无穷维 Hamilton 算子的谱结构

黄俊杰*, 阿拉坦仓, 范小英

内蒙古大学理学院数学系, 呼和浩特 010021

* E-mail: hjjwh@sina.com

收稿日期: 2007-03-26; 接受日期: 2007-08-29

国家自然科学基金(批准号: 10562002) 和内蒙古自治区自然科学基金(批准号: 200508010103, 200711020106)资助项目

摘要 研究无穷维 Hamilton 算子的谱结构. 得到无穷维 Hamilton 算子的谱、点谱和剩余谱之并集和连续谱均关于虚轴对称. 此外, 还证明了无穷维 Hamilton 算子的剩余谱不含有任何关于虚轴对称的点对, 从而利用点谱完全刻画了剩余谱. 作为谱结构的应用, 得到一类无穷维 Hamilton 算子剩余谱为空集的若干充分必要条件.

关键词 非自伴算子 无穷维 Hamilton 算子 谱结构

MSC(2000) 主题分类 47A10, 47B99

1 引言

Hamilton 体系是动力系统的重要内容之一, 其应用范围几乎遍及日常生活的各个方面, 一切真实的、耗散可忽略不计的物理过程都可表示为 Hamilton 系统^[1]. 20 世纪, 量子力学的创始人之一 Schrödinger 曾说: “Hamilton 原理已经成为现代物理的基石, ... 如果您想用现代理论解决任何物理问题, 首先得把它表示为 Hamilton 形式”. Hamilton 系统包括有限维和无穷维两种形式, 它们分别是某种特定形式的常微分方程和偏微分方程. 无穷维 Hamilton 算子来源于无穷维 Hamilton 系统, 具有深刻的力学背景, 其谱理论是解决某些力学问题的分离变量法的理论依据, 在弹性力学等相关领域起重要作用^[2-4].

非自伴算子理论是众所周知的困难课题, 其研究方法技术性很强, 统一处理几乎是不可能的. 人们一般采取各个击破的策略, 对一些具有重要应用的非自伴算子进行个别研究^[5-7]. 无穷维 Hamilton 算子是一类无界非自伴算子矩阵, 鉴于无穷维 Hamilton 系统的应用背景和普适性, 无穷维 Hamilton 算子可望成为联结理论与实践的桥梁. 我们试图通过对无穷维 Hamilton 算子的研究, 寻求解决非自伴问题的新途径.

文献[8-10]研究了无穷维 Hamilton 算子的特征函数系; 文献[11]得到无穷维 Hamilton 算子剩余谱为空集的一个充分必要条件; 文献[12-17]利用不定度规空间方法研究了非负无穷维 Hamilton 算子的有界性, 可逆性和条件可约性; 文献[18, 19]分别得到一类无穷维 Hamilton

算子点谱、剩余谱的刻画和半群生成定理. 但一直未见文献对该算子的谱结构进行描述, 本文解决了这个问题.

对于 Hamilton 矩阵 (有限维 Hamilton 算子), 其谱结构问题已解决, 如实 Hamilton 矩阵的谱正负成对出现, 而复 Hamilton 矩阵的谱可以做到关于虚轴对称. 特征值的这种性质称为 Hamilton 特征值对称, 或称谱的 Hamilton 结构, 在解决某些特征值问题的数值方法中有重要应用 (见文献 [20] 及其所引文献). 另一方面, Hamilton 矩阵的谱型较为简单, 只有特征值, 这样就不涉及剩余谱、连续谱等的结构问题. 本文获得了无穷维 Hamilton 算子的谱、点谱、剩余谱和连续谱等集合的结构特征, 并举例验证了所得结果的正确性.

2 预备知识

本节给出本文用到的几个定义和符号. 本文所涉及的算子均为线性算子, 但未必有界.

定义 2.1 设 X 为 Hilbert 空间, $H : \mathcal{D}(H) \subseteq X \times X \rightarrow X \times X$ 是稠定线性算子, 如果 H 满足 $(JH)^* = JH$, 其中 $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, 则称 H 为无穷维 Hamilton 算子.

显然, 无穷维 Hamilton 算子具有如下形式:

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : \mathcal{D}(H) \subseteq X \times X \rightarrow X \times X,$$

其中 A 为 X 中的稠定闭算子, B 和 C 均为自伴算子.

当 H 为微分算子矩阵时, 称 $\dot{u} = Hu$ 为线性无穷维 Hamilton 正则系统, 这与传统定义 $\dot{u} = J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}$ 是一致的, 其中 $\mathcal{H}$ 为 Hamilton 函数 (或泛函).

定义 2.2^[21] 设 X 为 Banach 空间, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ 是闭线性算子, 称集合

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ 存在且 } \mathcal{R}(\lambda I - A) = X\}$$

为 A 的预解集, $\rho(A)$ 中的 λ 称为 A 的正则值; 称集合 $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ 为 A 的谱. A 的谱 $\sigma(A)$ 可分成以下 3 部分: $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$, 其中称集合

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ 不是 1-1 的}\},$$

$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ 存在且 } \overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} \neq X \right\},$$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ 存在, } \overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = X, \text{ 但 } \mathcal{R}(\lambda I - A) \neq X\}$$

分别为 A 的点谱、剩余谱和连续谱.

本文中 $\mathcal{D}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别表示算子 A 的定义域和值域, $i\mathbb{R}$ 表示虚轴, 即 $\{i\omega \in \mathbb{C} : \omega \in \mathbb{R}\}$, 并记 $\sigma_{pr}(A)$ 为 A 的点谱和剩余谱之并 $\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$; 若 M 为数集, $\overline{M}$ 表示其共轭, 否则表示闭包.

3 主要定理及证明

为刻画无穷维 Hamilton 算子的谱结构, 先给出几个引理.

引理 3.1 设 X 为 Hilbert 空间, A 是 X 中的稠定闭线性算子, 则

- (i) 若 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 则 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$;
- (ii) 若 $\lambda \in \sigma_r(A)$, 则 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$;
- (iii) $\lambda \in \sigma_c(A) \iff \bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$.

证明 (i) 和 (ii) 的证明见文献 [11], 结合算子 A 的闭性易知 $\sigma_{pr}(A) = \overline{\sigma_{pr}(A^*)}$. 由 A 为 Hilbert 空间中的稠定闭算子, 则 $\sigma(A) = \overline{\sigma(A^*)}$, 于是 $\sigma_c(A) = \overline{\sigma_c(A^*)}$, 即 $\lambda \in \sigma_c(A) \iff \bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$.

引理 3.2 设 H 为无穷维 Hamilton 算子, 则 H 是闭线性算子.

证明 H 的线性性由无穷维 Hamilton 算子的定义即知, 下面证明其闭性. 由 H 为无穷维 Hamilton 算子可知 $(JH)^* = JH$, 故 $J^{-1}(JH)^* = H$, 据此只需证明 $J^{-1}(JH)^*$ 是闭算子. 设任意 $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}(J^{-1}(JH)^*)$, $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 且

$$J^{-1}(JH)^*x_n \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty).$$

由 J 是全空间上的有界线性算子可知

$$(JH)^*x_n \rightarrow Jy \quad (n \rightarrow \infty),$$

注意到 $(JH)^*$ 是闭算子可知 $x \in \mathcal{D}((JH)^*)$ 且 $(JH)^*x = Jy$, 于是

$$J^{-1}(JH)^*x = y, \quad x \in \mathcal{D}(J^{-1}(JH)^*),$$

综上, $J^{-1}(JH)^*$ 是闭算子. 证毕.

引理 3.3 设 H 为无穷维 Hamilton 算子, 则 H^* 亦为无穷维 Hamilton 算子, 且有

$$\mathcal{D}(H^*) = J\mathcal{D}(H), \quad \mathcal{D}(H) = J\mathcal{D}(H^*). \quad (3.1)$$

证明 由 H 是无穷维 Hamilton 算子可知 $(JH)^* = JH$, 又 J 是定义于全空间的有界线性算子, H 是稠定线性算子, 便有 $H^*J^* = JH$. 由 $J^* = J^{-1} = -J$ 有

$$H^*J^{-1} = JH, \quad (3.2)$$

因此 $\mathcal{D}(H^*J^{-1}) = \mathcal{D}(H)$, 故

$$\mathcal{D}(H^*) = J\mathcal{D}(H).$$

由 (3.2) 式易知 $HJ^{-1} = JH^*$, 注意到 H 是闭线性算子, 有

$$(JH^*)^* = JH^*,$$

这表明 H^* 是无穷维 Hamilton 算子. 类似可证 $\mathcal{D}(H) = J\mathcal{D}(H^*)$.

结合引理 3.2 和 3.3 有

推论 3.4 H 是无穷维 Hamilton 算子当且仅当 H^* 是无穷维 Hamilton 算子, 且二者定义域的关系为 $\mathcal{D}(H^*) = J\mathcal{D}(H)$, $\mathcal{D}(H) = J\mathcal{D}(H^*)$.

引理 3.5 设 H 为无穷维 Hamilton 算子, 则

$$(i) \quad \lambda \in \sigma_p(H) \iff -\lambda \in \sigma_p(H^*);$$

$$(ii) \quad \lambda \in \sigma_c(H) \iff -\lambda \in \sigma_c(H^*);$$

$$(iii) \quad \lambda \in \sigma_r(H) \iff -\lambda \in \sigma_r(H^*).$$

证明 (i) 和 (ii) 的证明可见文献 [11], 下证 (iii). 设 $\lambda \in \sigma_r(H)$, 显然 $\lambda \notin \sigma_p(H)$, 由 (i) 知 $-\lambda \notin \sigma_p(H^*)$. 另一方面, 当 $\lambda \in \sigma_r(H)$ 时, $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - H)} \neq X \times X$, 从而存在 $y \neq 0$, $y \in X \times X \setminus \overline{\mathcal{R}(\lambda I - H)}$, 对任意 $x \in \mathcal{D}(H)$, 有

$$\langle (\lambda I - H)x, y \rangle = 0,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示相应空间的内积. 注意到

$$\langle (\lambda I - H)x, y \rangle = \langle (\lambda I - JH^*J)x, y \rangle = \langle J(-\lambda I - H^*)Jx, y \rangle,$$

有

$$\langle (-\lambda I - H^*)Jx, J^*y \rangle = 0, \quad x \in \mathcal{D}(H),$$

因此

$$\langle (-\lambda I - H^*)Jx, Jy \rangle = 0, \quad x \in \mathcal{D}(H).$$

由 (3.1) 式得到

$$\langle (-\lambda I - H^*)x^*, y^* \rangle = 0, \quad x^* \in \mathcal{D}(H^*),$$

其中 $x^* = Jx$ 为 $\mathcal{D}(H^*)$ 中任意元素, $y^* = Jy \neq 0$, 这蕴涵 $\overline{\mathcal{R}(-\lambda I - H^*)} \neq X \times X$. 于是 $-\lambda \in \sigma_r(H^*)$. 由引理 3.3 知反之亦然. 证毕.

定理 3.6 无穷维 Hamilton 算子 H 的点谱和剩余谱的并集 $\sigma_{pr}(H)$ 关于虚轴对称.

证明 设 $\lambda \in \sigma_{pr}(H)$, 由引理 3.1, $\bar{\lambda} \in \sigma_{pr}(H^*)$. 又由引理 3.2、3.3 和 3.5 有 $-\bar{\lambda} \in \sigma_{pr}(H)$, 这表明 $\sigma_{pr}(H)$ 关于虚轴对称.

注 3.7 事实上, 因为无穷维 Hamilton 算子可以无界算子, 因此它的谱可以是空集, 此外其各种类型谱, 如点谱、连续谱和剩余谱, 也可能出现为空集的情形. 因此, 本文约定空集关于虚轴对称.

定理 3.8 设 H 为无穷维 Hamilton 算子, 若 $\lambda \in \sigma_r(H)$, 则 $-\bar{\lambda} \notin \sigma_r(H)$.

证明 设 $\lambda \in \sigma_r(H)$. 若 $-\bar{\lambda} \in \sigma_r(H)$, 则由引理 3.5 的 (ii), $\bar{\lambda} \in \sigma_r(H^*)$. 又由引理 3.1 和 3.2 有 $\lambda \in \sigma_p(H)$, 这与 $\lambda \in \sigma_r(H)$ 矛盾. 证毕.

注 3.9 此定理表明无穷维 Hamilton 算子 H 的剩余谱 $\sigma_r(H)$ 或者为空集, 或者不含有关于虚轴对称的分支. 又由定理 3.6 可知 $\sigma_{pr}(H)$ 关于虚轴对称, 因此, 若剩余谱 $\sigma_r(H)$ 非空, 则其关于虚轴对称的部分必为 H 的点谱 $\sigma_p(H)$. 综上, 若 $\sigma_p(H) = \emptyset$, 则 $\sigma_r(H) = \emptyset$; 若 $\sigma_p(H) \neq \emptyset$, 则其不关于虚轴对称的分支关于虚轴对称的部分能且只能由剩余谱来充当, 当然若不含有这样的分支, 则 $\sigma_r(H) = \emptyset$. 于是, 我们有如下推论 (参见文献 [11] 中的定理 2.2.4).

推论 3.10 设 X 是 Hilbert 空间, $H : \mathcal{D}(H) \subseteq X \times X \rightarrow X \times X$ 是无穷维 Hamilton 算子, 则其剩余谱 $\sigma_r(H) = \emptyset$ 的充分必要条件为 $\sigma_p(H) = \emptyset$ 或 $\sigma_p(H)$ 关于虚轴对称.

推论 3.11 无穷维 Hamilton 算子的纯虚剩余谱为空集.

注 3.12 纯虚剩余谱表示剩余谱位于虚轴上的部分. 因此, 由定理 3.8, 无穷维 Hamilton 算子的剩余谱不可能出现在虚轴上. 此推论也可用不定度规方法证明.

由定理 3.6 和 3.8, 对于无穷维 Hamilton 算子, 可以用其点谱完全刻画剩余谱.

定理 3.13 设 H 是无穷维 Hamilton 算子, 则 $\sigma_r(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_p(H), -\bar{\lambda} \in \sigma_p(H)\}$. 关于连续谱, 有如下结果:

定理 3.14 无穷维 Hamilton 算子 H 的连续谱 $\sigma_c(H)$ 关于虚轴对称.

证明 由引理 3.5 的 (iii) 知 $\lambda \in \sigma_c(H) \iff -\lambda \in \sigma_c(H^*)$. 另一方面, 由引理 3.2 及引理 3.1 的 (iii), 有 $-\lambda \in \sigma_c(H^*) \iff -\bar{\lambda} \in \sigma_c(H)$. 于是 $\lambda \in \sigma_c(H) \iff -\bar{\lambda} \in \sigma_c(H)$, 这表明 $\sigma_c(H)$ 关于虚轴对称. 证毕.

由以上结果, 显然有

定理 3.15 设 H 为无穷维 Hamilton 算子, 则 $\sigma(H)$ 和 $\rho(H)$ 均关于虚轴对称.

4 定理的应用

本节考虑无穷维 Hamilton 算子

$$H_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{bmatrix}$$

的剩余谱为空集的充要条件. 由定理 3.13, $\sigma_r(H_0) = \emptyset$ 当且仅当点谱关于虚轴对称, 因此只需考察何时点谱关于虚轴对称. 事实上, 无穷维 Hamilton 算子点谱关于虚轴对称的这种关系, 本质来源于 A 和 $-A^*$ 这种对应关系. 注意到 $\sigma_p(H_0) = \sigma_p(A) \cup \sigma_p(-A^*)$, 首先关心的一个问题是 $\sigma_p(A)$ 与 $\sigma_p(-A^*)$ 何时关于虚轴对称. 先给出一个引理.

引理 4.1 $\sigma_p(A)$ 与 $\sigma_p(-A^*)$ 关于虚轴对称当且仅当 $\sigma_r(A) = \sigma_r(A^*) = \emptyset$.

证明 假设 $\sigma_r(A) = \sigma_r(A^*) = \emptyset$, 则由引理 3.1, 对 $\lambda \in \sigma_p(A)$ 有 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$. 由 $\sigma_r(A^*) = \emptyset$ 知 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, 从而 $-\bar{\lambda} \in \sigma_p(-A^*)$. 类似可知, 当 $\lambda \in \sigma_p(-A^*)$ 时 $-\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)$. 于是, $\sigma_p(A)$ 与 $\sigma_p(-A^*)$ 关于虚轴对称.

反之, 假设 $\sigma_p(A)$ 与 $\sigma_p(-A^*)$ 关于虚轴对称, 显然若二者均为空集则结论成立. 否则, 对任意 $\lambda \in \sigma_p(A)$ 均有 $-\bar{\lambda} \in \sigma_p(-A^*)$, 即 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, 因此 $\bar{\lambda} \notin \sigma_r(A^*)$, 这表明 $\sigma_p(A) \cap \overline{\sigma_r(A^*)} = \emptyset$. 由引理 3.1 易知 $\overline{\sigma_r(A^*)} \subseteq \sigma_p(A)$, 于是 $\sigma_r(A^*) = \emptyset$. 类似地, 不难证明 $\sigma_r(A) = \emptyset$.

由 $\sigma_p(H_0) = \sigma_p(A) \cup \sigma_p(-A^*)$, 有

定理 4.2 若 $\sigma_r(A) = \sigma_r(A^*) = \emptyset$, 则 $\sigma_p(H_0)$ 关于虚轴对称.

若 $\sigma_r(A^*) \neq \emptyset$, 则 $\overline{\sigma_r(A^*)} \subseteq \sigma_p(A)$ 非空. 记 $M_1 = \overline{\sigma_r(A^*)} \setminus \sigma_p(-A^*)$, 即所有属于 $\overline{\sigma_r(A^*)}$ 但不属于 $\sigma_p(-A^*)$ 的元素所成之集, 也就是在 $\overline{\sigma_r(A^*)}$ 中去掉 $\overline{\sigma_r(A^*)} \cap \sigma_p(-A^*)$. 另记 $M_2 = \sigma_p(A) \setminus \overline{\sigma_r(A^*)}$. 显然,

$$\sigma_p(H_0) = \sigma_p(A) \cup \sigma_p(-A^*) = M_1 \cup M_2 \cup \sigma_p(-A^*).$$

当 $\lambda \in M_1$ 时, $-\bar{\lambda} \in \sigma_r(-A^*)$, 因此 $-\bar{\lambda} \notin \sigma_p(-A^*)$, 这表明 $-\overline{M_1} \cap \sigma_p(-A^*) = \emptyset$, 即 M_1 中的点关于虚轴的对称点均不在 $\sigma_p(-A^*)$ 中. 设 $-\bar{\lambda} \in M_2 (\subseteq \sigma_p(A))$, 则 $\lambda \in \sigma_p(-A^*) \cup \sigma_r(-A^*)$. 若 $\lambda \in \sigma_r(-A^*)$, 则 $-\bar{\lambda} \in \overline{\sigma_r(A^*)}$, 这与 $-\bar{\lambda} \in M_2$ 矛盾; 因此 $\lambda \in \sigma_p(-A^*)$, 这又与 $\lambda \in M_1$ 矛盾. 于是 $-\bar{\lambda} \notin M_2$, 这表明 M_1 中的点关于虚轴的对称点也不在 M_2 中.

任意 $\lambda \in M_2$, 都有 $-\bar{\lambda} \in \sigma_p(-A^*)$. 又若 $\sigma_r(A) = \emptyset$, 则当 $\lambda \in \sigma_p(-A^*)$ 时, $-\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)$, 由于 $-\overline{M_1} \cap \sigma_p(-A^*) = \emptyset$, 则 $-\bar{\lambda} \in M_2$. 于是, M_2 和 $\sigma_p(-A^*)$ 关于虚轴对称. 易知

定理 4.3 若 $\sigma_r(A) = \emptyset$, $\sigma_r(A^*) \neq \emptyset$, 则 $\sigma_p(H_0)$ 关于虚轴对称的充分必要条件为 M_1 关于虚轴对称.

类似地, 当 $\sigma_r(A) \neq \emptyset$ 时, 记 $M_3 = \overline{\sigma_r(-A)} \setminus \sigma_p(A)$, $M_4 = \sigma_p(-A^*) \setminus \overline{\sigma_r(-A)}$, 则有

$$\sigma_p(H_0) = \sigma_p(A) \cup \sigma_p(-A^*) = \sigma_p(A) \cup M_3 \cup M_4.$$

定理 4.4 若 $\sigma_r(A^*) = \emptyset$, $\sigma_r(A) \neq \emptyset$, 则 $\sigma_p(H_0)$ 关于虚轴对称的充分必要条件为 M_3 关于虚轴对称.

若 $\sigma_r(A^*) \neq \emptyset$, $\sigma_r(A) \neq \emptyset$, 沿用 M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的定义, 并令 $M_5 = \overline{\sigma_r(-A)} \cap \overline{\sigma_r(A^*)}$, 则

$$\sigma_p(H_0) = \sigma_p(A) \cup \sigma_p(-A^*) = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5.$$

定理 4.5 若 $\sigma_r(A^*) \neq \emptyset$, $\sigma_r(A) \neq \emptyset$, 则 $\sigma_p(H_0)$ 关于虚轴对称当且仅当 M_1 和 M_3 均关于虚轴对称, 且 $M_5 = \emptyset$

证明 由前面讨论易知, 当 $\lambda \in M_1$ 时, $-\bar{\lambda} \notin \sigma_p(-A^*) \cup M_2$, 而 $(M_3 \cup M_4 \cup M_5) \subseteq \sigma_p(-A^*)$, 因此 $-\bar{\lambda} \notin M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5$, 即 $-\overline{M_1} \cap (M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5) = \emptyset$. 同理, $-\overline{M_3} \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_4 \cup M_5) = \emptyset$.

当 $\lambda \in M_2 (\subseteq \sigma_p(A))$ 时, $-\bar{\lambda} \in \sigma_p(-A^*)$, 由此断言 $-\bar{\lambda} \in M_4$. 若不然, 则 $-\bar{\lambda} \in \overline{\sigma_r(-A)}$. 因此 $\lambda \in \sigma_r(A)$, 这与 $\lambda \in M_2 (\subseteq \sigma_p(A))$ 矛盾. 类似可证明当 $\lambda \in M_4$ 时, $-\bar{\lambda} \in M_2$. 于是, $M_2 = -\overline{M_4}$, 即 M_2 与 M_4 关于虚轴对称.

由 $M_5 \cap (M_2 \cup M_4) = \emptyset$ 且 M_2 与 M_4 关于虚轴对称, 便有 $-\overline{M_5} \cap (M_2 \cup M_4) = \emptyset$. 又据第 1 段的证明知 $-\overline{M_5} \cap (M_1 \cup M_3) = \emptyset$, 于是 $-\overline{M_5} \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4) = \emptyset$. 另一方面, 若 $\lambda \in M_5$, 则 $-\bar{\lambda} \in \sigma_r(-A^*)$, 显然 $-\bar{\lambda} \notin \sigma_p(-A^*)$, 从而 $-\bar{\lambda} \notin \overline{\sigma_r(-A)} \cap \overline{\sigma_r(A^*)} (= M_5)$, 即 M_5 不含任何自身关于虚轴对称的分支.

不难看出, $\sigma_p(H_0)$ 关于虚轴对称当且仅当 M_1 和 M_3 均关于虚轴对称, 且 $M_5 = \emptyset$. 证毕.

注意到 $\sigma_r(A^*) = \emptyset$ 和 $\sigma_r(A) = \emptyset$ 分别蕴含 $M_1 = \emptyset$ 和 $M_3 = \emptyset$, 则定理 4.2–4.5 可归纳为

定理 4.6 $\sigma_p(H_0)$ 关于虚轴对称当且仅当 M_1 和 M_3 均关于虚轴对称, 且 $M_5 = \emptyset$.

5 例子

本节给出几个具体例子, 用以说明前述结果的合理性.

例 5.1 设 $X = L^2(0, +\infty)$, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ 是稠定闭线性算子, 对 $x \in \mathcal{D}(A)$, $Ax = x'$, 其中

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X : x \text{ 绝对连续}, x(0) = 0, x' \in X\}.$$

令

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{bmatrix},$$

则 H 是无穷维 Hamilton 算子, 且 $\sigma_p(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, $\sigma_r(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$, $\sigma_c(H) = i\mathbb{R}$.

事实上, 直接计算得 $\sigma_p(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, $\sigma_r(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$, 且 $\sigma_c(H) = i\mathbb{R}$. 另一方面, 应用本文结果, 只需计算 H 的点谱即可获得剩余谱的相关信息. 前已算得 $\sigma_p(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, 即 H 的点谱是不含有虚轴的左半平面. 而由推论 3.11 知 H 的剩余谱必不在虚轴上, 故由定理 3.13, $\sigma_r(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 注意到 $\sigma_{pr}(H) = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, 则 $\sigma_c(H) \subseteq i\mathbb{R}$. 而 $\sigma_c(A) = \sigma_c(-A^*) = i\mathbb{R}$, 易知 $\sigma_c(H) = i\mathbb{R}$, 这与直接计算所得的结果一致, 而且较为简便.

注 5.2 例 5.1 所得结论为: H 的点谱是不含有虚轴的左半平面; 剩余谱是不含有虚轴的右半平面; 连续谱是整个虚轴. 显然, 点谱不关于虚轴对称, 剩余谱恰为点谱关于虚轴对称的集合, 点谱与剩余谱之并集关于虚轴对称; 连续谱, 谱和预解集均关于虚轴对称.

例 5.3 设 $X = L^2(0, +\infty)$, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ 的定义同例 5.1, 另设对任意 $y \in \mathcal{D}(B)$, $By = y''$, 其中

$$\mathcal{D}(B) = \{y \in X : y' \text{ 绝对连续}, y(0) = 0, y', y'' \in X\},$$

则无穷维 Hamilton 算子

$$H = \begin{bmatrix} -A^* & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

的谱、点谱、剩余谱、连续谱及预解集的结构均符合本文的结果.

经简单计算得 $\sigma_p(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, 同例 5.1 的讨论知 $\sigma_r(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 下证 $\sigma_c(H) = i\mathbb{R}$. 为此, 只需证明 $0 \in \sigma_c(H)$.

注意到 $\sigma_c(A) = \sigma_c(-A^*) = i\mathbb{R}$, 由 $0 \in \sigma_c(A) = \sigma_c(-A^*)$ 知 $0 \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_p(-A^*)$, 易知 $0 \notin \sigma_p(H)$. 又 $0 \in \sigma_c(-A^*)$ 蕴含 $\overline{\mathcal{R}(A^*)} = X$, 因此 $\overline{\mathcal{R}(A^*) + \mathcal{R}(B)} = X$. 由

$$A|_{\mathcal{D}(B)} : \mathcal{D}(B) \rightarrow X$$

为 $L^2(0, +\infty)$ 中的限制在二阶导定义域上的一阶导算子, 易知 $\overline{\mathcal{R}(A|_{\mathcal{D}(B)})} = X$. 对任意 $y \in X$, 存在 $\{y_n\} \subseteq \mathcal{D}(B)$, 使得 $(A|_{\mathcal{D}(B)})y_n \rightarrow y$, 即 $Ay_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$. 考虑任意 $x \in X$ 及上述的 y_n , 对 $x - By_n$, 存在 $\{x_n^m\} \subseteq \mathcal{D}(A^*)$, 使得 $-A^*x_n^m \rightarrow x - By_n (m \rightarrow \infty)$, 不难证明存在 $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}(A^*)$, 使得 $-A^*x_n + By_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 故

$$H \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

即 $\overline{\mathcal{R}(H)} = X \times X$.

由 $0 \in \sigma_c(A)$ 知 $\mathcal{R}(A) \neq X$, 显然 $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{D}(B)}) \neq X$, 这蕴涵 $\mathcal{R}(H) \neq X \times X$. 于是 $0 \in \sigma_c(H)$. 同注 5.2 的讨论知, H 的谱、点谱与剩余谱之并集、连续谱及预解集均关于虚轴对称.

例 5.4 考虑椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases} 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, y) = f(y), u(1, y) = g(y), & 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

利用矩阵多元多项式带余除法, 可得其 Hamilton 正则方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{8} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

取 $X = L^2(0, 1)$, 则由边值问题 (5.1) 导出的 $X \times X$ 中的无穷维 Hamilton 算子为

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{8} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix},$$

且定义域

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X \times X : u' \text{ 绝对连续}, u(0) = u(1) = 0, u', u'' \in X \right\}.$$

直接计算可得

$$\sigma(H) = \sigma_p(H) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \frac{4k\pi}{\sqrt{15}}, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \right\},$$

显然 H 的连续谱为空集, 按注 3.7 的约定, 它关于虚轴对称; H 的点谱关于虚轴对称, 剩余谱为空集, 点谱与剩余谱的并集关于虚轴对称; 谱和预解集关于虚轴对称.

致谢 作者衷心感谢匿名审稿专家提出的宝贵的修改意见.

参考文献

- 1 冯康, 秦孟兆. 哈密顿系统的辛几何算法. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003
- 2 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- 3 马坚伟, 徐新生, 杨慧珠, 等. 基于哈密顿体系求解空间黏性流体问题. 工程力学, **19**(3): 1–9 (2002)
- 4 Sui Y F, Zhong W X. Eigenvalue problem of a large scale indefinite gyroscopic dynamic system. *Appl Math Mech*, **27**(1): 15–22 (2006)
- 5 Glazman I M. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965
- 6 姚爱翔, 阳明珠. 一般非均匀凸介质的迁移算子本征值的代数指标. 中国科学, A 辑, **35**(2): 154–160 (1992)
- 7 孙万贵. 一类线性非自伴算子的谱. 数学学报, **38**(1): 67–70 (1995)
- 8 张鸿庆, 阿拉坦仓. 辛正交系的完备性问题. 大连理工大学学报, **35**(6): 754–758 (1995)
- 9 张鸿庆, 阿拉坦仓. 无穷维 Hamilton 算子的特征函数系. 北京理工大学学报, **16**(增刊): 41–45 (1996)
- 10 Zhang H Q, Alatancang, Zhong W X. The Hamiltonian system and completeness of symplectic orthogonal system. *Appl Math Mech*, **18**(3): 237–242 (1997)
- 11 范小英. 无穷维 Hamilton 算子的谱. 硕士学位论文. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2001, 9–13
- 12 Azizov T Ya, Kiriakidi V K, Kurina G A. An indefinite approach to the reduction of a nonnegative Hamiltonian operator function to a block diagonal form. *Funct Anal Appl*, **35**(3): 220–221 (2001)
- 13 Azizov T Ya, Dijksma A, Gridneva I V. On the boundedness of Hamiltonian operators. *Proc Amer Math Soc*, **131**(2): 563–576 (2002)
- 14 Kurina G A, Martynenko G V. On the reducibility of a nonnegatively Hamiltonian periodic operator function in a real Hilbert space to a block diagonal form. *Differ Equ*, **37**(2): 227–233 (2001)
- 15 Kurina G A. Invertibility of an operator appearing in the control theory for linear systems. *Math Notes*, **70**(2): 206–212 (2001)
- 16 Kurina G A. Invertibility of nonnegatively Hamiltonian operators in a Hilbert space. *Differ Equ*, **37**(6): 880–882 (2001)
- 17 Kurina G A, Martynenko G V. Reducibility of a class of operator functions to block-diagonal form. *Math Notes*, **74**(5): 744–748 (2003)
- 18 阿拉坦仓, 黄俊杰, 范小英. $L^2 \times L^2$ 中一类无穷维 Hamilton 算子的剩余谱. 数学物理学报, **25**(7): 1040–1045 (2005)
- 19 阿拉坦仓, 黄俊杰. 一类无穷维 Hamilton 算子的半群生成定理. 高校应用数学学报, A 辑, **21**(3): 357–364 (2006)
- 20 Mehrmann V, Watkins D. Polynomial eigenvalue problems with Hamiltonian structure. *Electron Trans Numer Anal*, **13**: 106–118 (2002)
- 21 孙炯, 王忠. 线性算子的谱分析. 北京: 科学出版社, 2005