实现 γ 射线激光之路

张启仁¹, 高春媛^{1,2*}

1. 北京大学物理学院, 北京 100871;

2. 核物理与核技术国家重点实验室, 北京 100871

* 联系人, E-mail: gaocy@pku.edu.cn

2016-11-07收稿, 2017-01-23修回, 2017-01-24接受, 2017-06-28网络版发表

国土资源部公益性行业科研专项(sino-probe0903)资助

摘要 分析了形成激光的诸要素, 统一地理解了普通(以原子、分子或凝聚态物质为介质的)激光和自由电子激光的运作机制. 由此认识了实现 γ 射线激光的困难和解决办法, 即让带电粒子在普通激光中摆动, 再配以适当的“共振”和“抽运”机制. 为了进行精确可靠的分析我们建立了激光中的量子电动力学. 她与真空中的量子电动力学等价, 因此是当今最可靠的物理理论. 由此明确得出的结论是, 一束适当能量的单能直线前进的电子与一束单色平面波普通激光迎面相撞将产生 γ 射线激光, 称为量子自由电子激光. 当然, 这是理想条件下的理论结论. 然而协同学(synergetics)告诉我们, 在实际条件逼近理想条件的过程中会有一临界点, 越过这一点, 诱致辐射的正反馈会导致一雪崩式的过程, 电子束与普通激光碰撞产生的 γ 射线束遂相变为 γ 射线激光.

关键词 激光中的量子电动力学, 量子自由电子激光, γ 射线激光

将激光的波长扩展到 γ 射线波段是激光物理和核物理几十年的共同梦想. 这方面的进展意味着技术的重大突破, 更精确的时空定位, 更高密度的能量输送, 纳米乃至更小尺寸物体的全息照相等.

我们曾对研制 γ 射线激光的各种可能方案做过评论^[1]. 最初的激光是从物质的一种特别的衰变模式得到的. 如图1, 要求系统能容易地从下能级激发“抽运”到某个寿命很短的上能级的过渡态. 然后很快衰变到某亚稳态. 此态寿命足够长, 以致系统大量在此态聚积, 造成集居数分布的反转(处于亚稳态能级的系统多于留在下能级的系统, 负绝对温度). 此时若有符合亚稳态与下能级间跃迁共振条件的光子在系统附近出现(稀有的自发辐射可提供这种光子)就会引起诱致辐射, 辐射出来的光子与诱发此辐射的光子处于同一态, 导致诱致辐射的正反馈. 为此要有一个能充分留住诱致辐射光子的谐振腔. 这是

普通激光器的关键部件. 对于可见光频谱附近的辐射这可轻易做到. 但对 γ 射线却做不到. 早期核物理学家们为实现 γ 射线激光, 在核能谱中找到过不少如图1的能级图, 却因做不出 γ 波段的谐振腔而与 γ 激光无缘.

图1 (网络版彩色)实现普通激光的介质能级图

Figure 1 (Color online) Energy levels for normal laser media

引用格式: 张启仁, 高春媛. 实现 γ 射线激光之路. 科学通报, 2017, 62: 3420–3428

Zhang Q R, Gao C Y. The way to realize γ -ray lasers (in Chinese). Chin Sci Bull, 2017, 62: 3420–3428, doi: 10.1360/N972016-01247

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/N972016-01247>

后来人们又发现横向摆动着的电子发出的电磁辐射几乎集中在电子前进的方向上,且几乎是单色极化的.更重要的是,摆动前进的电子会与它们发出的电磁波共振,就像一队齐步走过桥的士兵一致上下踏步与由此在桥面产生的弹性波共振一样.结果是熟知的:这队士兵踏步的能量大部转移给了桥面的弹性波,并使桥垮塌.类似地,在共振条件满足的条件下,摆动电子的能量会大部交给与它们共振的电磁波.这是一束极强的相干电磁波,一束激光.由于发光介质是自由电子,称为自由电子激光(FEL).这里共振就是在电子摇摆器中发生的.但由于用周期排列的磁场摇摆电子,摇摆周期是宏观的.这使发出的激光波长到不了 γ 射线波段.

要使自由电子激光到达 γ 射线波段,必须改变摇摆电子的手段.20世纪末有人注意到横声波会在晶体中形成带电的周期弯曲沟道,在其中运动的带电粒子会以声波波长为周期横向摆动^[2~4].由于固体中横声波波长远短于一般自由电子激光中磁场排列的周期,由这种弯曲沟道摇摆的带电粒子发出的电磁波可达 γ 射线波段. γ 射线激光似乎有望了.可惜随后了解到,在晶体内部实现时空周期变化的沟道在技术上有很大的困难.加之实际晶体内部很复杂,有各种杂质和缺陷.而理论的出发点是理想晶体,要想将它的结论在实际晶体中实现很困难,甚至不可能.于是我们放弃了这条路.

激光与物质相互作用方面的工作经验^[5,6]提醒我们,激光本身就是一个带电粒子摇摆器,结构简单而干净.他的周期变化的电磁场令电子在其中摆动前进,应能产生新的激光.整个问题可用量子电动力学彻底处理,产生的新激光便称为量子自由电子激光(QFEL).普通光波段激光波长比经典自由电子激光器中磁场的空间变化周期短得多,在其中产生的量子自由电子激光可轻易到达 γ 射线波段.这或许是实现 γ 射线激光的可行途径.

量子电动力学(QED)是研究电磁作用的基本理论,迄今限于研究少数光子与电子相互作用的过程,称为真空中的量子电动力学.其中真空态定义为没有任何粒子的状态,相互作用为电子与光子的元作用.由于电磁耦合常数 $\alpha = 1/137.0$ 很小,它的贡献可用微扰法逐级计算.理论的可重整性使得这些计算结果可做得十分精确,使它成为物理学中最成功的

理论.迄今为止由它算得的所有结果在精度达到的范围内都与实验相符.然而当电子与激光中大量光子相互作用时,跃迁矩阵元会变大,简单的微扰法可能不再适用.必须区分微扰部分和非微扰部分,将非微扰部分分离出来,用非微扰方法处理.最好能对它严格求解.在核理论的研究中,我们发展了在给定的经典场附近将介子场量子化的方法^[7].类似地,也可在经典激光场附近将电磁场量子化,发展激光中的量子电动力学.其中的真空态定义为除一束激光外没有任何粒子的状态^[8].由于只差一个么正变换,这样得到的激光中的量子电动力学与原来真空中的量子电动力学等价,因而同样可靠.作为摇摆器的激光对电子的作用可作非微扰处理,或严格处理,剩下电子和单个游离光子的作用仍作微扰.激光摇摆电子产生 γ 激光的可能性得到证明^[9].下面介绍它的一些结果.

1 激光中的量子电动力学

在库仑规范中一束圆偏振单色平面波激光可用矢势

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = A\{x_0 \cos[k(z-t)] + y_0 \sin[k(z-t)]\} \mathbf{J}, \quad (1)$$

表示.此处用了自然单位制 $c = \hbar = 1$.它的电矢量和磁矢量互相垂直,在 x - y 平面内旋转,并沿 z 方向传播.用它作摇摆器,将一束单能电子沿 $-z$ 方向射入其中.电子受到摇摆而发出电磁辐射.由于摇摆是横向的,辐射集中在 $-z$ 方向.

电子在此摇摆器激光中的运动由它的波函数 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 描述,并满足狄拉克方程

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i \nabla) + e A \alpha_x \cos[k(z-t)] + e A \alpha_y \sin[k(z-t)] + \beta m \right\} \Psi. \quad (2)$$

此方程有解析解^[5,10].作变换

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \exp(-ikt j_z) \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

其中绕 z 轴的转动算符 $\exp(-ikt j_z)$ 是一个么正算符,把量子论对客观世界的描述从原来的图像变到一个等价的图像,称为转动图像. $j_z \equiv -i\partial/\partial\varphi + \Sigma_z/2$ 为单电子角动量算符的 z 分量.变换(3)的逆变换为

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \exp(ikt j_z) \Phi(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

将它代入(2)得转动图像中电子的狄拉克方程

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \{\alpha \cdot (-i\nabla) + eA[\alpha_x \cos(kz) + \alpha_y \sin(kz)] + \beta m + k j_z\} \Phi. \quad (5)$$

由于右端不显含 t , 它有定态解

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x})e^{-i\epsilon t}, \quad (6)$$

且满足本征方程

$$\{\alpha \cdot (-i\nabla) + eA[\alpha_x \cos(kz) + \alpha_y \sin(kz)] + \beta m + k j_z\} \phi(\mathbf{x}) = \epsilon \phi(\mathbf{x}). \quad (7)$$

方程左边的算符是厄密的, 因而有一个完备正交归一的本征函数系 $[\phi_n(\mathbf{x})]$ 和相应的本征值 $[\epsilon_n]$, 其中 n 为一组能完全确定电子状态的量子数.

已严格解得^[8,9]

$$\epsilon_n \equiv \epsilon_{n,\sigma,\tau}(p_z, p_\perp) = E + \frac{e^2 A^2}{2(E - p_z)} + \left(\frac{\sigma}{2} - n\right)k, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \phi_n(\mathbf{x}) &\equiv \phi_{n,\sigma,\tau}(p_z, p_\perp; \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ i \left[p_z + \frac{e^2 A^2}{2(E - p_z)} \right] z \right\} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{eA}{2(p_z - E)} [\alpha_x \cos kz + \alpha_y \sin kz \right. \\ &\quad \left. + i(\Sigma_y \cos kz - \Sigma_x \sin kz)] \right\} \\ &\times [i^n J_n(p_\perp \rho') e^{-in\varphi'} P_+ \\ &\quad + i^{n-\sigma} J_{n-\sigma}(p_\perp \rho') e^{-i(n-\sigma)\varphi'} P_-] u_\sigma(0), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{p}$, $E = \tau \sqrt{p^2 + m^2}$, $\tau = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$ 和整数 n 皆为表征此解的量子数. $J_\nu(\xi)$ 为 ξ 的 ν 阶贝塞耳函数. $(\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z)$ 为四行四列的泡利矩阵.

$$u_\sigma(0) = u_+ + u_- \quad (10)$$

为狄拉克双旋量. 其中

$$u_+ = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{bmatrix} 1 \\ p_z \sigma \end{bmatrix} \chi_\sigma, \quad u_- = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{bmatrix} 0 \\ p_\perp \end{bmatrix} \chi_\sigma, \quad (11)$$

χ_σ 为 Σ_z 的本征旋量, 本征值为 $\sigma = \pm 1$. $P_\pm \equiv (1 \pm \sigma \Sigma_z)/2$ 为自旋态投影算符: $P_\pm u_\sigma(0) = u_\pm$. $p_z, p_\perp, \varphi_p$ 为

电子动量 $\mathbf{p}$ 的柱坐标: $p_x = p_\perp \cos \varphi_p$, $p_y = p_\perp \sin \varphi_p$. ρ' 和 φ' 的定义为

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos \varphi' = x' = x - \frac{eA}{k(p_z - E)} \sin kz, \\ \rho' \sin \varphi' = y' = y + \frac{eA}{k(p_z - E)} \cos kz. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

本征函数式(9)右边第一个因子 $1/(2\pi)$ 是归一化因子, 它保证本征函数系式(9)的正交归一性:

$$\begin{aligned} &\int \phi_{n,\sigma,\tau}^\dagger(p_z, p_\perp; \mathbf{x}) \phi_{n',\sigma',\tau'}(p'_z, p'_\perp; \mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{p_\perp} \delta(p_\perp - p'_\perp) \delta(p_z - p'_z) \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{\tau,\tau'}. \end{aligned} \quad (13)$$

这就使激光(1)中的电子场可以像真空中的电子场一样量子化^[8]. 由于本文不涉及反粒子, 恒有 $\tau = 1$, 在解式(9)中只取 $\phi_n(\mathbf{x}) \equiv \phi_{n,\sigma}(p_z, p_\perp; \mathbf{x}) \equiv \phi_{n,\sigma,1}(p_z, p_\perp; \mathbf{x})$. 在真空中, $A = 0$. 也可令 $k = 0$,

$$\begin{aligned} \phi_{n,\sigma}(p_z, p_\perp; \mathbf{x}, t) &\rightarrow \phi_{n,\sigma}^{(0)}(p_z, p_\perp; \mathbf{x}, t) \equiv \frac{e^{ip_z z - Et}}{2\pi} \\ &\times [i^n J_n(p_\perp \rho) e^{-in\varphi} P_+ + i^{n-\sigma} J_{n-\sigma}(p_\perp \rho) e^{-i(n-\sigma)\varphi} P_-] u_\sigma(0), \end{aligned} \quad (14)$$

ρ, φ 和 z 为电子位置的柱坐标. 这正是自由电子狄拉克方程的柱面波解. 由此可线性组合成它的归一化平面波解

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi_p}}{\sqrt{2\pi}} \phi_{n,\sigma}^{(0)}(p_z, p_\perp; \mathbf{x}, t). \quad (15)$$

其中

$$u = u_+ + u_- e^{i\sigma\varphi_p} \equiv u_\sigma(\varphi_p) \quad (16)$$

为平面波的双旋量. 按Gell-Mann Low定理^[11], 在远处真空中来的平面波自由电子逐渐进入激光场(1)时, 它的状态会由平面波式(15)绝热地趋于

$$\phi_{\mathbf{p},\sigma}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi_p}}{\sqrt{2\pi}} \phi_{n,\sigma}(p_z, p_\perp; \mathbf{x}, t). \quad (17)$$

而激光中状态为 $\phi_{\mathbf{p}',\sigma'}(\mathbf{x}, t)$ 的电子在逐渐离开激光到达远处的真空时也会绝热地趋于平面波 $e^{i(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x} - Et)} u_{\sigma'}(\varphi_{p'})/\sqrt{(2\pi)^3}$.

形象上看, 激光场(1)将电子的平面波式(15)扭曲为式(17). 平面波的经典对应是等速直线运动, 对它的扭曲对应此种惯性运动的偏离. 式(9)表明此种偏离是横向周期的, 对应经典的横向摆动. 由式(4)回到薛定谔图像, 还要加上一绕前进方向的转

动,也可分解为横向摆动.因此激光对电子运动的影响确是一量子摇摆器.

实际的电磁场除激光场外还有相对激光场的涨落,由它的矢势与激光的矢势(1)之差 $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t)$ 表示.量子论中激光是一种相干态,每一个相干态的数学描述对应一个经典波^[12],在这种意义上经典波描述了相干态.由于经典波描述的相干态本已是量子态,因此只要将激光光场以外的电磁场 $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t)$ 量子化,整个电磁场就都量子化了.由于激光场式(1)是 c 数场,量子化后矢势涨落 $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t)$ 的对易关系与真空中电磁场矢势的对易关系是一样的.即按相同方式量子化^[8],它也像真空中的电磁场矢势,可分解为平面波

$$\mathbf{A}'_l(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{e}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'}} \mathbf{e}^i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - k't) \quad (18)$$

的叠加.平面波由模式 $l' \equiv (\mathbf{e}', \mathbf{k}')$ 标志,其中 $\mathbf{e}'$ 为偏振单位矢量, $\mathbf{k}'$ 为波矢量.在库仑规范中,二者互相垂直: $\mathbf{e}' \cdot \mathbf{k}' = 0$.式中还显示出电磁场自由涨落随时间的变化.电子与 l' 模式电磁场涨落的作用为

$$H'_{l'} = e\alpha \cdot \mathbf{A}'_{l'}(\mathbf{x}, t) = \frac{e\alpha \cdot \mathbf{e}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'}} \mathbf{e}^i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - k't). \quad (19)$$

α 和 $\mathbf{x}$ 都是电子的动力学变量,在转动图像中分别变为

$$\alpha_r \equiv \exp(-ikt_j z) \alpha \exp(ikt_j z), \quad (20)$$

$$\mathbf{x}_r \equiv \exp(-ikt_j z) \mathbf{x} \exp(ikt_j z). \quad (21)$$

它们都绕 z 轴转动.由于(19)式右边 α 与 $\mathbf{e}'$, $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{k}'$ 分别取标量积,在转动图像中也可不用 α_r 和 $\mathbf{x}_r$ 分别代替 α 和 $\mathbf{x}$,而用 $\mathbf{e}'_r$ 和 $\mathbf{k}'_r$ 分别代替 $\mathbf{e}'$ 和 $\mathbf{k}'$.其中

$$\mathbf{e}'_r \equiv \exp(ikt_j z) \mathbf{e}' \exp(-ikt_j z), \quad (22)$$

$$\mathbf{k}'_r \equiv \exp(ikt_j z) \mathbf{k}' \exp(-ikt_j z). \quad (23)$$

它们绕 z 轴向相反方向转动.据此,由(19)式变换得在转动图像中电子与 l' 模式电磁场涨落的相互作用哈密顿量

$$H'_{l'r} = e\alpha \cdot \mathbf{A}'_{l'r}(\mathbf{x}, t) = \frac{e\alpha \cdot \mathbf{e}'_r}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'}} \mathbf{e}^i(\mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{x} - k't). \quad (24)$$

电子在激光中的始态 $\phi_{\mathbf{p}, \sigma}(\mathbf{x}, t)$ 与 l' 模式的电磁场作用跃迁到末态 $\phi_{\mathbf{p}', \sigma'}(\mathbf{x}, t)$,并在已有 N 个 l' 光子的

条件下再发出一个 l' 模式的光子的作用矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle \sigma', \mathbf{p}'; \mathbf{e}'_i, \mathbf{k}', N+1 | H'_{l'r} | N, \mathbf{k}', \mathbf{e}'_i; \mathbf{p}, \sigma \rangle &= \sqrt{N+1} \\ &\times \int \phi_{\mathbf{p}', \sigma'}^\dagger(\mathbf{x}, t) H'_{l'r} \phi_{\mathbf{p}, \sigma}(\mathbf{x}, t) d^3x = \frac{e}{2\pi \sqrt{2k'}} \\ &\times \sqrt{\frac{N+1}{4EE'(E+m)(E'+m)}} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0, \pm 1} J_{N-\nu}(p'_\perp R') \\ &\times [\delta_{\sigma, \sigma'} F_i^{(\nu)} e^{-iN\varphi_{k'}} + \delta_{\sigma, -\sigma'} G_i^{(\nu)} e^{i(\sigma-N)\varphi_{k'}}] \\ &\times \delta \left[\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - N\mathbf{k} + \frac{eA}{2} (R' - R) \mathbf{k} \right] \\ &\times e^{i[E' - E + \frac{eA}{2} (R' - R)k + k' - Nk]t}, \end{aligned} \quad (25)$$

积分是解析地做出的^[8].整数 N 为相互作用共振的序号, $R \equiv \frac{eA}{k(E-p_z)}$, $R' \equiv \frac{eA}{k(E'-p'_z)}$.由于电子沿 $-z$ 方向入射, $\mathbf{p} = p_z \mathbf{z}_0$,

$$\begin{aligned} &\delta \left[\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - N\mathbf{k} + \frac{eA}{2} (R' - R) \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{\delta(p'_\perp - k'_\perp)}{p'_\perp} \delta(\varphi_{k'} + \pi - \varphi_{p'}) \\ &\times \delta \left[p'_z - p_z + \frac{eA}{2} (R' - R)k + k'_z - Nk \right] \end{aligned} \quad (26)$$

为系统动量的三维 δ 函数, F 和 G 的下角 $i = 1, 2$ 为 l' 模式电磁波偏振态 $\mathbf{e}'_i$ 的标志.定义为 $\mathbf{e}'_1 = \cos \theta (\cos \varphi_{k'} \mathbf{x}_0 + \sin \varphi_{k'} \mathbf{y}_0) - \sin \theta \mathbf{z}_0$, $\mathbf{e}'_2 = -\sin \varphi_{k'} \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_{k'} \mathbf{y}_0$,其中 θ 为 $\mathbf{k}'$ 与 z 轴的夹角, $\varphi_{k'}$ 则为 $\mathbf{k}'$ 在 x - y 平面上的投影与 x 轴的夹角.由此得

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(0)} &\equiv -\cos \theta p'_\perp (E+m) - \sin \theta [(E'+m)p_z \\ &\quad + (E+m)p'_z + \frac{k^2 R R'}{2} (p_z - E - m)(p'_z - E' - m)], \\ F_1^{(\sigma)} &\equiv \frac{k}{2} \{ \cos \theta R (p_z - E - m)(p'_z - E' - m) \\ &\quad + \sin \theta p'_\perp [(R+R')(E+m) - (R-R')p_z], \\ F_1^{(-\sigma)} &\equiv \frac{k}{2} \cos \theta R' (p_z - E - m)(p'_z - E' - m), \\ G_1^{(0)} &\equiv \sigma \left\{ \cos \theta [p_z (E' + m) - p'_z (E + m)] \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta p'_\perp \left[\frac{k^2 R R'}{2} (p_z - E - m) + E + m \right] \right\}, \\ G_1^{(\sigma)} &\equiv -\frac{\sigma k}{2} \{ \cos \theta R p'_\perp (p_z - E - m) \\ &\quad + \sin \theta [R(p_z - E - m)(p'_z + E' + m) \\ &\quad - R'(p_z + E + m)(p'_z - E' - m)] \}, \\ G_1^{(-\sigma)} &\equiv -\frac{\sigma k}{2} \cos \theta R' p'_\perp (p_z - E - m), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} F_2^{(0)} &\equiv -i\sigma p'_\perp(E+m), \\ F_2^{(\sigma)} &\equiv -i\sigma \frac{kR}{2}(p_z-E-m)(p'_z-E'-m), \\ F_2^{(-\sigma)} &\equiv i\sigma \frac{kR'}{2}(p_z-E-m)(p'_z-E'-m), \\ G_2^{(0)} &\equiv i[p_z(E'+m)-p'_z(E+m)], \\ G_2^{(\sigma)} &\equiv i\frac{kR}{2}p'_\perp(p_z-E-m), \\ G_2^{(-\sigma)} &\equiv -i\frac{kR'}{2}p'_\perp(p_z-E-m). \end{aligned} \right\} (28)$$

因子 $\sqrt{N+1}$ 表示此式含诱致辐射和自发辐射的贡献.

此过程一级微扰的跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned} &\langle \sigma', p'; e'_i, k', N+1 | T | N, k', e'_i, p, \sigma \rangle \\ &= -i\sqrt{N+1} \int \int \phi_{p', \sigma'}^\dagger(\mathbf{x}, t) H_{\nu'}^\dagger \phi_{p, \sigma}(\mathbf{x}, t) d^3x dt \\ &= -i \frac{e}{\sqrt{2k'}} \sqrt{\frac{N+1}{4EE'(E+m)(E'+m)}} \\ &\quad \times \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0, \pm 1} J_{N-\nu}(p'_\perp R') \\ &\quad \times [\delta_{\sigma, \sigma'} F_i^{(\nu)} e^{-iN\varphi_{k'}} + \delta_{\sigma, -\sigma'} G_i^{(\nu)} e^{i(\sigma-N)\varphi_{k'}}] \\ &\quad \times \delta \left[\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - N\mathbf{k} + \frac{eA}{2}(R' - R)\mathbf{k} \right] \\ &\quad \times \delta \left[E' + k' - E - Nk + \frac{eA}{2}(R' - R)k \right], \end{aligned} \quad (29)$$

其中的 δ 函数是共振条件, 给出跃迁概率非零的选择定则. 即

$$\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p} - N\mathbf{k} + \frac{eA}{2}(R' - R)\mathbf{k} = 0, \quad (30)$$

$$E' + k' - E - Nk + \frac{eA}{2}(R' - R)k = 0. \quad (31)$$

它们看上去像康普顿散射中的动量-能量守恒, 但有两处修正. 一是出现新量子数 N , 好像是参与康普顿散射的入射光子的数目. 但它的出现是由于电子波受到激光的扭曲, 应是载在电子波上的扭曲波的量子数. 二是含相干振幅的末项, 表示激光相干性的影响. 二式联立得出射光子能量与方向的关系

$$k' = \frac{Nk(E - p_z)}{E + Nk + \frac{eA}{2}Rk - (p_z + Nk + \frac{eA}{2}Rk) \cos \theta}. \quad (32)$$

在 $N=1$ 和 $A=0$ 的条件下, 此式还原为康普顿关系.

激光(1)中单位时间, 单位体积, 一个量子数为 p, σ 的电子跃迁到 p', σ' 态, 并发射一个 k', e'_i 模式

的光子至 k' 周围单位立体角内的概率为^[8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 P}{\partial^3 x \partial t \partial \Omega_{k'}} &= \frac{\alpha k'}{(2\pi)^3} \frac{N+1}{4EE'(E+m)(E'+m)} \\ &\times \frac{E'k'}{Nk(E-p_z)} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0, \pm 1} J_{N-\nu}(p'_\perp R') [\delta_{\sigma, \sigma'} F_i^{(\nu)} e^{-iN\varphi_{k'}} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\sigma, -\sigma'} G_i^{(\nu)} e^{i(\sigma-N)\varphi_{k'}}] \right|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

人们习惯用截面表示事件发生的概率. 以上考虑的是一个电子与一束激光的碰撞. 可以定义单位体积激光对电子的截面. 在此处用的自然单位制中, 长度单位是电子的康普顿波长 $\lambda_c = m^{-1}$, m 为电子质量. 上述过程的微分截面便是^[8]

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\Omega_{k'}}(e'_i) &= \frac{\alpha k'^2(N+1)}{8\pi m N k |p_z|(E-p_z)(E+m)(E'+m)} \\ &\times \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0, \pm 1} J_{N-\nu}(p'_\perp R') [\delta_{\sigma, \sigma'} F_i^{(\nu)} + \delta_{\sigma, -\sigma'} G_i^{(\nu)} e^{i\sigma\varphi_{k'}}] \right|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

2 量子自由电子激光器与 γ 射线激光

用上面的公式分析激光中电子的辐射. 举一个例子: 波长为785 nm, 强度为 10^{19} W/m²的圆偏振平面波激光朝 z 方向传播. 能量在 $10^2 \sim 10^3$ MeV间的非极化单能电子束向 $-z$ 方向运动. 二者迎面对撞, 发出光子. 这种实验条件是不难具备的. 图2表明, 在所标明的条件下, 发出光子几乎完全集中在电子运动的方向上. 按式(32), 所发光子的能量是发光方向的单值函数, 因此不论从颜色还是从空间分布看, 都构成线光谱. 详细的考察还表明发出的光子态几乎是完全极化的^[9]. 总之, 所发出的是一束与入射电子同向运动的单色极化光, 其中所有的光子几乎都处于同一状态. 这里, 发出的光子束与入射的电子束同方向运动, 得以相伴而行, 特别重要. 这使得诱致辐射有良好条件发生. 诱致辐射是正反馈的. 某状态的光子数越多, 它诱致辐射的概率就越大, 辐射产生的光子又都进入这一状态, 使此状态的光子数指数性的大幅度增加. 最后几乎全部光子都塌缩进这一状态, 终于形成激光.

在引言中谈及早期建造的激光器, 其中发光介质是不动的. 为了实现诱致辐射, 要用容器将特定状态的光子留在发光介质周围. 这便是谐振腔. 由于 γ 射线波长太短, 做不出能留下它的谐振腔, 致使 γ

图 2 波长 $\lambda = 785\text{ nm}$, 强度 $I = 10^{19}\text{ W/m}^2$ 的激光中, 能量 $E = 307\text{ MeV}$ 的入射电子发出的光子角分布. 纵坐标 $Y \equiv 10^6 \times \frac{d\Sigma}{d\Omega_{k'}}$, 横坐标 $X \equiv \theta/\pi$

Figure 2 The relation between $Y \equiv 10^6 \times \frac{d\Sigma}{d\Omega_{k'}}$ and $X \equiv \theta/\pi$, in the case of $\lambda = 785\text{ nm}$ and $I = 10^{19}\text{ W/m}^2$ for the laser, and energy $E = 307\text{ MeV}$ for the incident electron

射线激光至今未成. 自由电子激光的发光介质是运动的电子, 不需留下发出的光子. 为了诱致辐射, 只需发出的光子与入射电子同方向运动, 相伴而行即可. 这就是说摇摆器同时起到了谐振腔的作用. 对以入射激光为摇摆器的量子自由电子激光也是一样. 只是现在的摇摆周期短到微米量级, 产生的激光可达 γ 射线波段(见图3), 形成的便是 γ 射线激光.

如果一束绝对单能定向运动的电子与一束理想平面波激光正好 180° 对撞, 在入射电子能量和激光波长都合适的条件下输出就是一束 γ 激光. 这时发生了完美的共振, 诱致辐射的正反馈令发出的 γ 光迅速塌缩到初态电子的运动方向, 成为一束单色偏振的相干光. 然而一束电子不可能完全单能定向, 总有弥散. 也没有理想的平面波激光, 总有扭曲. 康普顿背散射(CBS) γ 光源中入射激光实际是许多并不全同的压缩了的激光波包, 也是弥散的. 这一切使各种诱致辐射的正反馈和塌缩的可能性互相竞争. 弥散和扭曲大到一定程度, 向一个态的塌缩成为不可能, 就不能形成 γ 激光. 从有序无序看, 一束能量和运动方向都完全确定的电子和一束精确的平面波激光是完全有序的, 温度为绝对零度. 电子能量和运动方向的弥散以及入射激光波包的扭曲和弥散则表示无序, 绝对温度非零. 上面说的是有序的始态可产生 γ 激

图 3 波长 $\lambda = 785\text{ nm}$, 强度 $I = 10^{19}\text{ W/m}^2$ 的激光中, 沿电子运动方向发出的光子能量与入射电子能量的关系

Figure 3 Relation between the energy of the emitted photon on the forward direction of the incident electron motion and the energy of the incident electron, in the case of $\lambda = 785\text{ nm}$ and $I = 10^{19}\text{ W/m}^2$ for the laser

光. 实际的始态则恒有无序, 无序达到一定程度就不能形成激光. 因此, 在实验中要逐渐增加始态的有序程度, 降低无序程度. 协同学(synergetics)^[13, 14]告诉我们, 在实际情况向理想条件逼近的途中存在一临界点, 跨过此点就会发生CBS γ 光源向 γ 射线激光的相变. 寻找此点便是实现 γ 射线激光的关键. 在靠近完全有序始态的一边, 各种塌缩可能性的竞争变得不稳定. 其中的一种获胜, 输出的 γ 光按这种塌缩成为激光. 这是一种从无序到有序的相变. 输出由不相干的 γ 光变成相干的 γ 射线激光. 相反, 如果输入的质量变差, 始态变得更无序, 各种塌缩可能性的竞争变得势均力敌, 每种塌缩都不能胜出, 激光便不能形成. 输出从相干的激光变成不相干光, 是从有序到无序的相变. 从两侧靠近并达到相变界面, 即是临界. 从CBS γ 光源到 γ 激光的过程就是不断改进入射电子束和入射激光质量的过程, 是CBS γ 光源改进的极致. 实现临界, 引出 γ 激光, 是一项实验工作. 可以且应该有理论配合, 但要依据实验条件进行.

早期激光器要维持运行, 必须不断把发光介质激发到上能级, 称为抽运. 自由电子激光器的持续运行则必须不断供给入射电子, 这相当于抽运. 量子自由电子激光器也是这样. 由于理论是可靠的, 可以计算入射电子在运行中的消耗. 设入射电子和激光在一条直管内迎面相遇, 称此管为活性管. 电子从管的

一端(a)自左向右入射,背景激光从管的另一端(b)自右向左入射.管内一点到a端的距离为 l . l 处始态电子数密度为 $n(l)$,末态电子数密度为 $n'(l)$,激光的光子数密度为 $N(l)$.在局域近似(以单位体积内的光子数代替光子数)下始态电子发射和末态电子吸收光子的平衡方程为

$$dN = [(N+1)n - Nn']adl/\lambda_c, \quad (35)$$

其中 $a = \frac{d\Sigma}{d\Omega_e}/(N+1)$.取起始条件 $N(0) = n'(0) = 0$ 和 $n(0) \equiv n_0$,有 $N(l) = n'(l) = n_0 - n(l)$,得发展方程

$$\lambda_c \frac{dn}{dl} = a [2n^2 - (3n_0 + 1)n + n_0^2]. \quad (36)$$

由此可解得 $n(l)$ 和 $N(l) = n_0 - n(l)$.其中

$$\begin{aligned} N(l) &= n'(l) \\ &= 2n_0 \frac{1 - \exp(-\xi al/\lambda_c)}{\xi - n_0 + 1 + (\xi + n_0 - 1)\exp(-\xi al/\lambda_c)}, \end{aligned} \quad (37)$$

$\xi \equiv \sqrt{n_0^2 + 6n_0 + 1}$.设活性管长 L ,在它的右端(b),即电子出口处,光子数密度为

$$N(L) = 2n_0 \frac{1 - \exp(-\xi aL/\lambda_c)}{\xi - n_0 + 1 + (\xi + n_0 - 1)\exp(-\xi aL/\lambda_c)}, \quad (38)$$

取参数

$$\lambda = 785 \text{ nm}, I = 10^{19} \text{ W/m}^2, E = 307 \text{ MeV}. \quad (39)$$

取 $L = 1 \text{ cm}$,算得的 $\xi aL/\lambda_c$ 已可视为无穷大.由于 n_0 是大数, $\xi - n_0 \sim 3$,结果 $N(L) \sim n_0/2$.可见活性管左端入射的始态电子经辐射和吸收光子的竞争与平衡到管右端后最终约一半跃迁为末态电子,并发出光子.单节活性管出射 γ 激光强度大体取决于入射电子流强度.一束密度为 $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ 能量为 $E = 307 \text{ MeV}$ 的电子可产生强度为 $5 \times 10^{13} \text{ W/m}^2$ 的 γ 激光.这已值得一试.

出射激光强度受入射电子流强的限制.此处的理论忽略了库仑相互作用.由于精细结构常数小,电磁作用弱,通常条件下这是允许的.但在电子流强过大,空间电荷效应显著时,库仑作用就必须考虑,理论必须修改.不修改理论又要增强激光就只能借助技术手段.一个办法是将许多活性管排成一条直线,称为多节活性管.每节的开头注入同样的强度不过高的入射电子流,末尾排出已发过光因而能

量已改变电子,如图4所示.多节活性管内的平衡微分方程仍为式(35).光子数密度的起始条件推广为 $N(0) \equiv N_0 \geq 0$.有 $N(l) = N_0 + n'(l) = N_0 + n_0 - n(l)$.每一节的发展方程推广为

$$\lambda_c \frac{dn}{dl} = a [2n^2 - (2N_0 + 3n_0 + 1)n + n_0(n_0 + N_0)]. \quad (40)$$

此方程仍有解析解.与上面类似的分析知, $N(L) - N(0) \sim n_0$.即每节增加的输出光子数密度 $N(L) - N_0$ 与入射电子数密度 n_0 同量级.一支 κ 节活性管产生的激光强度大体是单节活性管的 κ 倍.一支单节活性管长为厘米量级,一支100节量级的活性管长为若干米量级,可放在一间普通实验室内.若取每节入口处的入射始态电子束密度为 $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$,100节活性管末端输出的 γ 激光强度为 10^{15} W/m^2 量级.简单的分析表明^[9],取参数式(39)的条件下,密度为 $n_0 \ll 10^{29} \text{ m}^{-3}$ 的电子束中库仑作用可以忽略.可保险地取每节入口处的入射始态电子束密度为 $n_0 = 10^{23} \text{ m}^{-3}$,100节活性管末端输出的 γ 激光强度可达 10^{20} W/m^2 量级.这种结构可称为激光的直线加强器.很好准直的细长多节管还令最后离开的辐射具更细的线光谱,从而更确切地选定最后因诱致辐射正反馈而导致的塌缩,更容易相变成激光.

由于光学波段附近的电磁波可用镜面反射,在经典自由电子激光摇摆器首尾两端各装了一面反射镜,令其中产生的电磁波在首尾两端间来回反射.在它从首端向尾端反射的同时注入新的初态电子从而发生新一轮诱致辐射.这样不断加强激光,直到新的增益被后面的镜面完全吸收为止.这种结构也称为谐振腔.这种技术难于 γ 激光器.幸好 γ 激光器的单节活性管短到厘米量级,可以把它们联接成直线多节活性管,也可不断加强 γ 激光.只受空间大小的限制.它起着经典自由电子激光器中谐振腔的作用.一支100节量级的活性管起着来回反射一百次的谐振

图4 多节活性管示意图.两条平行黑线间的空间是管的内部,点线表示电子入射轨迹.

Figure 4 Sketch map for the multi-section active tube. The space between two parallel black lines shows the inside of the tube, dotted lines show the trajectories of the electron injection

腔的作用.

3 结语

对 γ 激光的追求产生了量子自由电子激光的思

想,进而催生了激光中的量子电动力学.在此基础上,发现各种激光的原理是相通的:发光介质及其能量的补充,谐振与诱致辐射的选择,原则相同,形态各异.技术也可相互借鉴.

参考文献

- 1 Zhang Q R, Gao C Y, Yao S D. On γ -ray laser. *Chin Sci Bull*, 2001, 46: 1238–1242
- 2 Korol A V, Solov'yov A V, Greiner W. Coherent radiation of an ultrarelativistic charged particle channelled in a periodically bent crystal. *J Phys G*, 1998, 24: L45–L53
- 3 Korol A V, Solov'yov A V, Greiner W. Photon emission by an ultra-relativistic particle channeling in a periodically bent crystal. *Intern J Mod Phys E*, 1999, 8: 49–100
- 4 Zhang Q R. Quantum recoil and the gamma-ray amplification by stimulated emission of radiation from positrons channelling in an acoustically excited crystal. *Intern J Mod Phys E*, 1999, 8: 493–500
- 5 Zhang Q R. Intensity dependence of the photoelectric effect induced by a circularly polarized laser beam. *Phys Lett A*, 1996, 216: 125–128
- 6 Zhang Q R. Non-integer quantum transition, a true non-perturbation effect in laser-atom interaction. *Comm Theor Phys*, 2007, 47: 1017–1023
- 7 Zhang Q R, Gao C Y. Quantum corrections on relativistic mean field theory for nuclear matter. *Comm Theor Phys*, 2011, 55: 765–770
- 8 Zhang Q R. Quantum electrodynamics in a laser and the electron laser collision. *Chin Phys B*, 2014, 23: 010306
- 9 Zhang Q R. Possible generation of a gamma-ray laser by electrons wiggling in a background laser. *Chin Phys B*, 2015, 24: 054208
- 10 Wolkow D M. On a mass of solutions of the Dirac equation (in Germany). *Z Phys*, 1935, 94: 250–260 [Wolkow D M. Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung. *Z Phys*, 1935, 94: 250–260]
- 11 Gell-Mann M, Low F. Bound states in quantum field theory. *Phys Rev*, 1951, 84: 350–354
- 12 Zhang Q R. *Quantum Mechanics* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2002 [张启仁. 量子力学. 北京: 科学出版社, 2002]
- 13 Haken H. *Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Selforganizing Systems and Devices*. Berlin: Springer Verlag, 1983
- 14 Haken H. *Laser Theory*. Berlin: Springer Verlag, 1983

Summary for “实现 γ 射线激光之路”

The way to realize γ -ray lasers

ZHANG QiRen¹ & GAO ChunYuan^{1,2*}¹ School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China;² State Key Laboratory of Nuclear Physics and Technology, Peking University, Beijing 100871, China

* Corresponding author, E-mail: gaocy@pku.edu.cn

Essential ingredients for generating a laser are analyzed. Unified understanding on generation mechanisms for both usual lasers (with media composed of atoms, molecules or condensed matter) and free electron lasers are shown. It makes us understand the difficulties in generating a γ -ray laser. First of all, it is impossible to make a resonator in the γ -ray region by mirrors, like those made for optic instruments within or near the visible spectrum. The relation between the wavelength λ_r of the emitted radiation, and the wiggler period λ_w in a free electron laser is $\lambda_r \sim \lambda_w/\gamma^2$, in which γ is the Lorentz factor of the emitting electron. Requiring λ_r falls into the γ -ray region, λ_w has to be less than 1 mm. It seems impossible to be realized in a usual free electron laser either. We therefore propose a way to realize it by letting charged particles wiggle in an usual back ground laser. A circularly polarized plane wave laser distorts the electron wave in x - y planes, periodically along the z direction, and modulates the periodicity along the z direction. It is the quantum correspondence of the classical wiggling of electrons. Since a laser is a coherent electromagnetic wave, simple and clean, it is therefore an ideal wiggler. To accurately and reliably analyze the whole process, we proposed Quantum Electrodynamics in a Laser. It is equivalent to the Quantum Electrodynamics in Vacuum, and is therefore the most reliable theory nowadays as well. Moreover we noticed that, emitted γ -photons moving with emitting electrons, itself is a favorable condition to make the stimulated emission easy. Its effect in some sense like the effect of a resonator. The stimulated emissions amplify the γ -radiation and make it finally transit into a γ -ray laser under favorable conditions. In this sense, the generated γ -ray laser is a Quantum Free Electron Laser. Therefore we clearly concluded that in a head on collision between a suitable mono-energetic electron beam and a monochromatic plane wave laser, a γ -ray laser should be generated. For an electron beam of density $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ and energy $E = 307 \text{ MeV}$, in the background laser with $\lambda = 785 \text{ nm}$ and $I = 10^{19} \text{ W/m}^2$, the intensity of the output γ -ray laser is about $5 \times 10^{13} \text{ W/m}^2$. It is meaningful. Of course, this is a theoretical conclusion under ideal conditions. The competition and the balance between the emission and reabsorption of quanta by electrons determine the evolution and therefore the output intensity of the γ -ray laser. However, Synergetics tells us that there will be a critical point. When the real situation approaches the ideal condition and acrosses over this point, the positive feedback of stimulated emissions leads to a collapse of the created γ -photon beam into a coherent state. This is a phase transition of the produced γ -ray into a γ -ray laser, and is just what we want to search in experiments.

quantum electrodynamics in laser fields, quantum free electron laser, γ ray laser

doi: 10.1360/N972016-01247