V-SMCG算法对起伏月面异常回波的定量研究

赵子豪¹, 叶红霞^{1,2*}

1. 复旦大学电磁波信息科学教育部重点实验室, 上海 200433;

2. 中国科学院月球与深空探测重点实验室, 北京 100101

*联系人, E-mail: yehongxia@fudan.edu.cn

收稿日期: 2018-09-28; 接受日期: 2018-12-25; 网络出版日期: 2019-04-24

国家自然科学基金(编号: 61871424)和中国科学院月球与深空探测重点实验室开放课题(编号: LDSE201706)资助项目

摘要 本文基于月面石块的分布模型和概率分布函数, 采用蒙特卡洛反函数法建立随机分布石块的月面几何模型. 基于Maxwell积分方程发展了矢量稀疏矩阵规范网格法(Vector Sparse Matrix Canonical Grid, V-SMCG)矩量法的求解过程, 数值仿真了不同月面几何的全极化复散射回波, 并根据Mini-RF雷达观测配置计算回波圆极化比(Circular Polarization Ratio, CPR). 仿真结果表明: 月面随机分布石块引起月面几何起伏粗糙度的增加, 多次散射明显增强了雷达后向回波, 并使得CPR值出现大于1的情况, 尤其是大于波长尺度的石块会使得CPR值远远大于1.

关键词 月球石块, 稀疏矩阵规范网格法, 圆极化比

PACS: 95.75.Hi, 96.20.-n, 95.85.Bh

1 引言

月球上是否存在水资源一直是人类深空探索的焦点之一, 月表红外谱观测和阿波罗月球样本分析为月球水和羟基(OH)的存在提供了证据^[1,2], 其含量从几ppm (per million百万分比)到几千ppm不等. 月球两极的永久阴影区(PSR)由于没有光照终年保持一个极低的温度, 某些区域温度低至25 K (−248°C), 被认为是水冰及其他一些挥发性物质的可能存储地点. 月球永久阴影区雷达回波的高圆极化比(Circular Polarization Ratio, CPR)长期以来一直被认为是水冰存在的证据之一^[3], 水冰颗粒间的相干后向散射增强效应(Coherent Backscattering Opposition Effect, CBOE)会使得CPR值

明显增大^[4], LRO飞船上的Mini-RF设备对月球表面的成像观测也发现了若干高CPR值的陨石坑^[5]. 然而, 雷达回波还包括月表粗糙面散射、月面与石块的耦合散射等物理机制, 高CPR值还可能与石块的二面角散射和月面粗糙度有很大关系^[6,7].

为了更好地解释雷达探测数据, 有必要首先研究雷达电磁波在外星复杂地表及其内部的散射传播物理过程, 国内外不少学者开始尝试从散射仿真和散射机理的角度出发来研究雷达回波数据. 例如: Campbell^[8]用二面角和偶极子两种理想散射模型来区分Mini-RF雷达数据中高CPR区域的不同散射机理. 然而二面角散射基于局部光滑、相互垂直的两个石块平面, 偶极子散射虽然可以用来等效石块裂缝或边缘的散射, 但

引用格式: 赵子豪, 叶红霞. V-SMCG算法对起伏月面异常回波的定量研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 060501

Zhao Z H, Ye H X. Quantitative study of the anomalous scattering echoes of rough lunar surface by V-SMCG algorithm (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 060501, doi: [10.1360/SSPMA2018-00330](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00330)

其均匀随机性假设无法考虑石块形状及其取向性, 导致其模型对大部分区域不适用. Fa等人^[9]提出了粗糙上界面、随机Rayleigh小粒子层、平直下界面的辐射传输模型来解释Chandrayaan-1上的Mini-SAR雷达回波数据中高CPR值的原因. 但该模型仍然是基于统计方法, 忽略了多次散射及相位相干性, 无法研究相干散射的CBOE现象. 为了对雷达回波数据中的异常回波进行合理的解释, 有必要对电磁波与月表不同散射体的相互作用从正向机理上进行精确的电磁散射计算与分析.

为了从散射机理上挖掘月球地表散射回波高CPR值的原因, 本文从正向电磁建模和散射计算出发, 研究电磁波在粗糙起伏月球表面发生的传播、散射、透射等各种电磁相互作用. 国内外对粗糙面的散射研究有大尺度的几何光学和物理光学方法、小尺度微扰法、小斜率近似法等, 然而月球表面既存在地形起伏引起的大尺度粗糙度(如月海), 也存在碎石引起的微小尺度起伏, 并且这种起伏通常在厘米至毫米量级, 与高频雷达(如19.35 GHz)观测波长可比拟, 必须寻求精确的全波仿真方法, 如矩量法(Method of Moment, MoM). 然而矩量法中矩阵与矢量的乘积运算(Matrix-Vector Product, MVP)需消耗 $O(N^2)$ 的储存空间和计算时间(其中 N 为未知量的个数), 对于月面这种扩展型粗糙面模型必然存在未知量多和计算量大的问题, 迫切需要寻求快速方法. 目前矩量法的加速算法大致分三类: 第一类是将离散单元分组并忽略组元间的相互作用, 如前后向迭代法(Forward and Backward Method, FBM)、多层快速多极子方法(Multilevel Fast Multiple Algorithm, MLFMA)^[10,11]等; 第二类方法是基于子矩阵的代数分解, 如自适应交叉算法(Adaptive Cross Approximation Method, ACA), 通过SVD分解或QR分解将阻抗矩阵分解成低秩矩阵的乘积, 从而减少存储空间和加速MVP计算^[12]; 第三类方法是基于网格思想, 如稀疏矩阵规范网格(Sparse Matrix Canonical Grid, SMCG)法^[13], 通过将目标区域划分为规则的正方形网格, 网格上等效应源用脉冲基函数展开, 单元间的相互作用按距离分为强作用项和弱作用项, 其中弱作用项与矢量的乘积运算可用FFT加速计算, 将计算复杂度降低为 $O(N \lg N)$, 存储量减小到 $O(N)$.

月球地表经历长期的物理和化学过程, 形成了月

面各种复杂的粗糙起伏地形地貌, 如不同尺度的撞击坑和石块分布等. 为了更精细地描述粗糙起伏的月表地形, 尤其是小尺度石块引起的地表粗糙度, 本文首先根据月表石块的分布模型和分布曲线, 用蒙特卡洛方法模拟生成陨石散落的月面模型, 并用三角形网格来描述月球表面波长尺度和亚波长尺度的粗糙起伏几何. 本文进一步发展研究了基于矢量RWG基函数的SMCG加速算法(Vector Sparse Matrix Canonical Grid, V-SMCG), 用于月面粗糙地表的散射仿真和全极化回波计算, 进而得到不同石块分布地形的雷达回波CPR、相位差等信息, 力图为月球水冰探测中的CPR异常回波做出散射机理解释和定量分析. 本文主要考虑远小于波长的石块引起月面粗糙起伏的情况, 用介质粗糙面散射理论研究分析雷达散射回波, 对于大尺度石块的体散射将在另一篇文章中以不同的建模和计算方法进行研究.

2 蒙特卡洛反函数法生成月面石块地形

文献^[14]给出了不同月面区域的石块分布模型: 崎岖月海的石块分布规律为 $N=10^{-3.5557 \log \frac{D}{10}-2.7888}$, 平坦月海的石块分布规律为 $N=10^{-2.5883 \log \frac{D}{10}-3.5301}$, 其中 D 为石块直径(单位米), N 为直径大于 D 的石块总数. 设直径为 D 的石块的概率分布函数(Probability Distribution Function, PDF)为 $F(D)$, 若石块直径的范围为 $D_1 \sim D_n$, 则 $F(D)$ 可由 $N(D)$ 表示为

$$F(D) = \frac{N(D_1) - N(D)}{N(D_1) - N(D_n)}. \quad (1)$$

设球形几何的石块半掩埋于大尺度起伏的月壤层中, 石块在月面的横向位置均匀随机且互不重叠. 石块随机尺寸根据石块概率分布函数采用蒙特卡洛反函数法生成, 步骤如下:

(1) 考虑石块直径范围为 $D_1 \sim D_{\max}$, 需要生成石块的数量为 $M = N(D_1) - N(D_{\max})$;

(2) 将直径范围离散为 $(D_1, D_2, \dots, D_{\max})$, 对应的概率分布为

$$F(0) = 0, F(D_1), F(D_2), \dots, F(D_{N-1}), F(D_{\max}) = 1;$$

(3) 生成 M 个 $(0,1)$ -之间均匀分布的随机数 $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_M$, 对第 m 个随机数 $\bar{F}_m$, 若存在一个 n 使

得 $F_{n-1} < \bar{F}_m < F_n$, 则对应存在一个符合该概率分布的 $\bar{D}_m < D_n$;

(4) 生成 M 组 $(0, 1)$ 之间均匀分布的随机数作为石块位置坐标 (x_m, y_m) , 从 $m = 2$ 开始, 若当前生成的石块参数满足 $\bar{D}_m + \bar{D}_n < 2\sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$, 其中 $n < m$, 表示之前已经确认放置的石块标号, 则该坐标无效, 需重新生成当前石块坐标;

(5) 平面上以坐标 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_M, y_M)$ 为中心叠加对应直径 $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_M$ 的半球几何模型.

选取石块的直径范围为 $0.004 \text{ m} < D < 0.1 \text{ m}$, 崎岖月海和平坦月海的概率分布函数 $y = F(D)$ 如图 1 所示. 将尺寸范围等间隔离散成 21 个分度值, 在 $6 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ 的区域范围内生成石块颗粒, 图 2 是用上述方法生成的一个样本, 对该图中的石块数量数值统计其概率密度函数, 如图 1 中虚线所示. 可以看出, 数值生成的石块分布概率与原曲线基本吻合.

3 V-SMCG 加速算法

3.1 混合场积分方程

如图 3 所示, 平面电磁波 $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ 以 $\mathbf{k}_i$ 方向入射到粗糙介质分界面 S_1 上, 设 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别表示粗糙面上表面的等效电流和等效磁流, 根据等效原理, 区域 0 的散射场 $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ 和区域 1 的透射场 $(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)$ 可由格林函数积分表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= -jk_0 \eta_0 \mathbf{J} * \mathbf{g}_0 - \frac{j\eta_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J} * \mathbf{g}_0)}{k_0} - \nabla \times (\mathbf{M} * \mathbf{g}_0), \\ \mathbf{H}_s &= -\frac{jk_0 \mathbf{M} * \mathbf{g}_0}{\eta_0} - \frac{j \nabla (\nabla \cdot \mathbf{M} * \mathbf{g}_0)}{k_0 \eta_0} + \nabla \times (\mathbf{J} * \mathbf{g}_0), \\ \mathbf{E}_1 &= jk_0 \eta_0 \mathbf{J} * \mathbf{g}_1 + \frac{j\eta_1 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J} * \mathbf{g}_1)}{k_1} + \nabla \times (\mathbf{M} * \mathbf{g}_1), \\ \mathbf{H}_1 &= \frac{jk_1 \mathbf{M} * \mathbf{g}_1}{\eta_1} + \frac{j \nabla (\nabla \cdot \mathbf{M} * \mathbf{g}_1)}{k_0 \eta_0} - \nabla \times (\mathbf{J} * \mathbf{g}_1), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 η_0 和 η_1 分别表示区域 0 和区域 1 的波阻抗, $g_h = \frac{e^{jk_h r}}{4\pi r}$ 为区域 h 的标量格林函数, $\mathbf{X}(\mathbf{r}) * \mathbf{g}_h(\mathbf{r}) = \int \mathbf{X}(\mathbf{r}) g_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ 表示卷积.

根据粗糙面的边界条件得到两个区域的混合场面积分方程为

图 1 (网络版彩图) 石块的累计概率密度函数

Figure 1 (Color online) Cumulative probability density function of rock.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i &= \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ jk_0 \eta_0 \mathbf{J} * \mathbf{g}_0 - \frac{\eta_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J} * \mathbf{g}_0)}{jk_0} \right. \\ &\quad \left. + jk_0 \eta_0 \mathbf{J} * \mathbf{g}_1 - \frac{\eta_1 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J} * \mathbf{g}_1)}{jk_1} + \nabla \times (\mathbf{M} * \mathbf{g}_1) \right\}, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i &= \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ \frac{jk_0 \mathbf{M} * \mathbf{g}_0}{\eta_0} - \frac{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{M} * \mathbf{g}_0)}{jk_0 \eta_0} \right. \\ &\quad - \nabla \times (\mathbf{J} * \mathbf{g}_0) + \frac{jk_1}{\eta_1} \mathbf{M} * \mathbf{g}_1 \\ &\quad \left. - \frac{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{M} * \mathbf{g}_1)}{jk_0 \eta_0} - \nabla \times (\mathbf{J} * \mathbf{g}_1) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 是分界面的外法向矢量, 由区域 1 指向区域 0.

将等效源 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{M}$ 用 RWG 基函数 $\mathbf{f}$ 展开为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \eta_0 \sum_{n=1}^N \mathbf{f}_n M_n, \\ \mathbf{J} &= \sum_{n=1}^N \mathbf{f}_n J_n, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 J_n 和 M_n 分别为展开系数. 将 (4) 式代入 (3) 式, 用伽辽金法进行权函数测试得到矩阵方程为

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ -\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \quad (5)$$

该阻抗矩阵是一个稠密矩阵, 各元素分别表示为

$$A_{mn} = \frac{l_m l_n}{4\pi j \omega} \sum_{h,p,q} \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{e^{-jk_h R^{pq}}}{4\pi R^{pq}} \left(pq - \frac{k_h^2}{4} \mathbf{p}_m^p \cdot \mathbf{p}_n^q \right), \quad (6)$$

$$B_{mn} = \frac{l_m l_n}{16\pi} \sum_{h,p,q} \frac{(1 + jk_h R^{pq}) e^{-jk_h R^{pq}}}{(R^{pq})^3} \mathbf{p}_m^p \cdot (\mathbf{p}_n^q \times \mathbf{R}^{pq}), \quad (7)$$

$$D_{mn} = \frac{l_m l_n}{4\pi j \omega \varepsilon_0} \sum_{h,p,q} \frac{e^{-jk_h R^{pq}}}{4\pi R^{pq}} \left(pq - \frac{k_h^2}{4} \mathbf{p}_m^p \cdot \mathbf{p}_n^q \right), \quad (8)$$

图 2 (网络版彩图)蒙特卡洛法生成的月面石块分布样本
Figure 2 (Color online) Rock distributed lunar surface sample generated with Monte-Carlo method.

图 3 粗糙面散射的等效原理
Figure 3 Equivalent principle of rough surface scattering.

$$U_m = \frac{l_m}{2} [\mathbf{p}_m^+ \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_{mc}^+) + \mathbf{p}_m^- \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_{mc}^-)], \quad (9)$$

$$V_m = \frac{l_m}{2} \eta_0 [\mathbf{p}_m^+ \cdot \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_{mc}^+) + \mathbf{p}_m^- \cdot \mathbf{H}_i(\mathbf{r}_{mc}^-)], \quad (10)$$

$$R^{pq} = \sqrt{(x_m^p - x_n^q)^2 + (y_m^p - y_n^q)^2 + (z_m^p - z_n^q)^2}. \quad (11)$$

式中 p, q 取 +1 和 -1 分别表示 RWG 基函数的两个三角形 T^+ 和 T^- , $h = 0, 1$ 表示区域 0 和区域 1 的 Green 函数.

3.2 V-SMCG 加速算法

将粗糙面 $z = f(x, y)$ 在水平投影面 XOY 上进行均匀三角网格剖分, 设粗糙面在 x 和 y 两个方向的离散单元分别为 m 和 n 个, 共形成 $N = 3mn - m - n$ 个 RWG 三角形配对. 对于大型粗糙面, 传统的 MoM 方法直接使用共轭梯度迭代方法 (Conjugate Gradient, CG) 求解稠密的矩阵方程 (5) 式, 其时间复杂度为 $O(N^2)$, 主要运算在于反复执行稠密矩阵 $\mathbf{Z}$ 与列向量 $\mathbf{X}$ 的乘积运算. 本文研究基于 Green 函数泰勒展开的 V-SMCG 方法来加速迭代过程中矩阵与矢量的乘积计算.

为了使阻抗矩阵形成规范的 Toeplitz 矩阵形式, 需要对基函数排序进行网格规范化, 排列顺序是: mn 个斜边组成的基函数、 $m(n-1)$ 个横边组成的基函数、 $m(n-1)$ 个竖边组成的基函数, 它们分别按照先行后列的方式排序. 这样, 原阻抗矩阵中与 x 和 y 坐标有关的项具有 Toeplitz 性, (5)–(8) 式具备 BTTB (Block-Toeplitz Toeplitz-Blocked) 矩阵形式^[15]. 设 BTTB 矩阵 ${}^{u,v}\mathbf{T}_{s,t}$ 可分解为 $u \times v$ 个 Toeplitz 子矩阵, 且每个子矩阵是 $s \times t$ 维的 Toeplitz 矩阵, 则该矩阵的第一行和第一列子矩阵的第一行和第一列元素包含了矩阵的全部信息, 只需存储这 $(s+t-1)(u+v-1)$ 个元素即可, 从而节省存储量需求.

由于 Toeplitz 矩阵具有转移不变性, 即 $\mathbf{T}(m, n) = \mathbf{T}(m-n)$, 它与列向量 $\mathbf{X}$ 的乘积运算即 $y(m) = \sum_{n=1}^L \mathbf{T}(m-n)\mathbf{X}(n)$ 可用 FFT 进行快速计算. (5)–(8) 式的 BTTB 矩阵可用 2D-FFT 进行快速计算, 从而将矩阵矢量乘积运算的时间复杂度降为 $O(N \lg N)$.

选择一个远近划分距离 r_m , $R_{pq}^{pq} > r_m$ 的元素称为弱作用项, 记为 $\mathbf{Z}_w$; $R_{pq}^{pq} \leq r_m$ 的元素组成的矩阵称为强作用项, 记为 $\mathbf{Z}_s$. 强作用矩阵 $\mathbf{Z}_s$ 可用稀疏矩阵表示, 它与列向量相乘的时间复杂度为 $O(N)$, 储存空间为 $O(N)$.

将格林函数进行泰勒展开, 保留前 $M+1$ 项得到

$$g_h = \sum_{i=0}^M b_i z^i. \quad (12)$$

将(12)式代入弱作用矩阵 $\mathbf{Z}_w$, 其中第一项表示 $z=0$ 平面格林函数项, 记为 $\mathbf{Z}_{FS}$, 它可进一步分解为左稀疏矩阵 $\mathbf{Z}^L$ 、中间项 $\mathbf{G}$ 、右稀疏矩阵 $\mathbf{Z}^R$ 三者的乘积形式, 即

$$\mathbf{Z}_{FS} = \mathbf{Z}^L \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}^R, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{Z}^L$ 包含源点的 z 坐标信息, $\mathbf{Z}^R$ 包含场点的 z 坐标信息, $\mathbf{G}$ 只包含场点和源点的 x, y 坐标信息, 它具备TBBT矩阵形式, 如下

$$\mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} m \times n \mathbf{T}_{m \times n}^{hpq} & m \times (n-1) \mathbf{T}_{m \times n}^{hpq} & m \times n \mathbf{T}_{m \times (n-1)}^{hpq} \\ (m-1) \times n \mathbf{T}_{m \times n}^{hpq} & (m-1) \times (n-1) \mathbf{T}_{m \times n}^{hpq} & (m-1) \times n \mathbf{T}_{m \times (n-1)}^{hpq} \\ m \times n \mathbf{T}_{(m-1) \times n}^{hpq} & m \times (n-1) \mathbf{T}_{(m-1) \times n}^{hpq} & m \times n \mathbf{T}_{(m-1) \times (n-1)}^{hpq} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

因此, $\mathbf{Z}_{FS}$ 与列向量 $\mathbf{X}$ 相乘的计算顺序为: 先计算 $\mathbf{Z}^R \cdot \mathbf{X}$, 需要 $O(N)$ 时间; 再用2D-FFT计算 $\mathbf{G} \cdot (\mathbf{Z}^R \cdot \mathbf{X})$, 需要 $O(N \lg N)$ 时间; 最后计算 $\mathbf{Z}^L \cdot [\mathbf{G} \cdot (\mathbf{Z}^R \cdot \mathbf{X})]$, 需要 $O(N)$ 时间. 空间存储需求为 $O(N)$.

基于上面的矩阵分解, 矩阵方程(5)可用SMFSIA (Sparse Matrix Flat Surface Iterative Approach)方法迭代求解如下:

$$(\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_{FS}) \cdot \mathbf{X}^n = \mathbf{b}^n, \quad (15)$$

$$\mathbf{b}^n = \mathbf{b} - (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_s - \mathbf{Z}_{FS}) \cdot \mathbf{X}^{n-1}. \quad (16)$$

上面的迭代计算过程为: 先用(16)式更新矩阵方程(15)式的右端项, 再用CG方法对它进行求解, 整个迭代过程以 $\mathbf{X}^{n-1} = \mathbf{0}$ 开始. 这样, (5)式中的稠密矩阵方程 $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X}$ 运算转化成(15)式中的Toeplitz矩阵与矢量乘积 $\mathbf{Z}_{FS} \cdot \mathbf{X}$ 和稀疏矩阵与矢量乘积 $\mathbf{Z}_s \cdot \mathbf{X}$, 从而加速矩阵求解速度. 而传统MoM方法直接求解稠密矩阵方程(5)式, 不仅收敛很慢, 而且每次迭代中都需要执行稠密矩阵与列向量的乘积运算, 需要耗费大量的运算量. 图4给出了V-SMCG算法的计算复杂度与存储量随粗糙面尺寸的关系, 并传统共轭梯度算法进行对比, 可以看出: 随着粗糙面尺寸的增大, V-SMCG方法在存储量和计算复杂度方面都存在明显的优势, 尤其适合大尺度粗糙面的电磁散射计算.

考虑一个频率 $f = 300$ MHz的锥形波^[16]入射到相关长度为 $l = \lambda$ 、均方高度 $h = 0.2\lambda$ 的高斯粗糙面上, 粗

糙面的相对介电常数 $\epsilon_r = 4$. 用FFT方法生成一个粗糙面样本, 图5给出了直接矩阵求逆和V-SMCG算法求得的极化散射系数的对比, 两种方法的计算结果基本一致, 由此验证了V-SMCG算法的准确性.

考虑两种不同尺寸的Gauss粗糙面, 表1给出了直接矩阵矢量相乘的共轭梯度法和V-SMCG加速算法的迭代次数和计算时间. 可以看出: 对于小尺寸粗糙面, V-SMCG方法虽然比传统MoM的迭代次数少, 但是由于未知量较小时2D-FFT的时间消耗更多, 实际计算时间更长. 而对于大尺度粗糙面, 虽然两种方法的总迭代步数基本相同, 但V-SMCG方法的消耗时间明显比传统MoM少得多. 因此, 粗糙面的尺寸越大, V-SMCG方法的性能优势越明显, 是解决电大尺寸粗糙面的一种

图4 (网络版彩图) V-SMCG算法的计算复杂度与存储量
Figure 4 (Color online) Computational complexity and storage of V-SMCG algorithm.

图5 (网络版彩图)传统MoM对V-SMCG算法的验证
Figure 5 (Color online) Verification of V-SMCG algorithm with conventional MoM.

加速方法.

4 粗糙月面的散射计算与异常回波分析

设月壤的相对介电常数为 $\varepsilon_r = 2.0 - 0.01i$, 取Mini-RF的工作频率 $f = 2.38 \text{ GHz}$. 为了抑制数值计算的边缘效应, 入射波采用锥形波来模拟雷达波束, 锥形波宽度参数 $g = 0.8\lambda$, 月面照射区域尺寸为 $L_x \times L_y = 4\lambda \times 4\lambda$.

根据图1所示的石块分布曲线, 取直径范围为 $D = 0.006 - 0.126 \text{ m}$, 按照上面的方法进行石块随机生成和散射计算, 对100次样本生成和散射计算的同极化和交叉极化后向散射系数如图6所示, 图中红线和蓝

线分别表示平坦月海和崎岖月海随机石块情况. 可以看出: 平坦月海的后向散射回波很小, 而崎岖月海由于月面起伏粗糙度明显增加, 多次散射使得同极化和交叉极化后向散射明显增强, 并且崎岖月海的CPR出现更多 $\text{CPR} > 1$ 的情况. 此外, 后向强回波和大CPR值对应的月面生成样本模型中出现了尺度较大的石块, 即使是平坦月海模型, 若出现大尺寸的石块, 也会产生很大的CPR值, 如图7所示.

对月面粗糙度和散射回波参数的统计分析分别如表2和3所示, 可以看出: 崎岖月海地区石块数量和尺寸的增加导致月面起伏粗糙度明显增加, 崎岖表面地形使得交叉极化HV项增加, CPR均值为2.06. 图8(a)是

表 1 V-SMCG算法与传统MoM的算法复杂度比较

Table 1 Algorithm complexity comparison of V-SMCG and MoM method

区域大小	未知量	方法	迭代次数	运算总时间
$1\lambda \times 1\lambda$	$N = 280$	V-SMCG	67	11 min 32 s
		传统MoM	107	8 min 37 s
$2.4\lambda \times 2.4\lambda$	$N = 1680$	V-SMCG	82	1 h 7 min 30 s
		传统MoM	84	4 h 16 min 16 s
$3\lambda \times 3\lambda$	$N = 2640$	V-SMCG	89	1 h 19 min 30 s
		传统MoM	91	4 h 50 min 03 s

图 6 (网络版彩图)不同月面石块起伏地形的后向散射回波. 蓝色表示崎岖月海石块模型, 红色表示平坦月海石块模型

Figure 6 (Color online) Backscattered echoes of undulating terrain of different lunar rocks. Blue indicates a rugged moon sea block model, and red indicates a flat moon sea block model.

图 7 (网络版彩图)大CPR值对应的石块生成模型
Figure 7 (Color online) Stone generation model corresponding to large CPR value.

表 2 石块分布占空比和粗糙度参数

Table 2 Stone duty cycle and roughness parameters

地区	占空比	均方高度 (m)	相关长度 (m)	粗糙度
平坦月海	0.01722	0.0017	0.0067	0.2569
崎岖月海	0.4035	0.0145	0.0254	0.5709

表 3 回波参数数据统计

Table 3 Parameter statistics of echo data

地区		HH	VV	HV	CPR
平坦月海	均值	0.00843	0.0172	5.48×10^{-4}	5.60
	方差	0.0172	2.06×10^{-6}	1.44×10^{-7}	4.30
崎岖月海	均值	0.0119	0.0250	0.0036	2.06
	方差	5.17×10^{-5}	1.43×10^{-4}	2.45×10^{-6}	7.50

图 8 Mini-RF雷达对Tycho陨石坑的探测数据. (a) Tycho陨石坑的光学图像; (b) 圆极化比
Figure 8 Mini-RF radar detection data for Tycho crater. (a) Optical image of crater Tycho; (b) circular polarization ratio (CPR).

Tycho陨石坑内部的光学图像, 图8(b)是Mini-RF对该区域探测的CPR分布. 该陨石坑是新生陨石坑, 坑内部地形非常崎岖, 由于形成时间短, 石块退化较轻, 石块较多, 其CPR高于月球其他区域, 其中0.054%的CPR大于5, 最大能达到28.

5 结论

本文基于月球石块的概率分布函数, 采用蒙特卡洛反函数法进行随机石块空间分布生成, 形成粗糙起伏的月面几何模型. 对介质粗糙面的积分方程用RWG

基函数离散, 发展了V-SMCG算法进行MoM矩阵方程求解, 从而计算不同石块分布粗糙月面的雷达回波及圆极化雷达探测回波参数. 计算结果表明: 月面随机分布的石块使得月面粗糙度增加, 多次散射使得雷达

后向散射同极化和交叉极化回波增强, 圆极化CPR参数出现了大于1的异常值, 尤其是当月面几何模型中出现大尺寸石块的时候, CPR值很大, 个别出现了CPR>10的情况.

参考文献

- 1 Boyce J W, Liu Y, Rossman G R, et al. Lunar apatite with terrestrial volatile abundances. *Nature*, 2010, 466: 466–469
- 2 Clark R N. Detection of adsorbed water and hydroxyl on the Moon. *Science*, 2009, 326: 562–564
- 3 Nozette S, Lichtenberg C L, Spudis P, et al. The clementine bistatic radar experiment. *Science*, 1996, 274: 1495–1498
- 4 Hapke B. Coherent backscatter and the radar characteristics of outer planet satellites. *Icarus*, 1990, 88: 407–417
- 5 Spudis P D, Bussey D B J, Baloga S M, et al. Evidence for water ice on the Moon: Results for anomalous polar craters from the LRO Mini-RF imaging radar. *J Geophys Res Planets*, 2013, 118: 2016–2029
- 6 Eke V R, Bartram S A, Lane D A, et al. Lunar polar craters-Icy, rough or just sloping? *Icarus*, 2014, 241: 66–78
- 7 Fa W, Cai Y. Circular polarization ratio characteristics of impact craters from Mini-RF observations and implications for ice detection at the polar regions of the Moon. *J Geophys Res Planets*, 2013, 118: 1582–1608
- 8 Campbell B A. High circular polarization ratios in radar scattering from geologic targets. *J Geophys Res*, 2012, 117: E06008
- 9 Fa W Z, Wicczorek M A, Heggy E. Modeling polarimetric radar scattering from the lunar surface: Study on the effect of physical properties of the regolith layer. *J Geophys Res Planets*, 2011, 116: E03005
- 10 Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J Comput Phys*, 1985, 60: 187–207
- 11 Cui T J, Chew W C, Chen G, et al. Efficient MLFMA, RPFMA, and FAFFA algorithms for EM scattering by very large structures. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 2004, 52: 759–770
- 12 Bebendorf M, Rjasanow S. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 2003, 70: 1–24
- 13 Sun Y F, Chen Z H. Sparse matrix canonical grid method for scattering from 3D random dielectric scatterers (in Chinese). *J Univ Sci Technol China*, 2003, 33: 345–350 [孙玉发, 陈志豪. 分析三维随机介质目标散射问题的SMCG方法. 中国科学技术大学学报, 2003, 33: 345–350]
- 14 张玥. 月球表面地形数据分析及仿真研究. 硕士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2008. 36–37
- 15 Chan H F, Jin X Q. An Introduction to Iterative Toeplitz Solvers. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007
- 16 Ye H, Jin Y-Q. Parameterization of the tapered incident wave for numerical simulation of electromagnetic scattering from rough surface. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 2005, 53: 1234–1237

Quantitative study of the anomalous scattering echoes of rough lunar surface by V-SMCG algorithm

ZHAO ZiHao¹ & YE HongXia^{1,2*}

¹ Key Laboratory for Information Science of Electromagnetic Waves, Fudan University, Shanghai 200433, China;

² Key Laboratory of Lunar and Deep Space Exploration, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China

Based on the probability distribution function of the stones, the model of the stones is established using the inverse function method of Monte Carlo Method. Then the full polarization radar echo is calculated according to the Maxwell integration equations, using method of moment accelerated with V-SMCG algorithm. Then the circular polarization ratio (CPR) is calculated according to Mini-RF radar observation configuration. The simulation results show that random stones distribution causes surface roughness and backscattering echo enhancement. Moreover, the multiple scattering of stones can cause anomalous CPR in radar echoes, especially for the stones with size larger than wavelength.

lunar surface stones, sparse matrix canonical grid, circular polarization ratio

PACS: 95.75.Hi, 96.20.-n, 95.85.Bh

doi: [10.1360/SSPMA2018-00330](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00330)