.

为了研究有限域 $\mathbb{F}_q$ 上代数的模范畴, Deng 和 Du^[9,10] 引入了代数的 Frobenius 态射的概念. 一类典型的例子是对应于带有自同构 σ 的箭图 Q 的 $\mathbb{F}_q$ -代数 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ (等价地, $\mathbb{F}_q$ -species 的张量代数). 文献 [9,10] 证明了存在 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类与 Q 的在 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包 $k = \overline{\mathbb{F}_q}$ 上的 F -稳定表示的同构类之间的一一对应.

本文主要利用 Q 在 k 上的 F -稳定表示研究 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模. 我们给出具有给定维数向量的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模同构类的个数的若干多项式. 同时, 我们将定义 σ -绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模, 从而推广了绝对不可分解模的概念. 该概念似乎更适用于 $\mathbb{F}_q$ -species 的表示理论. 在 Q 是仿射 (affine 或

英文引用格式: Deng B M, Obul A, Pang Y L. Representations of quivers with automorphisms over finite fields (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1525-1544, doi: 10.1360/N012017-00028

tame) 箭图时, 这些多项式将被具体地给出. 特别地, 我们将给出具有给定维数向量的 σ -绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模同构类个数的公式. 这些计算基于 Q 在 k 上不可分解表示的分类, 参见文献 [7, 11, 12].

本文中, $\mathbb{F}_q$ 总表示含有 q 个元素的有限域, k 记 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{F}_q}$. 对于每个正整数 r , 令 $\mathbb{F}_{q^r}$ 表示 $\mathbb{F}_q$ 在 k 中的 r 次扩域.

给定一个 k -向量空间 V , 一个 $\mathbb{F}_q$ -线性同构 $F: V \rightarrow V$ 称为一个 Frobenius 映射, 如果下面条件满足:

(1) 对于任意 $v \in V$ 和 $\lambda \in k$, 有 $F(\lambda v) = \lambda^q F(v)$;

(2) 对于每个 $v \in V$, 存在 $n > 0$ 使得 $F^n(v) = v$.

特别地, 若 V 是有限维的, 则条件 (2) 隐含于条件 (1) 中. 对于一个 k 上的 $m \times n$ 阶矩阵 $X = (x_{ij}) \in k^{m \times n}$, 定义 $X^{[1]} := (x_{ij}^q) \in k^{m \times n}$.

考虑域 k 的自同构 $f: k \rightarrow k, \lambda \mapsto \lambda^q$. 对于每一个 k -向量空间 V , 令 $V^{(1)}$ 记由 V 经过 f 作基变换得到的向量空间:

$$V^{(1)} = V \otimes_f k,$$

对于每个 $v \in V$, 记 $v^{(1)} = v \otimes 1$. 根据定义, 对于一个 k -线性映射 $\phi: U \rightarrow V$, 映射 $\phi^{(1)} := \phi \otimes_f 1: U^{(1)} \rightarrow V^{(1)}$ 也是一个 k -线性映射. 设 $\theta_V: V \rightarrow V^{(1)}$ 是将 v 映到 $v^{(1)}$ 的 $\mathbb{F}_q$ -线性同构.

最后, 本文涉及箭图表示的基本概念与性质, 参见文献 [13–16]; 涉及 Kac-Moody Lie 代数的基本概念与性质, 参见文献 [17, 18].

2 带自同构箭图与 F -稳定表示

本节主要回顾文献 [9, 10] 中关于带自同构 σ 的箭图 Q 的 F -稳定表示的一些基本概念和基本事实, 建立 Q 的 F -稳定表示与 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的联系, 这里 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ 是对应于 (Q, σ) 的遗传 $\mathbb{F}_q$ -代数.

设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是一个顶点集为 Q_0 、箭向集为 Q_1 的有限箭图. 对于每一个箭向 $\rho \in Q_1$, 分别用 $t\rho$ 和 $h\rho$ 记 ρ 的起点和终点. 进一步, 设 σ 是 Q 的一个自同构, 即 σ 分别是点集 Q_0 和箭向集 Q_1 的置换并且满足: 对于任意 $\rho \in Q_1$ 有 $\sigma(h\rho) = h\sigma(\rho)$ 且 $\sigma(t\rho) = t\sigma(\rho)$. 于是 σ 也自然地作用在 Q 中所有的道路构成的集合上.

设 $A = kQ$ 是箭图 Q 在域 k 上的路代数. 于是, Q 的自同构 σ 诱导出一个 Frobenius 态射

$$F_{Q, \sigma; q}: A \rightarrow A, \quad \sum_s x_s p_s \mapsto \sum_s x_s^q \sigma(p_s),$$

其中求和项 $\sum_s x_s p_s$ 表示 Q 中有限个道路 p_s 的 k -线性组合. 于是, $F_{Q, \sigma; q}$ -不动点集合

$$\mathfrak{A}(Q, \sigma; q) := \{a \in A \mid F_{Q, \sigma; q}(a) = a\}$$

成为一个 $\mathbb{F}_q$ -代数. 根据文献 [10, 定理 A.3], $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ 与相应于 (Q, σ) 的 $\mathbb{F}_q$ -species 的张量代数是同构的. 因此, 它是一个遗传 $\mathbb{F}_q$ -代数. 若 $\sigma = \text{id}$ (Q 的恒等自同构), 则 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ 恰好是箭图 Q 在域 $\mathbb{F}_q$ 上的路代数 $\mathbb{F}_q Q$.

一个 A -模 M 称为 F -稳定的 (相对于 $F_{Q, \sigma; q}$), 如果存在一个 Frobenius 映射 $F_M: M \rightarrow M$ 满足

$$F_M(am) = F_{Q, \sigma; q}(a)F_M(m), \quad \forall a \in A, \quad m \in M.$$

于是, F_M - 不动点集合

$$M^F = M^{F_M} = \{m \in M \mid F_M(m) = m\}$$

成为一个 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模. 根据文献 [9, 定理 3.2], 对应 $M \mapsto M^F$ 诱导出 F - 稳定 A - 模同构类的集合到 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模的同构类集合之间的一个双射. 一个非零 A - 模 M 称为不可分解 F - 稳定的, 如果它是 F - 稳定的且不能分解成两个非零 F - 稳定子模的直和.

现在设 M 是一个 A - 模, 其对应的 k - 代数同态为 $\pi: A \rightarrow \text{End}_k(M)$. 下面映射的合成

$$A \xrightarrow{F_{Q, \sigma; q}^{-1}} A \xrightarrow{\theta_A} A^{(1)} \xrightarrow{\pi^{(1)}} \text{End}_k(M)^{(1)} \xrightarrow{\cong} \text{End}_k(M^{(1)})$$

定义了 $M^{(1)}$ 上的一个 A - 模结构. 我们用 $M^{[1]}$ 记这个模并称之为 M 的 Frobenius- 扭 (相应于 $F_{Q, \sigma; q}$). 若 $f: M \rightarrow N$ 是一个 A - 模同态, 则 k - 线性映射 $f^{(1)}: M^{(1)} \rightarrow N^{(1)}$ 是一个从 $M^{[1]}$ 到 $N^{[1]}$ 的 A - 模同态, 记为 $f^{[1]}$. 因此, 我们得到所谓的 Frobenius- 扭函子

$$()^{[1]}: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A, \quad M \mapsto M^{[1]}.$$

对任意正整数 s , 我们可以递归地定义 M 的 s - 重 Frobenius- 扭 $M^{[s]} := (M^{[s-1]})^{[1]}$ 和 $f^{[s]} := (f^{[s-1]})^{[1]}$, 其中规定 $M^{[0]} = M$ 且 $f^{[0]} = f$. 称一个 A - 模 M 是 F - 周期的 (相应于 $F_{Q, \sigma; q}$), 若存在 $r \geq 1$ 使得 $M \cong M^{[r]}$. 我们称满足 $M^{[r]} \cong M$ 的最小正整数 r 为 M 的 F - 周期. 根据文献 [10, 命题 2.7] 知, 每个 (有限维) A - 模 M 总是 F - 周期的. M 是 F - 稳定的当且仅当 $M \cong M^{[1]}$. 下面的结果给出了 F - 稳定 A - 模的一种构造方法 (参见文献 [9, 定理 5.1]).

引理 2.1 若 M 是一个 F - 周期为 r 的不可分解 A - 模, 则 $\widetilde{M} = M \oplus M^{[1]} \oplus \cdots \oplus M^{[r-1]}$ 是一个不可分解 F - 稳定 A - 模. 换句话说, $\widetilde{M}^F$ 是一个不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模. 进一步地, 每个不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模都可由此方式得到.

设 M 如上给出, 我们称 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模 $\widetilde{M}^F$ 由 F - 周期为 r 的 A - 模诱导的. 根据上面的引理, 存在由不可分解 F - 稳定 A - 模同构类的集合到不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模同构类集合一个双射.

下面引理表明 Frobenius- 扭函子 $()^{[1]}$ 保持几乎可裂序列 (参见文献 [9, 引理 7.3]).

引理 2.2 设 Q 是一个带自同构 σ 的箭图. 假设 Q 不包含有向循环 (等价地, 路代数 $A = kQ$ 是有限维的), 则 $0 \rightarrow N \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$ 是一个几乎可裂序列当且仅当 $0 \rightarrow N^{[1]} \xrightarrow{\psi^{[1]}} L^{[1]} \xrightarrow{\varphi^{[1]}} M^{[1]} \rightarrow 0$ 是一个几乎可裂序列. 特别地, 如果 M 是一个不可分解非投射 A - 模, 那么 $\tau M^{[1]} \cong (\tau M)^{[1]}$, 其中 $\tau = \tau_A$ 是 A 的 Auslander-Reiten 平移.

众所周知, 箭图 Q 在 k 上的表示等同于 Q 的路代数 $A = kQ$ 上的 (左) 模. 因此, Q 的一个表示 $V = (V_i, V_\rho)$ 称为 F - 稳定的, 如果 V 看作 A - 模是 F - 稳定的. 易见, $V = (V_i, V_\rho)$ 是 F - 稳定的当且仅当存在一个 Frobenius 映射 $F: \bigoplus_{i \in Q_0} V_i \rightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ 使得对于每个 $i \in Q_0$ 有 $F(V_i) = V_{\sigma(i)}$, 且对于每个 $\rho \in Q_1$ 有等式 $FV_\rho = V_{\sigma(\rho)}F$, 即有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} V_{t\rho} & \xrightarrow{V_\rho} & V_{h\rho} \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ V_{\sigma(t\rho)} & \xrightarrow{V_{\sigma(\rho)}} & V_{\sigma(h\rho)} \end{array}$$

一般地, 设 $V = (V_i, V_\rho)$ 是 Q 在 k 上的一个维数向量为 $\mathbf{d} = (d_i) \in \mathbb{N}Q_0$ 的表示, 即 $\dim V_i = d_i$, $\forall i \in Q_0$. 通过选取每个 V_i 的基, 我们可以简单地将 V_i 与 k^{d_i} 等同. 从而, 对于每个 $\rho \in Q_1$, V_ρ 可以写成 $k^{d_{h\rho} \times d_{t\rho}}$ 中的一个矩阵. 于是, V 的 Frobenius- 扭 $V^{[1]}$ 同构于 $W = (W_i, W_\rho)$, 其中对于 $i \in Q_0$ 和 $\rho \in Q_1$, 有

$$W_i = V_{\sigma^{-1}(i)}, \quad W_\rho = V_{\sigma^{-1}(\rho)}^{[1]}.$$

注 2.3 对于每个正整数 r , σ^r 也是 Q 的一个自同构. 因此, 我们有 Frobenius 态射 (相应于 $\mathbb{F}_{q^r}$)

$$F_{Q, \sigma^r; q^r} : A \rightarrow A, \quad \sum_s x_s p_s \mapsto \sum_s x_s^{q^r} \sigma^r(p_s).$$

它显然等于 $F_{Q, \sigma; q}^r$. 其不动点代数

$$\mathfrak{A}(Q, \sigma^r; q^r) = \{a \in A \mid F_{Q, \sigma^r; q^r}(a) = a\}$$

是一个 $\mathbb{F}_{q^r}$ - 代数. 容易看出, 存在一个 $\mathbb{F}_{q^r}$ - 代数同构

$$\mathfrak{A}(Q, \sigma^r; q^r) \cong \mathfrak{A}(Q, \sigma; q) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^r}.$$

若 A - 模 M 满足 $M^{[r]} \cong M$ (相应于 $F_{Q, \sigma; q}$), 则 M 是 F - 稳定的 (相应于 $F_{Q, \sigma^r; q^r}$).

3 不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模个数的多项式

本节考察不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模同构类个数的一些多项式, 并且推广绝对不可分解模的概念, 定义 σ - 绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模.

给定一个带自同构 σ 的箭图 Q , 我们可以定义一个赋值箭图 $\Gamma = \Gamma(Q, \sigma) = (I, \Gamma_1)$, 其顶点集 $I = \Gamma_0$ 和箭向集 Γ_1 分别是 Q_0 和 Q_1 中 σ - 轨道构成的集合. 另外, Γ 的赋值如下: 对于每个 $i \in \Gamma_0$, 相应的赋值 ε_i 是轨道 i 中的顶点个数; 对于每个箭向 $\rho : t\rho \rightarrow h\rho \in \Gamma_1$, 相应的赋值 (d_ρ, d'_ρ) 满足

$$d_\rho = \frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon_{h\rho}} \quad \text{且} \quad d'_\rho = \frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon_{t\rho}}, \quad (3.1)$$

其中 ε_ρ 记轨道 ρ 中箭向的个数. 若 $\sigma = \text{id}$, 则对应的赋值箭图 $\Gamma(Q, \sigma)$ 与 Q 一致.

对于赋值箭图 $\Gamma = \Gamma(Q, \sigma)$, 我们得到一个矩阵 $C_{Q, \sigma} = (c_{ij})_{i, j \in I}$ 满足

$$c_{ij} = \begin{cases} 2 - 2 \sum \frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_i}, & \text{若 } i = j, \\ - \sum_\rho \frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon_i}, & \text{若 } i \neq j, \end{cases}$$

其中第一个求和项对顶点 i 处的所有圈 (loop) τ 求和, 第二个求和项对 Γ 中所有介于 i 与 j 之间的箭向 ρ 求和. 矩阵 $C_{Q, \sigma}$ 是文献 [19] 意义下的一个 (可对称化) Borcherds-Cartan 矩阵. 进一步地, 如果 $\Gamma = \Gamma(Q, \sigma)$ 不含圈, 即有 $c_{ii} = 2, \forall i \in I$, 那么 $C_{Q, \sigma}$ 是一个广义 Cartan 矩阵. 在 $\sigma = \text{id}$ 情形下, 我们用 C_Q 记 $C_{Q, \sigma}$. 显然, C_Q 是一个对称矩阵.

在下面的讨论中, 总假定 $\Gamma = \Gamma(Q, \sigma)$ 不含有向循环, 因此也不含圈. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C_{Q, \sigma})$ 是相应于 $C_{Q, \sigma}$ 的 Kac-Moody Lie 代数, 其定义参见文献 [17, 18]. 于是, $\mathfrak{g}$ 有一个根空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 Δ 是 $\mathfrak{g}$ 的根系. 根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) 的维数称为根 α 的重数, 记作 $\text{mult } \alpha$.

为了简化记号, 我们用 i 表示单根 α_i 且将 Δ 看做基为 I 的自由 Abel 群 $\mathbb{Z}I$ 的一个子集. 为了强调 (Q, σ) 的作用, 我们用 $\Delta(Q, \sigma)$ 记 Δ . 根据文献 [17], 可得

$$\Delta(Q, \sigma) = \Delta^+(Q, \sigma) \cup \Delta^-(Q, \sigma),$$

其中 $\Delta^+(Q, \sigma) = \Delta(Q, \sigma) \cap \mathbb{N}I$ 且 $\Delta^-(Q, \sigma) = -\Delta^+(Q, \sigma)$. 集合 $\Delta^+(Q, \sigma)$ 和 $\Delta^-(Q, \sigma)$ 中的根分别称作 $\mathfrak{g}$ 的正根和负根. 进一步, 用 $\Delta_{\text{re}}(Q, \sigma)$ 和 $\Delta_{\text{im}}(Q, \sigma)$ 分别表示实根和虚根的集合. 令

$$\Delta_{\text{re}}^+(Q, \sigma) = \Delta^+(Q, \sigma) \cap \Delta_{\text{re}}(Q, \sigma) \quad \text{且} \quad \Delta_{\text{im}}^+(Q, \sigma) = \Delta^+(Q, \sigma) \cap \Delta_{\text{im}}(Q, \sigma).$$

当 $\sigma = \text{id}$ 时, 分别用 $\Delta(Q)$ 、 $\Delta_{\text{re}}^+(Q)$ 和 $\Delta_{\text{im}}^+(Q)$ 替代 $\Delta(Q, \sigma)$ 、 $\Delta_{\text{re}}^+(Q, \sigma)$ 和 $\Delta_{\text{im}}^+(Q, \sigma)$.

箭图自同构 σ 可以线性扩充成 $\mathbb{Z}Q_0$ 的一个群自同构, 仍记为 σ , 其定义如下:

$$\sigma\left(\sum_{a \in Q_0} x_a a\right) = \sum_{a \in Q_0} x_a \sigma(a).$$

设 $(\mathbb{Z}Q_0)^\sigma$ 是 $\mathbb{Z}Q_0$ 中 σ - 固定点构成的子集合. 它可以通过下面的自然双射与群 $\mathbb{Z}I$ 等同起来:

$$\hat{\sigma} : (\mathbb{Z}Q_0)^\sigma \rightarrow \mathbb{Z}I, \quad \sum_{a \in Q_0} x_a a \mapsto \sum_{i \in I} y_i i,$$

其中 $y_i := x_a, \forall a \in i$.

对于 $\beta \in \Delta(Q)$, 设 $t \geq 1$ 是满足 $\sigma^t(\beta) = \beta$ 的最小整数. 称 t 是 β 的 σ - 周期, 记作 $p(\beta) = p_\sigma(\beta)$. 根系 $\Delta(Q)$ 与 $\Delta(Q, \sigma)$ 之间有如下的折叠关系 (参见文献 [20, 命题 2] 和 [21, 命题 4]).

引理 3.1 设 $\beta \in \Delta(Q)$, 令

$$\tilde{\beta} := \beta + \sigma(\beta) + \cdots + \sigma^{t-1}(\beta) \in (\mathbb{Z}Q_0)^\sigma,$$

其中 $t = p_\sigma(\beta)$, 则 $\beta \mapsto \hat{\sigma}(\tilde{\beta})$ 定义了一个双射 $\Delta(Q) \rightarrow \Delta(Q, \sigma)$. 进一步, 若 $\hat{\sigma}(\tilde{\beta})$ 是实根, 则 β 也是实根且相对于 σ - 轨道是唯一的.

对于一个 kQ - 模 (或 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模) M , 我们用 $\dim M$ 记 M 的维数向量. 对于每个 $\alpha \in \mathbb{N}I$, 设

$$M_{Q, \sigma}(\alpha, q) = \text{维数向量为 } \alpha \text{ 的 } \mathfrak{A}(Q, \sigma; q)\text{- 模同构类的个数},$$

$$I_{Q, \sigma}(\alpha, q) = \text{维数向量为 } \alpha \text{ 的不可分解 } \mathfrak{A}(Q, \sigma; q)\text{- 模同构类的个数}.$$

下面的结果对于 $\sigma = \text{id}$ 情形在文献 [22] 中证明; 对于一般情形, 参见文献 [9, 第 9 节].

引理 3.2 $M_{Q, \sigma}(\alpha, q)$ 和 $I_{Q, \sigma}(\alpha, q)$ 都是关于 q 的有理系数多项式, 并且与 Q 的定向无关.

下面的结果是有限域情形下的著名的 Kac 定理. 关于它的证明, 对于 $\sigma = \text{id}$ 情形, 参见文献 [22]; 对于一般情形, 参见文献 [23].

定理 3.3 设 q 是一个素数幂. 对于 $\alpha \in \mathbb{N}I$, $I_{Q, \sigma}(\alpha, q) \neq 0$ 当且仅当 $\alpha \in \Delta^+(Q, \sigma)$. 如果 $\alpha \in \Delta_{\text{re}}^+(Q, \sigma)$, 那么 $I_{Q, \sigma}(\alpha, q) = 1$.

注 3.4 对带有有向循环箭图 $\Gamma(Q, \sigma)$ 情形的讨论可参见文献 [24, 25].

对 $\alpha \in \Delta^+(Q, \sigma)$ 和正整数 r , 令

$$I_{Q, \sigma}(\alpha, q; r) = \text{维数向量为 } \alpha \text{ 的不可分解 } \mathfrak{A}(Q, \sigma; q)\text{- 模同构类的个数}$$

且它们由 Q 在 k 上 F - 周期为 r 不可分解表示诱导.

显然, 对于给定的 α , 仅有有限多个 $I_{Q,\sigma}(\alpha, q; r)$ 不为零. 于是, $I_{Q,\sigma}(\alpha, q) = \sum_{r \geq 1} I_{Q,\sigma}(\alpha, q; r)$, 并且 $I_{Q,\sigma}(\alpha, q; 1)$ 是维数向量为 α 的绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模同构类的个数 (注: 一个不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模 X 称为绝对不可分解的, 若 $X \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ 是一个不可分解 kQ -模).

对于每个根 $\alpha = \sum_{i \in I} x_i i \in \Delta^+(Q, \sigma)$, 正整数 $\sum_{i \in I} x_i$ 称作 α 的高度. 通过对根的高度作归纳, 由引理 3.2 可导出下面的结果.

命题 3.5 对于任意 $\alpha \in \Delta^+(Q, \sigma)$ 和 $r \geq 1$, $I_{Q,\sigma}(\alpha, q; r)$ 是关于 q 的一个有理系数的多项式且与 Q 的定向无关.

回顾经典 Möbius 函数 $\mu: \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ 定义如下:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = 1, \\ (-1)^t, & \text{若 } n = p_1 \cdots p_t, \text{ 其中 } p_1, \dots, p_t \text{ 是互不相同的素数,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

众所周知, 对于 $r \geq 1$, 有

$$\sum_{s|r} \mu(s) = \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) = \delta_{r,1}. \quad (3.2)$$

我们也需要 Möbius 反演公式 (参见文献 [26, 定理 3.24]), 其叙述如下: 设 ϕ 和 ψ 是 $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ 的两个函数, 则

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \psi(d), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \Leftrightarrow \psi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \phi(d), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \quad (3.3)$$

现在对于 $\beta \in \Delta^+(Q)$ 和 $r \geq 1$, 定义 $H_{Q,\sigma}(\beta, q; r)$ 和 $K_{Q,\sigma}(\beta, q; r)$ 分别为满足 $M^{[r]} \cong M$ 和 F -周期为 r 的维数向量为 β 的不可分解 kQ -模 M 的同构类的个数. 根据定义, 可得 $H_{Q,\sigma}(\beta, q; r) \neq 0$ 或者 $K_{Q,\sigma}(\beta, q; r) \neq 0$ 的一个必要条件是 $\sigma^r(\beta) = \beta$. 显然, 有

$$\sum_{s|r} K_{Q,\sigma}(\beta, q; s) = H_{Q,\sigma}(\beta, q; r).$$

应用 Möbius 反演公式, 得到

$$K_{Q,\sigma}(\beta, q; r) = \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) H_{Q,\sigma}(\beta, q; s).$$

于是, 对于每个 $\alpha \in \Delta^+(Q, \sigma)$, 有等式

$$I_{Q,\sigma}(\alpha, q; r) = \sum_{\beta} \frac{1}{r} K_{Q,\sigma}(\beta, q; r) = \sum_{\beta} \frac{1}{r} \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) H_{Q,\sigma}(\beta, q; s),$$

其中的求和式是对于所有满足下面条件的 $\beta \in \Delta^+(Q)$ 来求和:

$$\hat{\sigma}(\beta + \sigma(\beta) + \cdots + \sigma^{r-1}(\beta)) = \alpha.$$

综上, 我们得到公式

$$I_{Q,\sigma}(\alpha, q) = \sum_{r \geq 1} \sum_{\beta} \frac{1}{r} \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) H_{Q,\sigma}(\beta, q; s). \quad (3.4)$$

进一步, 根据注 2.3, 若 $H_{Q,\sigma}(\beta, q; s) \neq 0$ (特别地, $\sigma^s(\beta) = \beta$), 则

$$H_{Q,\sigma}(\beta, q; s) = I_{Q,\sigma^s}(\widehat{\sigma^s}(\beta), q^s; 1),$$

其中 $\widehat{\sigma^s} : (\mathbb{Z}Q_0)^{\sigma^s} \rightarrow \mathbb{Z}\Gamma_0(Q, \sigma^s)$ 由自同构 σ^s 诱导且 $\widehat{\sigma^s}(\beta) \in \Delta^+(Q, \sigma^s)$, 这里 $\Gamma_0(Q, \sigma^s)$ 是对应于 (Q, σ^s) 的赋值箭图 $\Gamma(Q, \sigma^s)$ 的点集. 换句话讲, 公式 (3.4) 建立了一簇代数 $\mathfrak{A}(Q, \sigma^s; q^s)$ 的不可分解模同构类个数之间的联系.

现在考虑特殊情形 $\sigma = \text{id}$. 此时, 我们将略去相关符号中的 σ , 例如, 用 $I_Q(\alpha, q)$ 记 $I_{Q,\sigma}(\alpha, q)$ 等. 特别地, 用 $A_Q(\alpha, q)$ 记 $I_{Q,\sigma}(\alpha, q; 1)$, 它是 Q 在域 $\mathbb{F}_q$ 上维数向量为 α 的绝对不可分解表示同构类的个数. 在这种情形下, $K_Q(\alpha, q; r) = rI_Q(\alpha, q; r)$ 是 Q 在 k 上维数向量为 α 且极小定义域为 $\mathbb{F}_{q^r}$ 的不可分解表示 M 的同构类的个数 (即 r 是使得 M 是定义在 $\mathbb{F}_{q^r}$ 上的最小正整数). 文献 [27] 研究了这些多项式. 另外, 我们有等式 $H_Q(\alpha, q; s) = A_Q(\alpha, q^s)$. 因此, 若 $\alpha \in \Delta^+(Q)$ 是不可除的, 则根据 (3.4), 对于 $m \geq 1$, 有

$$I_Q(m\alpha, q) = \sum_{r|m} \frac{1}{r} \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) A_Q\left(\frac{m}{r}\alpha, q^s\right). \quad (3.5)$$

这个公式由 Kac 在文献 [28, 第 1.14 节] 中给出.

注 3.6 事实上, Kac 在文献 [28, 命题 1.15] 中证明了 $A_Q(\alpha, q)$ 是一个整系数多项式, 并给出了下面两个著名的猜想:

(I) 多项式 $A_Q(\alpha, q)$ 的常数项等于 α 重数, 即 $A_Q(\alpha, 0) = \text{mult } \alpha$;

(II) 多项式 $A_Q(\alpha, q)$ 的系数是非负整数, 即 $A_Q(\alpha, q) \in \mathbb{N}[q]$.

由定理 3.3 知这两个猜想对于任意实根 α 都是成立的. 另外, 当 Q 是一个 Dynkin 箭图或仿射箭图时, 两个猜想也都是成立的. 2004 年, Crawley-Boevey 和 Van den Bergh^[29] 利用箭图簇 (quiver variety) 的性质证明了, 对于任意箭图 Q , 当 α 是一个不可除 (indivisible) 正虚根时, Kac 的两个猜想均成立. 最近, Hausel^[30] 证明了猜想 (I) 是成立的, 并与 Letellier 和 Rodriguez-Villegas^[31] 合作证明了猜想 (II) 也是成立的.

现在回到一般情形并且用 $o(\sigma)$ 记 σ 的阶数. 首先给出下面的定义.

定义 3.7 一个不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模 M 称为 σ -绝对不可分解的, 若 $M \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ 分解成 r 个 F -周期为 r 的不可分解直和项的直和, 其中 $r \mid o(\sigma)$.

根据定义, 当 $\sigma = \text{id}$ 时, σ -绝对不可分解模与绝对不可分解模是一致的. 对于任意 $\alpha \in \Delta^+(Q, \sigma)$, 用 $A_{Q,\sigma}(\alpha, q)$ 记维数向量为 α 的 σ -绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模同构类的个数. 根据定义知,

$$A_{Q,\sigma}(\alpha, q) = \sum_{r|o(\sigma)} I_{Q,\sigma}(\alpha, q; r). \quad (3.6)$$

对于实根, 我们有下列的结果.

命题 3.8 假设 Q 不含有向循环, 那么对于每个 $\alpha \in \Delta_{\text{re}}^+(Q, \sigma)$, 有

$$A_{Q,\sigma}(\alpha, q) = I_{Q,\sigma}(\alpha, q) = 1.$$

证明 设 $\alpha \in \Delta_{\text{re}}^+(Q, \sigma)$. 根据引理 3.1 知, 存在一个根 $\beta \in \Delta_{\text{re}}^+(Q)$ 使得 $\alpha = \hat{\sigma}(\tilde{\beta})$ 且

$$\tilde{\beta} := \beta + \sigma(\beta) + \cdots + \sigma^{t-1}(\beta),$$

其中 $t = p_\sigma(\beta)$ 是 β 的 σ -周期. 显然, $t \mid o(\sigma)$.

设 M 是 Q 在 k 上一个维数向量为 α 的不可分解表示, 令 r 是 M 的 F -周期. 于是, $M, M^{[1]}, \dots, M^{[r-1]}$ 是彼此互不同构的. 对于 $0 \leq s \leq r-1$, 有 $\dim M^{[s]} = \sigma^s(\beta)$. 特别地, $\sigma^r(\beta) = \dim M^{[r]} = \dim M = \beta$. 因此, $t \mid r$. 另一方面, 因为 $\dim M^{[t]} = \sigma^t(\beta) = \beta = \dim M$ 是一个实根, 所以 $M^{[t]} \cong M$. 由此推出 $r \mid t$, 从而 $r = t$. 由引理 2.1 知,

$$\widetilde{M} = M \oplus M^{[1]} \oplus \dots \oplus M^{[r-1]}$$

给出一个不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模 $\widetilde{M}^F$, 它满足

$$\dim \widetilde{M} = \hat{\sigma}(\dim M + \dim M^{[1]} + \dots + \dim M^{[r-1]}) = \hat{\sigma}(\tilde{\beta}) = \alpha.$$

因此, $I_{Q, \sigma}(\alpha, q; r) \geq 1$. 于是根据 $r \mid o(\sigma)$, 得到 $A_{Q, \sigma}(\alpha, q) = I_{Q, \sigma}(\alpha, q) = 1$. □

4 带自同构仿射箭图与 F -稳定表示

本节主要研究带有自同构 σ 的仿射箭图 Q 在 k 上的 F -稳定表示, 并由此导出具有给定维数向量的 σ -绝对不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模同构类个数的公式.

下面总假定 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是一个不含有向循环的仿射箭图, σ 是 Q 的一个自同构. 于是, σ 诱导 Q 的底图的一个自同构, 它是一个广义 Dynkin 图. 根据文献 [4, 第 14.1.5 节] 中的带自同构广义 Dynkin 图的分类, 有 $o(\sigma) \leq 4$. 进一步, $C_{Q, \sigma}$ 是一个仿射型的广义 Cartan 矩阵, 并且 $\Delta_{\text{im}}(Q, \sigma) = \mathbb{Z}\delta \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}I$, 其中 $\delta = \delta_{Q, \sigma}$ 是 $\mathfrak{g}(C_{Q, \sigma})$ 的极小正虚根, 参见文献 [17, 第 54 和 55 页] 或 [7, 第 6 节]. 关于仿射型 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q, \sigma})$ 的分类和虚根的重数, 参见文献 [17]. 本节的主要定理如下:

定理 4.1 设 σ 的阶数为 $o(\sigma)$, 则对于任意 $\alpha = m\delta \in \Delta_{\text{im}}^+(Q, \sigma)$, 有

(1) 如果 $o(\sigma) = 1$, 即 $\sigma = \text{id}$, 那么

$$A_{Q, \sigma}(\alpha, q) = q + \text{mult } \alpha.$$

(2) 如果 $o(\sigma) = 2$, 那么

$$A_{Q, \sigma}(\alpha, q) = \begin{cases} q + \text{mult } \alpha, & \text{若 } m \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q + \text{mult } \alpha, & \text{若 } m \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

(3) 如果 $o(\sigma) = 3$, 那么

$$A_{Q, \sigma}(\alpha, q) = \begin{cases} q + \text{mult } \alpha, & \text{若 } m \equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}q^3 + \frac{2}{3}q + \text{mult } \alpha, & \text{若 } m \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

(4) 如果 $o(\sigma) = 4$, 那么

$$A_{Q, \sigma}(\alpha, q) = \begin{cases} q + \text{mult } \alpha, & \text{若 } m \equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod{4}, \\ \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q + \text{mult } \alpha, & \text{若 } m \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q + \text{mult } \alpha, & \text{若 } m \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

若 $\sigma = \text{id}$, 则根据文献 [17, 28], 对于每个 $s \geq 1$, 有

$$\text{mult } s\delta = |I| - 1 \quad \text{且} \quad A_Q(s\delta, q) = q + \text{mult } s\delta.$$

因此, 定理 4.1(1) 是成立的. 此时, 应用 (3.5), 得到

$$I_Q(m\delta, q) = \sum_{r|m} \frac{1}{r} \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) (q^s + \text{mult } m\delta) = \sum_{r|m} \frac{1}{r} \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) q^s + \text{mult } m\delta \sum_{r|m} \frac{1}{r} \sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right).$$

根据文献 [26, 定理 3.24], 有等式

$$\sum_{s|r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) q^s = r\varphi_r(q), \quad (4.1)$$

其中 $\varphi_r(q)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上首项系数为 1 的 r 次不可约多项式的个数. 于是, 结合 (3.2), 得到等式 (参见文献 [32, 命题 5.1])

$$I_Q(m\delta, q) = \sum_{r|m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$

根据上面的讨论, 为了证明定理 4.1, 我们只需要考虑 $\sigma \neq \text{id}$ 的情形. 下面将分情形考虑. 由 (3.6) 和引理 3.2 知, $A_{Q,\sigma}(\alpha, q)$ 与 Q 的定向无关. 因此, 我们在每一种情形只考虑 Q 的一个特殊的定向. 另外, 我们将计算 Q 在 k 上的 F - 稳定表示的个数, 而不是直接计算不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模的个数. 我们的处理方法是使用文献 [7, 11, 12] 给出的 Q 在 $k = \mathbb{F}_q$ 上不可分解表示的分类. 特别地, 我们将利用文献 [7, 第 6 节] 中关于 Q 的单正则表示的具体刻画.

众所周知, 对于仿射箭图 Q , 其在 k 上的任意一个不可分解表示是预投射的, 正则的或预内射的. 由 Q 的预投射表示或预内射表示诱导的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模的维数向量都是实根. 因此, 我们只需要考虑由 Q 在 k 上的正则表示诱导的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模. 根据路代数 kQ 的 Auslander-Reiten 箭图的结构 (参见文献 [13, 15, 33]), 我们知道每个不可分解正则表示要么属于无限个齐次管中的一个, 要么属于有限个非齐次管中的一个. 我们把属于齐次管中的所有不可分解表示称为齐次的, 把属于非齐次管中的所有不可分解表示称为非齐次的. 根据引理 2.2 知, Q 的一个齐次 (非齐次) 不可分解表示的 Frobenius- 扭仍是齐次的 (非齐次的), 而且, 在同一个管中的不可分解表示具有相同的 F - 周期. 因而, 计算不可分解正则表示的 F - 周期归结为计算单正则表示的 F - 周期.

在如下所述中, 令 n 记箭图 Q 的顶点的个数, 即 $n = |Q_0|$. 箭图 Q 的自同构 σ 将由虚箭向描述. 对于任意 $m, r \geq 1$, 令 $I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r)$ 记由 Q 的 F - 周期为 r 的齐次不可分解表示诱导的维数向量为 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模同构类的个数.

情形 1 箭图 Q 和 σ 如下给出 ($n = 2\ell$ 且 $\ell \geq 2$):

其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 具有型 $D_{\ell+1}^{(2)}$. 此时, 表示

$$X_{\lambda,t}: \begin{array}{c} k^t \\ \swarrow \quad \searrow \\ k^t \quad k^t \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{c} J_t(\lambda) \\ \mathbf{1}_t \end{array}} \begin{array}{c} k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t \cdots k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t \\ k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t \cdots k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{c} \mathbf{1}_t \\ \mathbf{1}_t \end{array}} k^t \quad (\lambda \in k \setminus \{0\}, t \geq 1)$$

构成 Q 的所有齐次不可分解表示的一个完全集, 其中 $\mathbf{1}_t$ 记 t -阶单位矩阵且 $J_t(\lambda) = \lambda \mathbf{1}_t + J_t$, 这里

$$J_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据定义知, $X_{\lambda,t}$ 的 Frobenius- 扭 $X_{\lambda,t}^{[1]}$ 如下给出:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t & \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t & \cdots & k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t & \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t \\ k^t & \searrow & & & & & \nearrow \\ & & \xrightarrow{J_t(\lambda^q)} k^t & \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t & \cdots & k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t & \xrightarrow{\mathbf{1}_t} k^t \end{array}$$

容易验证 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\lambda^{-q},t}$. 归纳地, 对于任意 $r \geq 1$, 有 $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\mu,t}$, 其中 $\mu = \lambda^{(-q)^r}$. 由此我们得到下面结果.

引理 4.2 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t}$ 当且仅当 $\lambda^{(-q)^r} = \lambda$ (等价地, 当 r 是奇数时, $\lambda^{q^r+1} = 1$; 当 r 是偶数时, $\lambda^{q^r} = \lambda$). 特别地, $X_{\lambda,t}$ 的 F - 周期等于 r 当且仅当 r 是满足 $\lambda^{(-q)^r} = \lambda$ 的最小正整数.

根据引理 2.1, 若 $X_{\lambda,t}$ 的 F - 周期是 r , 则

$$\tilde{X}_{\lambda,t} := X_{\lambda,t} \oplus X_{\lambda,t}^{[1]} \oplus \cdots \oplus X_{\lambda,t}^{[r-1]}$$

是 Q 的一个 F - 稳定表示. 它诱导出一个维数向量为 $rt\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模 $\tilde{X}_{\lambda,t}^F$.

设 $m \geq 1$. 对于每个 $r \mid m$, 令 $\phi_r(q)$ 表示 F - 周期为 $r = \frac{m}{t}$ 的 $X_{\lambda,t}$ 的个数. 于是,

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \frac{\phi_r(q)}{r}.$$

另一方面, 根据引理 4.2 知,

$$\sum_{s \mid r} \phi_s(q) = \#\{0 \neq \lambda \in k \mid \lambda^{(-q)^r} = \lambda\} = q^r - (-1)^r.$$

再由 Möbius 反演公式和 (4.1), 得到

$$\phi_r(q) = \sum_{s \mid r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) (q^s - (-1)^s) = \begin{cases} q+1, & \text{若 } r=1, \\ q^2 - q - 2, & \text{若 } r=2, \\ r\varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3. \end{cases}$$

注意到当 $r \geq 3$ 时, $\sum_{s \mid r} (-1)^s \mu(\frac{r}{s}) = 0$. 因此,

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \frac{\phi_r(q)}{r} = \begin{cases} \varphi_1(q) + 1, & \text{若 } r=1, \\ \varphi_2(q) - 1, & \text{若 } r=2, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3. \end{cases}$$

在这种情形下, kQ 的 Auslander-Reiten 箭图包含两个秩为 ℓ 的非齐次管. 利用文献 [7] 中给出的非齐次单正则表示的刻画, 我们可以验证所有非齐次不可分解表示的 F - 周期都是 2. 因此, 对于任意偶数 m , 它们给出了 ℓ 个维数向量为 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ - 模的同构类. 因此, 我们得到下面的结果.

命题 4.3 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) + 1, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_2(q) + \ell - 1, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \begin{cases} \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + 1, & \text{若 } m \text{ 是奇数,} \\ \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \ell, & \text{若 } m \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

结合上面的命题与文献 [17, 推论 8.3], 我们得到等式

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$

情形 2 箭图 Q 及它的自同构 σ 如下给出 ($n = \ell + 2$ 且 $\ell \geq 3$):

于是, 其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 的型为 $A_{2\ell-1}^{(2)}$, 并且如下定义的 Q 的表示 ($\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, $t \geq 1$):

$$X_{\lambda,t}: \begin{array}{c} k^t \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \\ k^t \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \end{array} k^t \oplus k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_{2t}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{1}_{2t}} k^t \oplus k^t \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} k^t \\ \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ j(\lambda) \end{pmatrix}} k^t \end{array}$$

构成了 Q 的齐次不可分解表示的一个完全集. 同构 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\lambda-q,t}$ 导出下面的结果.

引理 4.4 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t}$ 当且仅当 $\lambda(-q)^r = \lambda$.

设 $m \geq 1$. 如情形 1, 对于任意 $r \mid m$, 设 $\phi_r(q)$ 表示 F -周期为 $r = \frac{m}{t}$ 的 $X_{\lambda,t}$ 的个数. 于是,

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \frac{\phi_r(q)}{r}.$$

类似于情形 1 的讨论, 得到

$$\sum_{s \mid r} \phi_s(q) = q^r - 1 - (-1)^r.$$

注意到在此情形下, $\lambda \neq 1$. 应用 Möbius 反演公式和 (4.1), 得到对于 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \frac{\phi_r(q)}{r} = \frac{1}{r} \sum_{s \mid r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) (q^s - 1 - (-1)^s) = \begin{cases} \varphi_1(q), & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_2(q) - 1, & \text{若 } r = 2, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3. \end{cases}$$

进一步, kQ 的 Auslander-Reiten 箭图含有 3 个非齐次管, 它们的秩分别为 2、2 和 $n-3$. 当 m 是奇数时, Q 的非齐次不可分解表示诱导出 $\ell-1$ 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类;

当 m 是偶数时, Q 的非齐次不可分解表示诱导出 $\ell + 1$ 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 综上, 我们得到下面的命题:

命题 4.5 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q, \sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) + \ell - 1, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_2(q) + 1, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q, \sigma}(m\delta, q) = \begin{cases} \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta, & \text{若 } m \text{ 是奇数,} \\ \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta, & \text{若 } m \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

情形 3 设 (Q, σ) 具有如下形式 ($n = \ell + 3$ 且 $\ell \geq 2$):

此时, 对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q, \sigma})$ 的型为 $C_\ell^{(1)}$. 设 $X_{\lambda, t}$ ($\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, $t \geq 1$) 是情形 2 中定义的 Q 的不可分解表示. 于是, 同构 $X_{\lambda, t}^{[1]} \cong X_{\lambda^q, t}$ 导出下面的引理:

引理 4.6 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda, t}^{[r]} \cong X_{\lambda, t}$ 当且仅当 $\lambda^{q^r} = \lambda$.

设 $m \geq 1$ 且 $r \mid m$, 令 $\phi_r(q)$ 记 F -周期为 $r = \frac{m}{t}$ 的 $X_{\lambda, t}$ 的个数. 根据引理 4.6 知,

$$\sum_{s \mid r} \phi_s(q) = \#\{\lambda \in k \mid \lambda^{q^r} = \lambda, \lambda \neq 0, 1\} = q^r - 2.$$

应用 Möbius 反演公式和 (4.1), 对于 $r \mid m$, 有

$$I_{Q, \sigma}^h(\delta, q; r) = \frac{\phi_r(q)}{r} = \frac{1}{r} \sum_{s \mid r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) (q^s - 2) = \begin{cases} \varphi_1(q) - 2, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 2. \end{cases}$$

进一步, 对于任意 $m \geq 1$, Q 的非齐次不可分解表示贡献了 $\ell + 2$ 个维数向量为 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 由此, 我们得到下面结果.

命题 4.7 对于任意 $m, r \geq 1$, 有

$$I_{Q, \sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) + \ell - 2, & \text{若 } r = 1, \\ 2, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \nmid m, \\ \varphi_2(q) + 2, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q, \sigma}(m\delta, q) = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \ell = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$

情形 4 箭图与自同构 (Q, σ) 如下给出 ($n = 2\ell + 1$ 且 $\ell \geq 3$):

其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 的型为 $B_\ell^{(1)}$, 并且如下定义的表示 $X_{\lambda,t}$ (这里 $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, $t \geq 1$):

$$\begin{array}{c} k^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1t \end{pmatrix} \\ \swarrow \searrow \\ k^t \oplus k^t \end{array} \xleftarrow{\mathbf{1}_{2t}} \cdots \xleftarrow{\mathbf{1}_{2t}} k^t \oplus k^t \xrightarrow{\mathbf{1}_{2t}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{1}_{2t}} k^t \oplus k^t \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1t \\ 1t \end{pmatrix} k^t \\ \swarrow \searrow \\ \begin{pmatrix} 1t \\ 0 \end{pmatrix} k^t \end{array}$$

给出了 Q 的齐次不可分解表示的一个完全集. 进一步, 由同构 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\lambda^q,t}$, 我们得到下面引理:

引理 4.8 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t}$ 当且仅当 $\lambda^{q^r} = \lambda$.

类似于情形 3 的讨论, 对于 $m \geq 1$ 和 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) - 2, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 2. \end{cases}$$

在这种情形下, 对于任意 $m \geq 1$, Q 的非齐次不可分解表示导出了 $\ell + 2$ 个维数向量为 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 从而有下面的结果:

命题 4.9 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \ell, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \nmid m, \\ \varphi_2(q) + \ell, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \neq 2 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \ell = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$

情形 5 箭图 Q 及其自同构 σ 具有如下形式 ($n = 2\ell + 3$ 且 $\ell \geq 2$):

其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 的型为 $A_{2\ell}^{(2)}$. 令 $X_{\lambda,t}$ ($\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, $t \geq 1$) 是如情形 4 中定义的 Q 的不可分解表示. 容易验证 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\lambda^{-q},t}$. 于是有下面的结论:

引理 4.10 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t}$ 当且仅当 $\lambda^{(-q)^r} = \lambda$.

同情形 2, 对于 $m \geq 1$ 和 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q), & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_2(q) - 1, & \text{若 } r = 2, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3. \end{cases}$$

此时, 当 m 是奇数时, Q 的非齐次不可分解表示诱导出 ℓ 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类; 当 m 是偶数时, Q 的非齐次不可分解表示诱导出 $\ell + 1$ 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 最后, 我们得到下面的命题.

命题 4.11 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \ell, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \nmid m, \\ \varphi_2(q) + \ell - 1, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \mid m, \\ 1, & \text{若 } r = 4, 2 \mid m \text{ 且 } 4 \nmid m, \\ \varphi_4(q) + 1, & \text{若 } r = 4 \text{ 且 } 4 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \neq 2, 4 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \ell = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$

情形 6 设 Q 和 σ 如下给出 ($n = 5$):

其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 的型为 $D_4^{(3)}$. 对任意 $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ 和 $t \geq 1$, 考虑 Q 的如下表示 $X_{\lambda,m}$:

$$k^t \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_m \end{pmatrix}} k^t \oplus k^t \begin{matrix} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1_m \\ 0 \end{pmatrix}} k^t \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1_m \\ 1_m \end{pmatrix}} k^t \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1_m \\ h(\lambda) \end{pmatrix}} k^t \end{matrix}$$

于是 $\{X_{\lambda,t} \mid \lambda \in k, \lambda \neq 0, 1, t \geq 1\}$ 构成 Q 的齐次不可分解表示的一个完全集, 并且 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\mu,t}$, 其中 $\mu = 1 - \lambda^{-q}$. 由此得到下面结果.

引理 4.12 对于 $r \geq 1$, 有

$$X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^{q^r} = \lambda, & \text{若 } r \equiv 0 \pmod{3}, \\ \lambda^{q^r+1} = \lambda^{q^r} - 1, & \text{若 } r \equiv 1 \pmod{3}, \\ \lambda^{q^r+1} = \lambda - 1, & \text{若 } r \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

设 $m \geq 1$. 对于 $r \mid m$, 令 $\phi_r(q)$ 是 F -周期为 $r = \frac{m}{t}$ 的 $X_{\lambda,t}$ 的个数. 于是,

$$\sum_{s \mid r} \phi_s(q) = \begin{cases} q^r - 2, & \text{若 } 3 \mid r, \\ q^r + 1, & \text{若 } 3 \nmid r, \end{cases}$$

即有

$$\sum_{s \mid r} \phi_s(q) = q^r + 1 - \frac{3}{2}[1 + (-1)^{\varepsilon(r)}],$$

其中 $\varepsilon(r) = 1$, 如果 $3 \mid r$; $\varepsilon(r) = 0$, 如果 $3 \nmid r$. 应用 Möbius 反演公式得到等式

$$\phi_1(q) = q + 1, \quad \phi_3(q) = q^3 - q - 3, \quad \phi_r(q) = \sum_{s \mid r} \mu\left(\frac{r}{s}\right) q^s = r\varphi_r(q), \quad r \neq 1, 3.$$

因此, 对于 $m \geq 1$ 和 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \frac{\phi_r(q)}{r} = \begin{cases} \varphi_1(q) + 1, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_3(q) - 1, & \text{若 } r = 3, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \neq 1, 3. \end{cases}$$

在此情形下, kQ 的 Auslander-Reiten 箭图包含 3 个秩为 2 的非齐次管. 所有非齐次不可分解表示的 F -周期是 3. 当 m 是 3 的倍数时, 它们诱导了 2 个维数向量为 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 因此, 我们有下面的命题.

命题 4.13 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) + 1, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_3(q) + 1, & \text{若 } r = 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \neq 1, 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \begin{cases} \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + 1, & \text{若 } 3 \nmid m, \\ \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + 2, & \text{若 } 3 \mid m, \end{cases}$$

且等于 $\sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta$.

情形 7 箭图 Q 及其自同构 σ 如下给出 ($n = 5$):

其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 的型为 $A_2^{(2)}$. 设 $X_{\lambda,t}$ ($\lambda \in k \setminus \{0,1\}$, $t \geq 1$) 是情形 6 中定义的 Q 的不可分解表示. 利用类似的讨论, 我们下面结论.

引理 4.14 我们有同构 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\mu,t}$, 其中 $\mu = 1 - \lambda^q$. 因而, 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,m}^{[r]} \cong X_{\lambda,m}$ 当且仅当 r 是奇数且 $\lambda^{q^r} = 1 - \lambda$ 或者 r 是偶数且 $\lambda^{q^r} = \lambda$.

类似于情形 2 的讨论, 对于任意 $m \geq 1$ 和 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q), & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_2(q) - 1, & \text{若 } r = 2, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3. \end{cases}$$

另一方面, 在此情形下, 当 m 是奇数时, Q 的非齐次不可分解表示提供了 1 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类; 当 m 是偶数时, Q 的非齐次不可分解表示提供了 2 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 由此得到下面的命题.

命题 4.15 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} 1, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \nmid m, \\ 1, & \text{若 } r = 4, 2 \mid m \text{ 且 } 4 \nmid m, \\ \varphi_4(q) + 1, & \text{若 } r = 4 \text{ 且 } 4 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \neq 4 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + 1 = \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$

情形 8 箭图和自同构 (Q, σ) 具有下面形式 ($n = 7$):

其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 的型为 $E_6^{(2)}$. 对于 $\lambda \in k \setminus \{0,1\}$ 和 $t \geq 1$, 考虑 Q 的如下表示 $X_{\lambda,t}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & k^t & & & \\ & & & \downarrow A & & & \\ & & & k^t \oplus k^t & & & \\ & & & \downarrow B & & & \\ k^t & \xrightarrow{C} & k^t \oplus k^t & \xrightarrow{D} & k^t \oplus k^t \oplus k^t & \xleftarrow{E} & k^t \oplus k^t \xleftarrow{F} k^t \end{array}$$

其中 $A = C = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_t \\ 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1}_t \end{pmatrix}$, 且

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_t & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} J_t(\lambda) & \mathbb{1}_t \\ \mathbb{1}_t & \mathbb{1}_t \\ \mathbb{1}_t & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1}_t & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix}.$$

于是, $\{X_{\lambda,t} \mid \lambda \in k, \lambda \neq 0, 1, t \geq 1\}$ 是 Q 的齐次不可分解表示的一个完全集. 进一步, 利用同构 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\mu,t}$, 其中 $\mu = 1 - \lambda^q$, 我们得到下面引理.

引理 4.16 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t}$ 当且仅当 r 是奇数且 $\lambda^{q^r} = 1 - \lambda$ 或者 r 是偶数且 $\lambda^{q^r} = \lambda$. 如情形 7 (亦见情形 2), 对于 $m \geq 1$ 和 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q), & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_2(q) - 1, & \text{若 } r = 2, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3. \end{cases}$$

此时, kQ 的 Auslander-Reiten 箭图包含 3 个秩分别为 2、3 和 3 的非齐次管. 当 m 是奇数时, Q 的非齐次不可分解表示提供了 2 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类; 当 m 是偶数时, Q 的非齐次不可分解表示提供了 5 个维数向量是 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 由此得到下面的命题.

命题 4.17 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) + 2, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_2(q) + 2, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \begin{cases} \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + 2, & \text{若 } m \text{ 是奇数,} \\ \sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + 4, & \text{若 } m \text{ 是偶数,} \end{cases}$$

且等于 $\sum_{r \mid m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta$.

情形 9 设 (Q, σ) 如下给出 ($n = 7$):

其对应的 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}(C_{Q,\sigma})$ 的型为 $G_2^{(1)}$. 设 $X_{\lambda,t}$ ($\lambda \in k \setminus \{0, 1\}, t \geq 1$) 是情形 8 中定义的 Q 的不可分解表示. 此时, 我们有下面的引理.

引理 4.18 我们有同构 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\lambda^q,t}$. 特别地, 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t}$ 当且仅当 $\lambda^{q^r} = \lambda$.

利用类似于情形 3 的讨论, 对于 $m \geq 1$ 和 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) - 2, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 2. \end{cases}$$

对于任意 $m \geq 1$, Q 的非齐次不可分解表示贡献了 4 个维数向量为 $m\delta$ 的不可分解 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -模的同构类. 于是得到下面结果:

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} 2, & \text{若 } r = 3 \text{ 且 } 3 \nmid m, \\ \varphi_3(q) + 2, & \text{若 } r = 3 \text{ 且 } 3 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \neq 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \sum_{r|m} \varphi_r(q) + 2 = \sum_{r|m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$
$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & & & & k' \oplus k' & & & & \\
& & & & & & \downarrow A & & & & \\
k' & \xrightarrow{B} & k' \oplus k' & \xrightarrow{C} & k' \oplus k' \oplus k' & \xrightarrow{D} & k' \oplus k' \oplus k' \oplus k' & \xleftarrow{E} & k' \oplus k' \oplus k' & \xleftarrow{F} & k' \oplus k' & \xleftarrow{G} & k'
\end{array}$$
$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1}_t & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1}_t \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_t & J_t(\lambda) \\ \mathbb{1}_t & 0 \\ \mathbb{1}_t & \mathbb{1}_t \\ 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_t & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_t & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_t \end{pmatrix}.$$

引理 4.20 我们有 $X_{\lambda,t}^{[1]} \cong X_{\lambda^{q,t}}$. 对于 $r \geq 1$, $X_{\lambda,t}^{[r]} \cong X_{\lambda,t}$ 当且仅当 $\lambda^{q^r} = \lambda$. 利用类似于情形 3 的讨论, 对于 $m \geq 1$ 和 $r \mid m$, 有

$$I_{Q,\sigma}^h(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) - 2, & \text{若 } r = 1, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 2. \end{cases}$$

1542

命题 4.21 设 $m, r \geq 1$, 则

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q; r) = \begin{cases} \varphi_1(q) + 1, & \text{若 } r = 1, \\ 3, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \nmid m, \\ \varphi_2(q) + 3, & \text{若 } r = 2 \text{ 且 } 2 \mid m, \\ \varphi_r(q), & \text{若 } r \geq 3 \text{ 且 } r \mid m, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

特别地,

$$I_{Q,\sigma}(m\delta, q) = \sum_{r|m} \varphi_r(q) + 4 = \sum_{r|m} \varphi_r(q) + \text{mult } m\delta.$$

注 4.22 设 Q 是 Kronecker 箭图, 即它包含两个顶点 u 和 v 以及从 u 到 v 的两个箭向 ρ_1 和 ρ_2 . 于是, Q 有唯一一个非平凡的自同构 σ , 它固定顶点 u 和 v , 但是交换 ρ_1 与 ρ_2 . 然而, 相应的 $\mathbb{F}_q$ -代数 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ 与路代数 $\mathbb{F}_q Q$ 是同构的. 因此, 这种情形归结为 $\sigma = \text{id}$ 的情形, 即箭图表示的情形.

综合上面各个情形的命题、公式 (3.6) 和下面等式:

$$\varphi(1) = q, \quad \varphi_2(q) = \frac{1}{2}(q^2 - q), \quad \varphi_3(q) = \frac{1}{3}(q^3 - q), \quad \varphi_4(q) = \frac{1}{4}(q^4 - q^2),$$

我们就得到了定理 4.1 的一个完整证明. 同时, 我们也得到下面的推论.

推论 4.23 设 Q 是一个不含有向循环的仿射箭图且 σ 是 Q 的一个自同构, 则

$$I_{Q,\sigma}(\alpha, q) = \begin{cases} \text{mult } \alpha = 1, & \text{若 } \alpha \in \Delta_{\text{re}}^+(Q, \sigma), \\ \sum_{r|m} \varphi_r(q) + \text{mult } \alpha, & \text{若 } \alpha = m\delta \in \Delta_{\text{im}}^+(Q, \sigma). \end{cases} \quad (4.2)$$

注 4.24 (1) 文献 [34, 35] 讨论了上述公式 (4.2) 的 3 个特殊情形, 其目的是为了研究相应的 Weyl-Kac 分母恒等式 (denominator identity) 的 q -形式.

(2) 显然, 建立多项式 $I_{Q,\sigma}(\alpha, q)$ 与 $A_{Q,\sigma}(\alpha, q)$ 之间的联系应该是一个有意义的问题. 根据上面得到的关于仿射情形的结论, 可以期望下面的猜想成立: 设 Q 是任意一个不带有向循环的箭图且 σ 是它的一个自同构, 则对于每个 $\alpha \in \Delta_{\text{im}}^+(Q, \sigma)$, 多项式 $I_{Q,\sigma}(\alpha, q)$ 与 $A_{Q,\sigma}(\alpha, q)$ 有相同的常数项.

参考文献

- 1 Gabriel P. Unzerlegbare darstellungen, I. Manuscripta Math, 1972, 6: 71–103
- 2 Gabriel P. Indecomposable representations, II. Symp Math, 1973, 11: 81–104
- 3 Lusztig G. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. J Amer Math Soc, 1990, 3: 447–498
- 4 Lusztig G. Introduction to Quantum Groups. Progress in Mathematics. Boston: Birkhäuser, 1993
- 5 Nakajima H. Quiver varieties and Kac-Moody algebras. Duke Math J, 1998, 91: 515–560
- 6 Dlab V, Ringel C M. On algebras of finite representation type. J Algebra, 1975, 33: 306–394
- 7 Dlab V, Ringel C M. Indecomposable Representations of Graphs and Algebras. Providence: Amer Math Soc, 1976
- 8 Ringel C M. Representations of K -species and bimodules. J Algebra, 1976, 41: 269–302
- 9 Deng B, Du J. Frobenius morphisms and representations of algebras. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 3591–3622
- 10 Deng B, Du J. Algebras, representations and their derived categories over finite fields. Contemp Math, 2006, 413: 25–41
- 11 Donovan P W, Freislich M R. The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras. Carleton: Carleton Math Lecture Notes, 1973

- 12 Nazarova L A. Representations of quivers of infinite type. *Math USSR Izv Ser Mat*, 1973, 7: 752–791
- 13 Gabriel P, Roiter A V. Representations of Finite-Dimensional Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1997
- 14 Auslander M, Reiten I, Smalø S O. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 15 Simson D, Skowroński A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, vol. 2: Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
- 16 Deng B, Du J, Parshall B, et al. Finite Dimensional Algebras and Quantum Groups. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 150. Providence: Amer Math Soc, 2008
- 17 Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 18 Wan Z X. Introduction to Kac-Moody Algebra. Teaneck: World Scientific, 1991
- 19 Borcherds R. Generalized Kac-Moody algebras. *J Algebra*, 1988, 115: 501–512
- 20 Tanisaki T. Foldings of root systems and Gabriel's theorem. *Tsukuba J Math*, 1980, 4: 89–97
- 21 Hubery A. Quiver representations respecting a quiver automorphism: A generalisation of a theorem of Kac. *J Lond Math Soc* (2), 2004, 69: 79–96
- 22 Kac V. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. *Invent Math*, 1980, 56: 57–92
- 23 Deng B, Xiao J. A new approach to Kac's theorem on representations of valued quivers. *Math Z*, 2003, 245: 183–199
- 24 Wang Y. Counting representations of valued quivers over finite fields. *Algebra Colloq*, 2006, 13: 655–666
- 25 Wang Y, Xiao J. The double Ringel-Hall algebras of valued quivers. *Chin Ann Math Ser B*, 2006, 27: 701–722
- 26 Lidl R, Niederreiter N. Finite Fields. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 27 Hua J. Representations of quivers over finite fields. PhD Thesis. Sydney: University of New South Wales, 1998
- 28 Kac V. Root systems, representations of quivers. In: *Invariant Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 74–108
- 29 Crawley-Boevey W, Van den Bergh M. Absolutely indecomposable representations and Kac-Moody Lie algebras. *Invent Math*, 2004, 155: 537–559
- 30 Hausel T. Kac's conjecture from Nakajima quiver varieties. *Invent Math*, 2010, 181: 21–37
- 31 Hausel T, Letellier E, Rodriguez-Villegas F. Positivity for Kac polynomials and DT-invariants of quivers. *Ann of Math* (2), 2013, 177: 1147–1168
- 32 Hua J, Xiao J. On Ringel-Hall algebras of tame hereditary algebras. *Algebr Represent Theory*, 2002, 5: 527–550
- 33 Ringel C M. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 34 Obul A. A q -analogue of the Weyl-Kac denominator formulas of types $\tilde{F}_{41}$ and $\tilde{G}_{21}$. *Algebra Colloq*, 2007, 14: 639–648
- 35 Obul A, Pang Y. A q -analogue of the Weyl-Kac denominator identity of type $\tilde{B}_n$. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 1027–1035

Representations of quivers with automorphisms over finite fields

DENG BangMing, OBUL Abdukadir & PANG YaLi

Abstract Let $\mathbb{F}_q$ be the finite field of q elements and $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ be its algebraic closure. Let Q be a quiver with automorphism σ . In this paper we focus on the study of modules over the $\mathbb{F}_q$ -algebra $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ associated with the pair (Q, σ) in terms of F -stable representations of Q over k , and we also give several polynomials obtained by counting numbers of indecomposable $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -modules. In particular, we introduce the notion of σ -absolutely indecomposable $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -modules. In the case that Q is an affine quiver, we present the formulas for the numbers of isoclasses of σ -absolutely indecomposable $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ -modules of a fixed dimension vector.

Keywords quiver with automorphism, hereditary algebra, indecomposable representation

MSC(2010) 16G20, 17B67

doi: 10.1360/N012017-00028