Dyadic 域上幺模格的局部密度公式

王瑞卿

郑州航空工业管理学院数理系, 郑州 450015

E-mail: rqwang@zzia.edu.cn

收稿日期: 2015-01-08; 接受日期: 2016-06-08; 网络出版日期: 2016-11-03

河南省基础与前沿研究计划 (批准号: 132300410373) 资助项目

摘要 最近, Fiori 给出了 dyadic 域上幺模格的局部密度公式, 但其秩 3 的局部密度公式与 Pfeuffer 和 Körner 的结果有矛盾, 而且其秩 4 的公式中指数部分在一些情形下出现分数, 与局部密度定义矛盾. 本文利用 Siegel 的质量公式及邻格方法建立 dyadic 域上幺模格的邻格个数与局部密度的关系, 得到秩 3 和 4 幺模格的局部密度, 结合 Pfeuffer 的结果, 得到 dyadic 域上任意幺模格的局部密度公式.

关键词 dyadic 幺模格 局部密度 Siegel 质量公式 邻格

MSC (2010) 主题分类 11E08, 11E12

1 引言

正定二次型的质量公式由 Siegel^[1,2] 给出, 是二次型的解析理论的重要结果, 在正定二次型的分类中有重要应用. 此公式把正定二次型的质量表示为二次型在局部域上的局部密度的乘积, 所以求出局部域上二次型的局部密度, 就可得到正定二次型的精确质量. 下面简称局部密度为密度. 非 dyadic 局部域上二次型的精确密度公式已经得到 (参见文献 [3, 定理 1]), 但 dyadic 局部域上的二次型的密度公式非常复杂, 没有完整的结果. Pall^[4] 和 Watson^[5] 得到了 $\mathbb{Z}_2$ 上一般格的密度公式. Körner^[3] 得到了秩小于等于 3 的实二次域的 dyadic 局部域上一般格的密度公式. Pfeuffer^[6] 得到了一般 dyadic 域上秩 2 格的密度公式. Pfeuffer^[7] 和 Körner^[8] 得到了单位格的密度公式. 文献 [9–11] 得到了极大格的精确质量公式. 由于 dyadic 域上格的密度公式的复杂性, 所以已给的公式往往出现错误, 例如, 文献 [4] 给出的 $\mathbb{Z}_2$ 上一般格的密度公式在文献 [5] 中得到修正; 文献 [12] 又讨论了 $\mathbb{Z}_2$ 上一般格的密度公式的启发性形式; 文献 [13] 详细推导了 $\mathbb{Z}_2$ 上的一般格的密度公式. 最近, 文献 [14] 给出了一般 dyadic 域上的幺模格的密度公式 (其密度定义与文献 [3, 15] 只差一个因子 $2^{-1}N_{\mathbf{p}^{\text{rank}L-\text{ord}_{\mathbf{p}}2}}$), 其秩 2 的幺模格密度公式与文献 [6] 一致, 但其秩 3 的幺模格的密度公式 (参见文献 [14, 引理 4.16]) 与文献 [15, (34)] 有矛盾, 并且与文献 [3] 中实二次域上的密度公式不相等; 秩 4 的幺模格密度公式 (参见文献 [14, 引理 4.17]) 的指数部分在一些情形下出现分数, 与格的密度定义矛盾. 本文利用 Siegel 质量公式和邻格方法, 建立了 dyadic 域上幺模格的邻格个数与密度的关系, 得到了秩 3 和 4 幺模格的密度公式, 结合 Pfeuffer 的结果, 导出了一般 dyadic 域上任意幺模格的密度公式.

本文的记号及术语若无说明均同于 O'Meara 的专著 [16].

英文引用格式: Wang R Q. Local density formulas of unimodular lattices over dyadic fields (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 479–486, doi: 10.1360/N012015-00006

2 幺模格的邻格与局部密度的关系

令 F 是全实代数数域, 其代数整数环记为 $\mathfrak{o}$, 所有非平凡除子的集合记为 Ω , 所有 Archimedes 除子的集合记为 Ω_∞ . 用 $\mathfrak{p}$ 表示 F 的素理想及其对应的离散素除子. 令 (V, Q) 是 F 上的正则二次空间, $B(\cdot, \cdot)$ 是相伴的对称双线性型. 若有限生成 $\mathfrak{o}$ -模 $L \subset V$, 且 $FL = V$, 则称 L 是 V 上格. 若 V 内两个格 L 和 M , 对 $\forall \mathfrak{p} \in \Omega$, 均有 $L_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$, 则称 L 与 M 属同一种, 记为 $M \in \text{gen}L$. 对于 $\text{gen}L$ 中的两个格 L 和 M , 若存在 $\sigma \in O(V)$ 使得 $\sigma(L) = M$, 则称 L 与 M 属同一类.

定义 2.1 若正定格种 $\text{gen}L$ 有 h 个类 $L_1, \dots, L_h$, 它们的自同构群 $O(L_i)$ ($i = 1, \dots, h$) 的阶为 $|O(L_i)|$, 则称 $\text{mass}(L) = \sum_{i=1}^h \frac{1}{|O(L_i)|}$ 为 $\text{gen}L$ 的质量.

设 l 是正整数, $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{o}$ 的素理想, 格 L 的秩为 n . 令 $A_{\mathfrak{p}^l}(L, L)$ 是 $\mathfrak{o}$ -线性映射 $\sigma : L/\mathfrak{p}^l L \mapsto L/\mathfrak{p}^l L$, 且满足 $B(\sigma x, \sigma y) \equiv B(x, y) \pmod{\mathfrak{p}^l}$, 对任意 $x, y \in L$ 的个数, 则 $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{\mathfrak{p}^l}(L, L) N_{\mathfrak{p}}^{-ln(n-1)/2}$ 极限存在 (参见文献 [1]).

定义 2.2 局部密度定义为 $\alpha_{\mathfrak{p}}(L) = \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow \infty} A_{\mathfrak{p}^l}(L, L) N_{\mathfrak{p}}^{-ln(n-1)/2}$.

我们有 Minkowski-Siegel 质量公式 [2]:

$$\text{mass}(L) = \left(\frac{2\Gamma(\frac{1}{2}) \cdots \Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n(n+1)/4}} \right)^h D^{n(n-1)/4} N(\mathfrak{v}L)^{(n+1)/2} \prod_{\mathfrak{p} \in \Omega - \Omega_\infty} \alpha_{\mathfrak{p}}(L)^{-1},$$

其中 h 为代数扩张 $F/\mathbb{Q}$ 的次数, D 为 F 的判别式, $\mathfrak{v}L$ 为 L 的体积, n 为 L 的秩. 由此公式, 求 $\text{mass}(L)$ 的问题转化为求局部密度的问题.

定义 2.3 [17] 设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{o}$ 的素理想, 整格 L 满足 $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{v}L$. 若 $x \in \mathfrak{p}^{-1}L \setminus L$, 且 $Q(x) \in \mathfrak{o}$. 记 $L(x) = \mathfrak{o}x + \{y \mid B(x, y) \in \mathfrak{o}, y \in L\}$, 称 $L(x)$ 为 L 的 $\mathfrak{p}$ -邻格.

对任意的素除子 $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ 有 $L(x)_{\mathfrak{q}} = L_{\mathfrak{q}}$. 若 $\mathfrak{p}$ 是非 dyadic 素理想, 则有 $L(x)_{\mathfrak{p}} \cong L_{\mathfrak{p}}$, 即 $L(x) \in \text{gen}L$. 若 $\mathfrak{p}$ 是 dyadic 素理想, 可能出现 $L(x)_{\mathfrak{p}} \not\cong L_{\mathfrak{p}}$, 即 $L(x) \notin \text{gen}L$. 例如, $\mathbb{Z}$ 上秩 8 单位格 I_8 与偶幺模格 E_8 是 2-邻格.

格 M 是 L 的 $\mathfrak{p}$ -邻格的充要条件 (参见文献 [17]) 是 $[L : L \cap M] = [M : L \cap M] = N_{\mathfrak{p}}$. 显然, L 也是 M 的 $\mathfrak{p}$ -邻格.

定义 2.4 设 π 是 dyadic 局部整环 $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ 的素元, $L_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ 上的局部幺模格. 若 $x \in \pi^{-1}L_{\mathfrak{p}} \setminus L_{\mathfrak{p}}$, 且 $Q(x) \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, 记 $L_{\mathfrak{p}}(x) = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}x + \{y \mid B(x, y) \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, y \in L_{\mathfrak{p}}\}$, 则称 $L_{\mathfrak{p}}(x)$ 为 $L_{\mathfrak{p}}$ 的 $\mathfrak{p}$ -邻格或 π -邻格.

显然, 格 $M_{\mathfrak{p}}$ 是局部幺模格 $L_{\mathfrak{p}}$ 的 $\mathfrak{p}$ -邻格的充要条件是 $M_{\mathfrak{p}}$ 在 $L_{\mathfrak{p}}$ 中的不变因子是 $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \dots, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ 或 $[L_{\mathfrak{p}} : L_{\mathfrak{p}} \cap M_{\mathfrak{p}}] = [M_{\mathfrak{p}} : L_{\mathfrak{p}} \cap M_{\mathfrak{p}}] = N_{\mathfrak{p}}$.

整体格 M 是 L 的 $\mathfrak{p}$ -邻格当且仅当 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 $L_{\mathfrak{p}}$ 的 $\mathfrak{p}$ -邻格, 且 $L_{\mathfrak{q}} = M_{\mathfrak{q}}$, 对 $\forall \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$.

若 dyadic 局部域 $F_{\mathfrak{p}}$ 上二次空间 $V_{\mathfrak{p}}$ 上有幺模格类 $L_{\mathfrak{p}}$ 和 $M_{\mathfrak{p}}$, 则由文献 [18, 命题 3.6] 可知, 存在 $V_{\mathfrak{p}}$ 上的幺模格类 $L_{1\mathfrak{p}}, \dots, L_{k\mathfrak{p}}$, 使得 $L_{\mathfrak{p}}, L_{1\mathfrak{p}}, \dots, L_{k\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathfrak{p}$ -邻格链.

命题 2.1 令 $\mathfrak{p}$ 是 dyadic 素理想, M 是正定整格 L 的 $\mathfrak{p}$ -邻格, 且 $\text{gen}L \neq \text{gen}M$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{v}L$.

(1) 若 L 的 $\mathfrak{p}$ -邻格中有 n 个格属于 $\text{gen}M$, 则 n 等于局部格 $L_{\mathfrak{p}}$ 的 $\mathfrak{p}$ -邻格中同构于 $M_{\mathfrak{p}}$ 的个数, 即 n 仅与 $\text{gen}L$ 有关.

(2) 若 L 的 $\mathfrak{p}$ -邻格中有 n_1 个格属于 $\text{gen}M$, M 的 $\mathfrak{p}$ -邻格中有 n_2 个格属于 $\text{gen}L$, 则 $\text{mass}(M) = \frac{n_1}{n_2} \text{mass}(L)$.

证明 (1) 证明参见文献 [18, 命题 4.2].

(2) 由于文献 [18, 定理 4.3] 的证明仅用到了 $L_{\mathfrak{p}}$ 和 $M_{\mathfrak{p}}$ 是幺模格的条件, 所以 (2) 的结论成立. $\square$

引理 2.1 令 T 是 F 的除子的有限集, 且 $\Omega_\infty \subset T$. 若 $v_p \in \dot{F}_p$, $p \in T$, 则存在 $d \in \dot{F}$ 和素除子 $q \notin T$, 满足

- (1) $d \equiv v_p \pmod{\dot{F}_p^2}$, 对任意 $p \in T$;
- (2) $\text{ord}_q d = 1$;
- (3) $\text{ord}_{p'} d = 0$, 对任意 $p' \notin T \cup \{q\}$.

证明 由文献 [19, 引理 2.1] 可得. $\square$

定理 2.1 设 p 是 dyadic 素除子, 若 L_p 和 M_p 是局部域 F_p 上维数大于 1 的二次空间 V_p 上的幺模格, 且 M_p 是 L_p 的 p -邻格, T_1 是 L_p 的 p -邻格中同构于 M_p 的个数, T_2 是 M_p 的 p -邻格中同构于 L_p 的个数, 则 $\frac{T_1}{\alpha_p(L_p)} = \frac{T_2}{\alpha_p(M_p)}$.

证明 令 T 为 F 的所有 dyadic 除子和 Archimedes 除子的集合, 令 $v_p = dL_p$, $v_{p'} = 1$, 对所有 $p' \in T \setminus \{q\}$. 由引理 2.1 知, 存在非 dyadic 素除子 q 及恒正数 $d \in F$, 满足 $d \equiv v_p \pmod{\dot{F}_p^2}$, $d \equiv 1 \pmod{\dot{F}_{p'}^2}$, 对任意 $p' \in T \setminus \{p\}$, $\text{ord}_q d = 1$, 而 $\text{ord}_{p''} d = 0$, 对任意 $p'' \notin T \cup \{q\}$.

构造判别式 $d(FL) = d$ 的正定格 L : 令 $(L)_p = L_p$. 对 $p' \neq p, q$ 的离散素除子, 令 $(L)_{p'} \cong \langle 1 \rangle \perp \cdots \perp \langle 1 \rangle \perp \langle d\pi_{p'}^{-\text{ord}_{p'} d} \rangle$, 其中 $\pi_{p'}$ 是局部域 $F_{p'}$ 的素元. 对 $p' \in \Omega_\infty$, 令 $(L)_{p'} \cong \langle 1 \rangle \perp \cdots \perp \langle 1 \rangle \perp \langle d \rangle$. 令 $(L)_q \cong \langle 1 \rangle \perp \cdots \perp \langle 1 \rangle \perp \langle d \rangle$, 或 $(L)_q = \langle 1 \rangle \perp \cdots \perp \langle 1 \rangle \perp \langle \varepsilon \rangle \perp \langle d\varepsilon \rangle$, 其中 ε 是非 dyadic 除子 q 处的非平方单位元, 显然此两格的 Hasse 符号不相等.

对 $p' \neq q$ 的非 dyadic 除子, $F_{p'}(L)_{p'}$ 的 Hasse 符号为 1. 对 $p' \neq p$ 的 dyadic 除子, $F_{p'}(L)_{p'}$ 的 Hasse 符号也为 1. 如上选取 $(L)_q$ 使得 $F_q L_q$ 的 Hasse 符号满足在所有除子上的 Hasse 符号乘积 $\prod_{p' \in \Omega} S_{p'}(F_{p'}(L)_{p'}) = 1$. 由文献 [16, 定理 72:1] 知, 这样的正定格 L 是存在的.

再构造正定格 M 使得当 $p' \neq p$ 时, $(M)_p = M_p$, $(M)_{p'} = (L)_{p'}$, 则 L 与 M 是 p -邻格, 且对任意 $p' \neq p$, $\alpha_{p'}(L) = \alpha_{p'}(M)$. 由 Minkowski-Siegel 质量公式和命题 2.1 可导出定理结论. $\square$

由定理 2.1 知, 只要知道幺模格邻格链中一个格的局部密度, 就可以通过相互的邻格个数 T_1 和 T_2 , 逐次求取整条邻格链中其他格的局部密度, 而求取邻格个数 T_1 和 T_2 是一个较简单的问题.

3 Dyadic 幺模格的局部密度公式

本节中 p 为 dyadic 素理想或素除子, π 是 dyadic 局部域 F_p 的素元, $\text{ord}_p 2 = e$. 所讨论的格 L 、 M 、 N 和 G 等是 $\mathfrak{o}_p$ 上的幺模格. nL 、 $\mathfrak{g}L$ 和 $\mathfrak{w}L$ 分别表示 L 的范、范群和权. 下文 ε 、 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 和 ε_4 等是单位元, 单位元 ρ 满足二次亏理想 $\mathfrak{d}(1 - 4\rho) = 4\mathfrak{o}_p$. 在计算推导中利用了下面的性质: 对 dyadic 局部域 F_p 中的任意单位元 ε_0 , 存在单位元 ε , 使得 $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon^2 \pmod{\pi}$.

设 l 是正整数, 用 $A_{p^l}(L, N)$ 表示 $\text{mod } p^l L$ 不同的 $\mathfrak{o}_p$ -线性映射 $\sigma: N \mapsto L$, 且满足 $B(\sigma x, \sigma y) \equiv B(x, y) \pmod{p^l}$, 对任意 $x, y \in N$ 的个数.

设格 L 和 N 的秩分别为 m 和 r , 由文献 [1, 引理 13] 知, $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{p^l}(L, N) N p^{-l(mr - r(r+1)/2)}$ 极限存在.

定义 3.1 局部密度 $\alpha_p(L, N) = 2^{-\delta_{mr}} \lim_{l \rightarrow \infty} A_{p^l}(L, N) N p^{-l(mr - r(r+1)/2)}$.

若 N 是 L 的子格, 用 $A'_{p^l}(L, N)$ 表示 $\mathfrak{o}_p$ -线性映射 $\sigma: L \mapsto L$, 且满足 $B(\sigma x, \sigma y) \equiv B(x, y) \pmod{p^l}$, 对任意 $x, y \in L$, 限制到 $N \mapsto L$ 上 $\text{mod } p^l L$ 不同的映射个数.

命题 3.1 若幺模格 $L = N \perp N^\perp$, 则 $A_{p^l}(L, L) = A'_{p^l}(L, N) A_{p^l}(N^\perp, N^\perp)$.

证明 由文献 [3, 引理 2] 可得. $\square$

记 $\tilde{\alpha}_p(L, N) = \lim_{l \rightarrow \infty} A'_{p^l}(L, N) N p^{-l(mr - r(r+1)/2)}$.

命题 3.2 若幺模格 $L = N \perp N^\perp$, 则 $\alpha_p(L) = \tilde{\alpha}_p(L, N)\alpha_p(N^\perp)$.

证明 由文献 [15, 引理 4] 可得. $\square$

命题 3.3 设幺模格 L 有子幺模格 N , 且 $L = N \perp M$, 满足对任一分解 $L = N' \perp M'$, 若有 $N \cong N'$, 总有 $M \cong M'$, 则 $\alpha_p(L, N) = \tilde{\alpha}_p(L, N)$.

证明 由文献 [15, 引理 5] 可得. $\square$

记偶幺模格 $H_0 \cong \langle A(0, 0) \rangle \perp \cdots \perp \langle A(0, 0) \rangle$, $H'_0 \cong \langle A(0, 0) \rangle \perp \cdots \perp \langle A(0, 0) \rangle \perp \langle A(2, 2\rho) \rangle$, 则 H_0 和 H'_0 分别称为双曲偶幺模格和非双曲偶幺模格.

定义 3.2 称幺模格 L 是偶可变的, 若存在分解 $L = H_0 \perp G_1 = H'_0 \perp G_2$, 其中 H_0 和 H'_0 是 L 的秩最大的偶幺模子格; 否则称 L 为偶不变的.

命题 3.4 设幺模格 $L = N \perp G$, N 是 L 的秩最大的偶幺模子格. 设 N 的秩为 $2r$, $e = \text{ord}_p 2$, 则

- (1) 若 $G = 0$, $\alpha_p(L) = Np^{2re}(1 \mp Np^{-r}) \prod_{k=1}^r (1 - Np^{-2k})$, 其中 $\mp$ 对应于 $L \cong H_0$ 或 $L \cong H'_0$;
- (2) 若 $G \neq 0$, 则 $\alpha_p(L) = \alpha_p(L, N)\alpha_p(G)$, 且

$$\alpha_p(L, N) = \begin{cases} 2Np^{2r[(a+b)/2]}(1 - Np^{-r}) \prod_{k=1}^{r-1} (1 - Np^{-2k}), & N \cong H_0, \quad L \text{ 偶不变的,} \\ 2Np^{2r[(a+b)/2]}(1 + Np^{-r}) \prod_{k=1}^{r-1} (1 - Np^{-2k}), & N \cong H'_0, \quad L \text{ 偶不变的,} \\ Np^{2r[(a+b)/2]} \prod_{k=1}^r (1 - Np^{-2k}), & L \text{ 偶可变的,} \end{cases}$$

其中 a 和 b 分别是 G 的范生成子和权生成子的阶.

证明 (1) 参见文献 [15, 定理 1].

(2) 由于 N 是偶幺模格, 由文献 [16, 推论 93:14a、命题 3.2 和 3.3] 可得 $\alpha_p(L) = \alpha_p(L, N)\alpha_p(G)$, 用定义 3.2 的格的偶不变概念代替文献 [15, (26)] 的条件可得 $\alpha_p(L, N)$ 的上述公式. $\square$

由于 dyadic 幺模格 $L \cong H \perp G_0$, 其中 H 是 L 的秩最大的偶幺模格, $\text{rank}(G_0) \leq 4$ (参见文献 [16, 例 93:18]), 利用命题 3.4, 我们只需计算秩小于等于 4 的且无偶幺模子格的幺模格的密度即可.

命题 3.5 (1) 设 ε 是单位元, 则秩 1 的幺模格的密度 $\alpha_p(\langle \varepsilon \rangle) = Np^e$;

(2) 设 a 和 b 是秩 2 非偶的幺模格 L 的范生成子和权生成子的阶, $d = dL$ 是其判别式, 则

$$\alpha_p(L) = \begin{cases} 2Np^{e+[(a+b)/2]}, & \mathfrak{d}(-d) = \mathfrak{n}L\mathfrak{w}L, \\ Np^{e+[(a+b)/2]}, & \mathfrak{d}(-d) \subseteq \pi \mathfrak{n}L\mathfrak{w}L. \end{cases}$$

证明 (1) 由定义可得. (2) 参见文献 [6]. $\square$

注 3.1 由文献 [16, 例 93:11 和 93:17] 知, 存在秩 2 的局部幺模格的局部二次空间有四类, 幺模格的代表为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\rho \end{pmatrix}, \quad \langle \varepsilon_1 \rangle \perp \langle -\varepsilon_1(1 - \pi^k \varepsilon_2) \rangle, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \pi^{e-1} & 1 \\ 1 & 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-e+1} \rho \end{pmatrix},$$

其中 ε_1 和 ε_2 为单位元, $k < 2e$ 为奇数或 $\pi^k \varepsilon_2 = 4\rho$ 且 e 为奇数; 最后一个矩阵中 $e-1$ 为奇数. 这些格的密度可以利用定义, 即解同余方程组容易得到. 注意到其他类的秩 2 幺模格都在这些幺模格的 π -邻格链中, 再利用定理 2.1 可得到邻格链中其他格的密度, 其结果与上述结果一致, 详细过程略去.

下面研究秩 4 无偶幺模子格的幺模格到含有偶幺模子格的幺模格的邻格链及邻格个数, 利用定理 2.1 求出秩 4 无偶幺模子格的幺模格的密度.

命题 3.6 设 L 是秩 4 判别式 $dL = 1$ 的幺模格, 不含偶幺模子格, 则 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$ 或 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \rho \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\varepsilon_2^{-1} \rho \pi^{-b}) \rangle$, 其中 a 和 b 分别是 L 的范生成子和权生成子的阶.

证明 参见文献 [16, 例 93:18]. $\square$

下文用 “ $L \xrightarrow{\pi\text{-邻格}} M$ ” 表示 M 是 L 的 π -邻格, 记 $N(L, M, \pi)$ 为 L 的 π -邻格中同构于 M 的邻格个数, 并简称为邻格个数.

命题 3.7 设 M 是 dyadic 素除子 $\mathfrak{p}$ 处的秩 4 判别式 1 的幺模格, 不含偶幺模格, 即 $M \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$ 或 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \rho \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\varepsilon_2^{-1} \rho \pi^{-b}) \rangle$, 其中 a 和 b 分别是 M 的范生成子和权生成子的阶, 则

(1) $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^{b+2}, 0) \rangle \xrightarrow{\pi\text{-邻格}} M \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$, 邻格个数见表 1.

(2) $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle \xrightarrow{\pi\text{-邻格}} \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^{b+2}, 0) \rangle$.

若 $b = e - 1$, 则邻格个数为 2, 否则邻格个数为 1.

(3) $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \rho \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^{b+2}, 4\varepsilon_2^{-1} \rho \pi^{-b-2}) \rangle \xrightarrow{\pi\text{-邻格}} \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \rho \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\varepsilon_2^{-1} \rho \pi^{-b}) \rangle$.

当 $b + 2 < e$ 时, 邻格个数为 $N\mathfrak{p}^3$; 当 $b + 2 = e$ 时, 邻格个数为 $N\mathfrak{p}^2 \cdot (N\mathfrak{p} + 1)$.

(4) $\langle A(\varepsilon_1 \pi^{a+2}, 4\varepsilon_1^{-1} \rho \pi^{-a-2}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\varepsilon_2^{-1} \rho \pi^{-b}) \rangle \xrightarrow{\pi\text{-邻格}} \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \rho \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\varepsilon_2^{-1} \rho \pi^{-b}) \rangle$.

当 $a + 2 < e$ 时, 邻格个数为 $N\mathfrak{p}^3$; 当 $a + 2 = e$ 时, 邻格个数为 $N\mathfrak{p}^2 \cdot (N\mathfrak{p} + 1)$.

(5) 上面 (3) 和 (4) 中的反向邻格关系也成立, 邻格个数均为 1.

证明 由邻格的定义直接计算可得命题中幺模格之间的邻格关系, 用命题 3.9 的计算方法可得邻格个数, 参见文献 [18, 命题 4.4]. $\square$

命题 3.8 设 L 是秩 4 的幺模格, 不含偶幺模子格, 判别式 $dL = 1 + \alpha$, $\mathfrak{d}(1 + \alpha) = \alpha \alpha_{\mathfrak{p}} \neq 0$, 则 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -\alpha \varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$ 或 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, -\alpha \varepsilon_2^{-1} \pi^{-b}) \rangle$, 其中 a 和 b 分别是 L 的范生成子和权生成子的阶.

证明 由文献 [16, 93:18] 可知, $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -\alpha \varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$ 或 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -(\alpha - 4\rho) \varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\rho \varepsilon_2^{-1} \pi^{-b}) \rangle$, 其中 a 和 b 分别是 L 的范生成子和权生成子的阶.

下面证明后者也具有命题所给的形式. 设它对应的基向量为 e_1 、 e_2 、 e_3 和 e_4 .

若 $\alpha = 4\rho$, 结论自动成立. 下面证明 $\text{ord}_{\mathfrak{p}} \alpha = k$ 是奇数的情形.

显然, $s = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(-(\alpha - 4\rho) \varepsilon_1^{-1} \pi^{-a})$ 与 b 及 $t = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(4\rho \varepsilon_2^{-1} \pi^{-b})$ 有相同的奇偶性.

若 $s \leq t$, 则由文献 [16, 命题 93:19] 可知, $\langle e_3, e_4, e_2 \rangle \cong \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\rho \varepsilon_2^{-1} \pi^{-b}) \rangle \perp \langle \varepsilon_3 \pi^s \rangle \cong \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle \perp \langle \varepsilon_4 \pi^s \rangle$.

若 $s > t$, 则由文献 [16, 命题 93:19] 可知, $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -(\alpha - 4\rho) \varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) a^{-1} \rangle \perp \langle \varepsilon_2 \pi^b \rangle \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle \varepsilon_5 \pi^b \rangle$, 或者 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\rho \varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle \varepsilon_6 \pi^b \rangle$. 在后者的情形下, $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\rho \varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle$

表 1 邻格个数

a 和 b 满足条件	$N(L, M, \pi)$
$b + 2 < e$	$N\mathfrak{p}^3$
$b + 2 \geq e, \text{ord}_{\pi} a + e = \text{odd}$	$N\mathfrak{p}^2 \cdot (N\mathfrak{p} - 1)$
$b + 2 \geq e, \text{ord}_{\pi} a + e = \text{even}$	$N\mathfrak{p} \cdot (N\mathfrak{p}^2 - 1)$

$\perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, -(\alpha - 4\rho)\varepsilon_2^{-1} \pi^{-b}) \rangle$, 有 $\text{ord}_p(-(\alpha - 4\rho)\varepsilon_2^{-1} \pi^{-b}) < \text{ord}_p(4\rho\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a})$, 且两者有相同奇偶性, 同于上面的讨论, $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, -\alpha\varepsilon_2^{-1} \pi^{-b}) \rangle$. 所以命题成立. $\square$

命题 3.9 设 M 是秩 4 的不含偶幺模子格的幺模格, $dM = 1 + \alpha$, $\mathfrak{d}(1 + \alpha) = \alpha \mathfrak{o}_p \neq 0$, 即 $M \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -\alpha\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$, 其中 a 和 b 中一个是 M 的范生成子的阶, 另一个是权生成子的阶. 令 $c = \text{ord}_\pi(-\alpha\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a})$, $c > b$, 则

(1) $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -\alpha\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^{b+2}, 0) \rangle \xrightarrow{\pi\text{-邻格}} M \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -\alpha\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$, 邻格个数见表 2.

(2) $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -\alpha\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle \xrightarrow{\pi\text{-邻格}} \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, -\alpha\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^{b+2}, 0) \rangle$.

当 $b = e - 1$ 时, 邻格个数为 2, 否则邻格个数为 1.

证明 为了证明简单, 首先对幺模格作 scaling ε_2^{-1} , 不影响结论.

可设格 $L \cong \langle A(\varepsilon \pi^a, -\alpha\varepsilon^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\pi^{b+2}, 0) \rangle$, 基向量为 e_1, e_2, e_3 和 e_4 , 格 $M \cong \langle A(\varepsilon \pi^a, -\alpha\varepsilon^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(\pi^b, 0) \rangle$, 基向量为 l_1, l_2, l_3 和 l_4 .

首先证明结论 (1). 当 $c \leq e, b+2 < c$ 时, 为使 L 的邻格 $L(x) \cong M$, 只需范群 $\mathfrak{g}(L(x)) = \mathfrak{g}M$. 易得到邻格生成元 x 只能取形式 $x = \frac{1}{\pi}(e_3 + x_1 e_4 + x_2 e_2) + x_3 e_4$ 的元. 由邻格的定义, 为得到不同的邻格, 仅需考虑 $x_1, x_2, x_3 \pmod{\pi}$ 的不同情形. 显然, $Q(x) = \pi^b + x_1 2\pi^{-2} + x_3 2\pi^{-1} - x_2^2 \alpha \varepsilon^{-1} \pi^{-a-2}$, $\text{ord}_p Q(x) = b$, 并且 $e_1 + x_2 e_4 \in L(x)$, $Q(e_1 + x_2 e_4) = \varepsilon \pi^a$. 由文献 [16, 命题 93:4] 可得 $Q(x) \in \mathfrak{g}M$, 且对任意的 $x_1, x_2, x_3 \pmod{\pi}$ 均有 $\mathfrak{g}(L(x)) = \mathfrak{g}M$. 所以符合条件的邻格的个数为 $N\mathfrak{p}^3$, 即 $N(L, M, \pi) = N\mathfrak{p}^3$.

当 $c \leq e, b+2 = c$ 时, 由文献 [16, 命题 93:4 和定理 93:16], 可得 $L \cong \langle A(\varepsilon \pi^a, -\alpha\varepsilon^{-1} \pi^{-a}) \rangle \perp \langle A(0, 0) \rangle$, 对应的基向量记为 e_1, e_2, e'_3 和 e'_4 . 类似上面的方法, 邻格生成元需取形式:

(i) $x = \frac{1}{\pi}(e'_3 + x_1 e'_4 + x_2 e_2) + x_3 e'_4$, 且若 $c < e$ 时满足 $x_2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$; 若 $c = e$ 时满足 $2x_1 \alpha^{-1} \varepsilon \pi^a + x_2^2 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, 则此形式的邻格个数为 $N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p} - 1)N\mathfrak{p}$.

(ii) $x = \frac{1}{\pi}(e_2 + x_1 e'_4) + x_2 e'_3$, 且满足 $x_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, 则此形式的邻格个数为 $(N\mathfrak{p} - 1)N\mathfrak{p}$. 所以, $N(L, M, \pi) = N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p} - 1)N\mathfrak{p} + (N\mathfrak{p} - 1)N\mathfrak{p} = N\mathfrak{p} \cdot (N\mathfrak{p}^2 - 1)$.

其余情形的证明类似.

其次证明结论 (2). 当 $b = e - 1$ 时, 邻格生成元只能取 $y = \frac{1}{\pi}l_4$ 或 $y = \frac{1}{\pi}l_4 + \frac{2}{\pi^e}l_3$; 否则生成元只取 $y = \frac{1}{\pi}l_4$, 所以结论成立. $\square$

定理 3.1 设 L 是秩 4 的幺模格, 不含偶幺模子格, 即 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a} \rho) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\varepsilon_2^{-1} \pi^{-b} \rho) \rangle$, 或 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$, 或 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^a, \varepsilon_2 \pi^c) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_3 \pi^b, 0) \rangle$ (见命题 3.9), 其中 a 和 b 一个是 L 范生成子的阶, 另一个是权生成子的阶, 则 $\alpha_p(L) = 2N\mathfrak{p}^{3[(a+b)/2]+e}$.

证明 由命题 3.6 和 3.8 可知, 秩 4 幺模格的邻格链中总有含偶幺模子格的幺模格. 下面首先给出任意幺模格到含有偶幺模子格的幺模格的 π -邻格链.

表 2 邻格个数

a 和 b 满足的条件	$N(L, M, \pi)$
$b + 2 < e, b + 2 < c$	$N\mathfrak{p}^3$
$b + 2 \geq e, \text{ord}_\pi a + e = \text{odd}, c > e$	$N\mathfrak{p}^2 \cdot (N\mathfrak{p} - 1)$
$b + 2 \geq e, \text{ord}_\pi a + e = \text{even}, c > e$	$N\mathfrak{p} \cdot (N\mathfrak{p}^2 - 1)$
$b + 2 = c, c \leq e$	$N\mathfrak{p} \cdot (N\mathfrak{p}^2 - 1)$

(1) 若 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a} \rho) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 4\varepsilon_2^{-1} \pi^{-b} \rho) \rangle$, 不妨设 $b+e$ 是偶数. 令 $M \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a} \rho) \rangle \perp \langle A(2, 2\rho) \rangle$. 由命题 3.4 和 3.5 可得 $\alpha_p(M) = 2Np^{3[(a+e)/2]+e}(1+Np^{-1})$.

记 $L_i \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-a} \rho) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^{b+2i}, 4\varepsilon_2^{-1} \pi^{-b-2i} \rho) \rangle$, $i = 1, 2, \dots, k$, 其中 $k = \frac{e-b}{2} - 1$, 则 $L, L_1, \dots, L_k, M$ 是 π -邻格链.

(2) 若 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^b, 0) \rangle$, 令 $M \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(0, 0) \rangle$. 由命题 3.4 和 3.5, 若 $a+e$ 是偶数, 则 $\alpha_p(M) = Np^{3[(a+e)/2]+e}(1-Np^{-2})$; 若 $a+e$ 是奇数, 则 $\alpha_p(M) = 2Np^{3[(a+e)/2]+e}(1-Np^{-1})$.

记 $L_i \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, 0) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_2 \pi^{b+2i}, 0) \rangle$, $i = 1, 2, \dots, k$, 其中当 $e-b$ 是偶数时, $k = \frac{e-b}{2} - 1$; 当 $e-b$ 是奇数时, $k = [\frac{e-b}{2}]$, 则 $L, L_1, \dots, L_k, M$ 是 π -邻格链.

(3) 若 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, \varepsilon_2 \pi^c) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_3 \pi^b, 0) \rangle$, 令 $M \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, \varepsilon_2 \pi^c) \rangle \perp \langle A(0, 0) \rangle$. 由命题 3.4 和 3.5 可知, 若 $c > e$, $a+e$ 是偶数, 则 $\alpha_p(M) = Np^{3[(a+e)/2]+e}(1-Np^{-2})$; 若 $c > e$, $a+e$ 是奇数, 则 $\alpha_p(M) = 2Np^{3[(a+e)/2]+e}(1-Np^{-1})$; 若 $c \leq e$, 则 $\alpha_p(M) = 2Np^{3[(a+c)/2]+e}(1-Np^{-2})$.

记 $L_i \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^a, \varepsilon_2 \pi^c) \rangle \perp \langle A(\varepsilon_3 \pi^{b+2i}, 0) \rangle$, $i = 1, 2, \dots, k$, 其中若 $c \leq e$, 则 $k = \frac{e-b}{2} - 1$; 若 $c > e$, 则 $k = [\frac{e-b-1}{2}]$, 所以 $L, L_1, \dots, L_k, M$ 是 π -邻格链.

由命题 3.7 和 3.9 中的 π -邻格个数公式, 根据定理 2.1, 依次可得到 $L_k, \dots, L_1, L_0 = L$ 的密度为 $\alpha_p(L) = 2Np^{3[(a+b+2i)/2]+e}$, $i = k, \dots, 1, 0$, 则定理结论成立. $\square$

命题 3.10 若秩 3 么模格 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-b} \rho) \rangle \perp \langle -1 \rangle$ 或 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 0) \rangle \perp \langle -1 \rangle$, 其中 $b < e$ 是奇数, 则么模格 $M \cong \langle 1 \rangle \perp L$ 满足: 若 $M \cong \langle 1 \rangle \perp L'$, 则 $L' \cong L$.

证明 由于 $dL' = 1$ 或 $dL' = 1 - 4\rho$, 由文献 [16, 例 93:18] 可得 L' 为 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-b} \rho) \rangle \perp \langle -1 \rangle$, $\langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-b} \rho) \rangle \perp \langle -(1-4\rho) \rangle$, $\langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 0) \rangle \perp \langle -1 \rangle$, $\langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 0) \rangle \perp \langle -(1-4\rho) \rangle$ 之一, 其中 b 是 L' 的权生成子的阶.

由于范群 $\mathfrak{g}M = \mathfrak{g}L = \mathfrak{o}_p^2 + \pi^b \mathfrak{o}_p$, 则 $\mathfrak{g}L' = \mathfrak{g}L$. 由 $F_p L' = F_p L$ 和文献 [16, 定理 93:16] 得 $L' \cong L$. 命题证毕. $\square$

定理 3.2 设 L 是秩 3 的么模格, 不含偶么模子格, 即 $L \cong \langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-b} \rho) \rangle \perp \langle \varepsilon_2 \rangle$ 或 $\langle A(\varepsilon_1 \pi^b, 0) \rangle \perp \langle \varepsilon_2 \rangle$, 其中 $b < e$ 是 L 的权生成子的阶, 则 $\alpha_p(L) = 2Np^{2[b/2]+e}$.

证明 对 L 作 scaling $(-\varepsilon_2)$, 记为 L' . 由文献 [3, 引理 8] 可知, $\alpha_p(L) = \alpha_p(L')$. 令 $M = \langle 1 \rangle \perp L' \cong \langle A(\varepsilon_3 \pi^b, 0) \rangle \perp \langle A(1, 0) \rangle$ 或 $\langle A(\varepsilon_3 \pi^b, 4\varepsilon_3^{-1} \pi^{-b} \rho) \rangle \perp \langle A(1, 0) \rangle$, 由命题 3.10、3.3 和 3.2 得 $\alpha_p(M) = \alpha_p(M, \langle 1 \rangle) \alpha_p(L')$. 而由文献 [15, (36)] 得 $\alpha_p(M, \langle 1 \rangle) = Np^{[b/2]}$, 由定理 3.1 得 $\alpha_p(M) = 2Np^{3[b/2]+e}$, 则 $\alpha_p(L) = \alpha_p(L') = 2Np^{2[b/2]+e}$, 定理成立. $\square$

由文献 [16, 例 93:18] 知, 在命题 3.4 中, 若 G 的秩是 3 或 4, 则 L 是偶可变的; 若 G 的秩为 1, 当 e 为偶数时, L 是偶可变的, 当 e 为奇数时, L 是偶不可变的; 若 G 的秩为 2, 用命题 3.5 的记号, 当 $a+e$ 是偶数或 $\mathfrak{d}(-d) = nG\mathfrak{w}G$ 时, L 是偶可变的, 否则 L 是偶不可变的. 利用命题 3.4、3.5、定理 3.1 和 3.2 可得到 dyadic 域上一般么模格的密度公式.

注 3.2 定理 3.1 给出的不含偶么模子格秩 4 的么模格密度公式正好等于文献 [15, (39)] 给出的密度上界. 命题 3.5 中的秩 2 的非偶么模格的密度也正好等于文献 [15, (32)] 给出的密度上界. 关于不含偶么模子格的秩 3 么模格, 定理 3.2 中的密度小于文献 [15, (34)] 给出的密度上界, 而文献 [14, 引理 4.16] 给出的密度, 当权生成子的阶 $b < (2e+1)/3$ 时, 大于这个上界.

注 3.3 在文献 [3, 定理 4] 中, Körner 得到当 $e = 2$, $N\pi = 2$ 时, 格 $\langle A(\varepsilon_1 \pi, 4\varepsilon_1^{-1} \pi^{-1} \rho) \rangle \perp \langle \varepsilon_2 \rangle$ 和 $\langle A(\varepsilon_1 \pi, 0) \rangle \perp \langle \varepsilon_2 \rangle$ 的密度为 2^3 , 与定理 3.2 一致. 由文献 [15, (34)] 可得密度上界为 2^5 , 而由文献 [14, 引理 4.16] 中的公式得出密度为 2^7 , 矛盾.

当 $e = 2$, $N\pi = 2$ 时, 对于幺模格 $L \cong \langle -(1 + \pi^3\varepsilon) \rangle \perp \langle 1 \rangle \perp \langle A(\varepsilon_1\pi, 4\varepsilon_1^{-1}\pi^{-1}\rho) \rangle$ 和 $L \cong \langle -(1 + 4\rho) \rangle \perp \langle 1 \rangle \perp \langle A(\varepsilon_1\pi, 4\varepsilon_1^{-1}\pi^{-1}\rho) \rangle$, 可取 $N \cong \langle 1 \rangle$, 类似命题 3.10, 易得 N 满足命题 3.3. 由上面 Körner 秩 3 的结果及文献 [15, (36)], 根据命题 3.2 可计算出 L 的密度均为 2^3 , 与定理 3.1 一致. 而由文献 [14, 引理 4.17] 的公式得到的密度分别为 2^2 和 $2^{3/2}$. 显然, 文献 [14, 引理 4.17] 存在错误.

致谢 非常感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Siegel C L. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. *Ann of Math* (2), 1935, 36: 527–606
- 2 Siegel C L. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen III. *Ann of Math* (2), 1937, 38: 212–291
- 3 Körner O. Die Maße der Geschlechter quadratischer Formen vom Range ≤ 3 in quadratischen Zahlkörnern. *Math Ann*, 1971, 193: 279–314
- 4 Pall G. The weight of a genus of positive n -ary quadratic forms. *Proc Sympos Pure Math*, 1965, 8: 95–105
- 5 Watson G L. The 2-adic density of a quadratic form. *Mathematika*, 1976, 23: 94–106
- 6 Pfeuffer H. Darstellungsmaße binärer quadratischer Formen über totalreellen algebraischen Zahlkörpern. *Acta Arith*, 1978, 34: 103–111
- 7 Pfeuffer H. Quadratsummen in totalreellen algebraischen Zahlkörpern. *J Reine Angew Math*, 1971, 249: 208–216
- 8 Körner O. Formen für die p -adischen Maße der quadratischen Einheitsformen in algebraische Zahlkörnern. *Math Ann*, 1973, 200: 267–279
- 9 Shimura G. An exact mass formula for orthogonal groups. *Duke Math J*, 1999, 97: 1–66
- 10 Gan W T, Hanke J P, Yu J K. On an exact mass formula of Shimura. *Duke Math J*, 2001, 107: 103–133
- 11 Hanke J P. An exact mass formula for orthogonal groups over number fields. *J Reine Angew Math*, 2005, 584: 1–27
- 12 Conway J H, Sloane N J A. Low-dimensional lattices IV: The mass formula. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1988, 419: 259–286
- 13 Kitaoka Y. *Arithmetic of Quadratic Forms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- 14 Fiori A. Arithmetic volumes for lattices over p -adic rings. *J Number Theory*, 2014, 141: 343–374
- 15 Pfeuffer H. Einklassige Geschlechter totalpositiver quadratischer Formen in totalreellen algebraischen Zahlkörpern. *J Number Theory*, 1971, 3: 371–411
- 16 O'Meara O T. *Introduction to Quadratic Forms*. Berlin: Springer-Verlag, 1963
- 17 Kneser M. Klassenzahlen definiter quadratischer Formen. *Arch Math*, 1957, 8: 241–250
- 18 王瑞卿. 全实代数数域上正定幺模格的分类. *数学学报*, 2014, 57: 1147–1160
- 19 Leep D B, Wadsworth A R. The Hasse norm theorem mod squares. *J Number Theory*, 1992, 42: 337–348

Local density formulas of unimodular lattices over dyadic fields

WANG RuiQing

Abstract Recently Fiori obtained the local density formulas of unimodular lattices over dyadic local fields, but his results have contradictions with Pfeuffer's and Körner's results for rank 3 case, and in some cases his formulas of rank 4 have fractions in the exponent part which is not compatible with the definition of local density. In this paper, using Siegel's mass formula and neighbor lattice methods we obtain a relation between local density and the number of neighbor lattices of dyadic unimodular lattices. Using the relation we get the local densities of unimodular lattices of ranks 3 and 4 over dyadic local fields. Combining these with the results of Pfeuffer, we can obtain the local density formulas of general unimodular lattices over dyadic local fields.

Keywords dyadic unimodular lattice, local density, Siegel's mass formula, neighbor lattice

MSC(2010) 11E08, 11E12

doi: 10.1360/N012015-00006