正规族与复合亚纯函数

袁文俊^①, 肖冰^②, 林剑鸣^{③*}

① 广州大学数学与信息科学学院, 广州 510006;

② 新疆师范大学数学系, 乌鲁木齐 830054;

③ 广州中医药大学经济与管理学院, 广州 510006

E-mail: gzywj@tom.com, xiaobing6101@163.com, ljmguanli@21cn.com

收稿日期: 2011-01-25; 接受日期: 2011-10-12; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10771220) 与教育部博士点基金 (批准号: 200810780002) 资助项目

摘要 本文研究了亚纯函数族涉及复合有理函数与分担亚纯函数的正规性. 证明了一个正规定则: 设 $\alpha(z)$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是区域 D 上的亚纯函数与亚纯函数族, $R(z)$ 是一个次数不低于 3 的有理函数. 如果对族 $\mathcal{F}$ 中函数 $f(z)$ 和 $g(z)$, $R \circ f(z)$ 和 $R \circ g(z)$ 分担 $\alpha(z)$ IM, 并且下述条件之一成立:

(1) 对任何 $z_0 \in D$, $R(z) - \alpha(z_0)$ 有至少三个不同的零点或极点;

(2) 存在 $z_0 \in D$ 使得 $R(z) - \alpha(z_0) := (z - \beta_0)^p H(z)$ 至多有两个零点 (或极点) β_0 , 同时 $k \neq l|p|$, 其中 l 和 k 分别是 $f(z) - \beta_0$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 z_0 处的零点重数, $H(z)$ 是满足 $H(\beta_0) \neq 0, \infty$ 的有理函数, $\alpha(z)$ 非常数并满足 $\alpha(z_0) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 特别地, 这个结果是著名的 Montel 正规定则的一种推广.

关键词 复合函数 正规定则 亚纯函数 分担值

MSC (2000) 主题分类 30D45, 30D35

1 引言

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的区域, $\mathcal{F}$ 是 D 上的亚纯函数族. 如果对族 $\mathcal{F}$ 中的任何函数列 $\{f_n\}$, 都存在子函数列 $\{f_{n_j}\}$ 在 D 内按球面距离内闭一致收敛于亚纯函数或无穷, 则我们称 $\mathcal{F}$ 是 D 上的正规族^[1]. 我们知道, 寻求涉及分担值或分担函数的正规定则是目前的热点课题. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是区域 D 上两个非常数亚纯函数, a 是一个有穷复数或函数. 如果 $f - a$ 与 $g - a$ 有相同的 (判别) 零点, 则称 f 和 g 分担 a CM (或 IM). 如果 $\frac{1}{f}$ 和 $\frac{1}{g}$ 分担 0 CM (或 IM), 则称 f 和 g 分担 ∞ CM (或 IM). 假定读者熟悉 Nevanlinna 值分布理论的标准记号^[2]

$$T(r, f), m(r, f), N(r, f), \overline{N}(r, f), \dots$$

特别地, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 用 $S(r, f)$ 表示任何满足 $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$ 的量, 可能须除去线测度为有穷的点集.

若 $T(r, \alpha) = S(r, f)$, 则称亚纯函数 $\alpha(z)$ 为关于亚纯函数 $f(z)$ 的小函数.

2009 年, 常建明等^[3]推广方明亮和袁文俊^[4]、Bergweiler^[5]与 Hinchliffe^[6]解析族下的结果, 证明了下面的定理:

英文引用格式: Yuan W J, Xiao B, Lin J M. Normal families and composite meromorphic functions (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41(11): 991–1000, doi: 10.1360/012011-72

定理 A 设 $\alpha(z)$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是区域 D 上非常数亚纯函数和亚纯函数族, $R(z)$ 是一个次数不低于 3 的有理函数. 若对族 $\mathcal{F}$ 中函数 $f(z)$ 有 $R \circ f(z) \neq \alpha(z)$ 及 $z \in D$, 那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

在方明亮和袁文俊^[4]的结果中, $R(z)$ 为多项式.

2010 年, 袁文俊等^[7]结合分担函数, 在解析族情形推广上述定理, 得到:

定理 B 设 $\alpha(z)$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是区域 D 上的非常数解析函数与解析函数族, $R(z)$ 是一个次数不低于 2 的有理函数. 如果对族 $\mathcal{F}$ 中函数 $f(z)$ 和 $g(z)$, $R \circ f(z)$ 和 $R \circ g(z)$ 分担 $\alpha(z)$ IM, 并且下述条件之一成立:

(1) 对任何 $z_0 \in D$, $R(z) - \alpha(z_0)$ 有至少两个不同的零点或极点;

(2) 存在 $z_0 \in D$ 使得 $R(z) - \alpha(z_0) := \frac{P(z)}{Q(z)}$ 仅有一个零点 (或极点) β_0 , 同时 $k \neq lp$ (或 $k \neq lq$), 其中 l 和 k 分别是 $f(z) - \beta_0$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 z_0 处的零点重数, $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别是次数为 p 和 q 的互质的多项式, 并且 $\alpha(z_0) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

注 1.1 我们说 $\alpha(z)$ 在 $z_0 \in D$ 处取值 $\alpha(z_0)$ k 次是指 $\alpha(z) - \alpha(z_0) = (z - z_0)^k \beta(z)$, 或者 $\alpha(z) = (z - z_0)^{-k} \beta(z)$ 并且 $\beta(z_0) \neq 0$.

2011 年, 袁文俊等^[8]考虑了上述结果中 $R(z)$ 与 $\mathcal{F}$ 分别为多项式与亚纯函数族情形.

本文推广上述结果, 得到:

定理 1.1 设 $\alpha(z)$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是区域 D 上的亚纯函数与亚纯函数族, $R(z)$ 是一个次数不低于 3 的有理函数. 如果对族 $\mathcal{F}$ 中函数 $f(z)$ 和 $g(z)$, $R \circ f(z)$ 和 $R \circ g(z)$ 分担 $\alpha(z)$ IM, 并且下述条件之一成立:

(1) 对任何 $z_0 \in D$, $R(z) - \alpha(z_0)$ 有至少三个不同的零点或极点;

(2) 存在 $z_0 \in D$ 使得 $R(z) - \alpha(z_0) := (z - \beta_0)^p H(z)$ 至多有两个零点 (或极点) β_0 , 同时 $k \neq l|p|$, 其中 l 和 k 分别是 $f(z) - \beta_0$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 z_0 处的零点重数, $H(z)$ 是满足 $H(\beta_0) \neq 0, \infty$ 的有理函数, $\alpha(z)$ 非常数并满足 $\alpha(z_0) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

注 1.2 下面的例 1.1 说明定理 1.1 中的条件 $\deg R \geq 3$ 是最好的可能.

例 1.1^[3] 设 $R(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$, $D = \{|z-1| < 1\}$,

$$f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z} \cos \sqrt{z}} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^j}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^j}$$

且 $\psi(z) = (1+z)^{\frac{1}{2}}$. 取 $\mathcal{F} := \{f_n\}$, 其中

$$f_n(z) := in^{\frac{1}{2}} \psi(z) f(n(z-1)), \quad n = 1, 2, \dots$$

那么

$$R(f_n(z)) = z - \frac{z+1}{1 - 2n \left(\frac{\sin \sqrt{n(z-1)}}{\sqrt{n(z-1)}} \right)^2} \neq z.$$

另一方面, 族 $\mathcal{F}$ 在 1 处显然不等度连续, 这是因为对充分大的 n , f_n 在 1 的任何领域内都既有零点, 又有极点. 因此 $\mathcal{F}$ 在 1 处不正规.

从定理 1.1 容易得到下述推论, 它也是袁文俊等^[8]的结果的推广, 在那里 $\alpha(z)$ 是解析的.

推论 1.2 设 $\alpha(z)$ 和 $\mathcal{F}$ 分别是区域 D 上的亚纯函数与亚纯函数族, $P(z)$ 是次数不低于 3 的多项式. 如果对族 $\mathcal{F}$ 中函数 $f(z)$ 和 $g(z)$, $P \circ f(z)$ 和 $P \circ g(z)$ 分担 $\alpha(z)$ IM, 并且下述条件之一成立:

(1) 对任何 $z_0 \in D$, $P(z) - \alpha(z_0)$ 有至少三个不同的零点 (如果 $\alpha(z_0) = \infty$, 用 $P(z)$ 替换 $P(z) - \alpha(z_0)$);

(2) $\alpha(z)$ 不是常数, 并且存在 $z_0 \in D$ 使得 $P(z) - \alpha(z_0)$ 至多有两个不同零点 β_0 , 同时 $k \neq lp$ 对所有 $f \in \mathcal{F}$ 都成立, 其中 l 和 k 分别是 $f(z) - \beta_0$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 z_0 处的零点重数 (如果 $\alpha(z_0) = \infty$, 分别用 $P(z)$ 和 $\frac{1}{\alpha(z)}$ 替换 $P(z) - \alpha(z_0)$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$).
那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

注 1.3 下面的例 1.2 说明推论 1.2 中的条件 $\deg P \geq 3$ 是最好的可能.

例 1.2^[3] 设 $P(z) = z^2$, $D = \{|z| < 1\}$,

$$f(z) = \frac{\sqrt{z} \cos \sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^j}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^j},$$

且设 $\mathcal{F} := \{f_n\}$, 其中

$$f_n(z) := \frac{i}{\sqrt{n}} f(nz), \quad n = 1, 2, \dots$$

那么

$$P(f_n(z)) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - (\sin \sqrt{nz})^2}{(\sin \sqrt{nz})^2} nz = -\frac{1}{(\sin \sqrt{nz})^2} z + z \neq z.$$

另一方面, 如前例推理可知, $\mathcal{F}$ 在 0 处不正规.

注 1.4 在推论 1.2 的条件 (1) 中, 取 $\alpha(z)$ 为常数 0, 那么 $P(z) = 0$ 恰好解得复数集 S . 这样我们就得到下面的推论 1.3, 它不仅是著名的 Montel 正规定则的一种推广, 也是方明亮等^[9] 的一个正规定则的推广, 在那里亚纯函数族分担复数集 CM.

推论 1.3 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 上的亚纯函数族, S 是至少有 3 个元素的有穷复数集. 如果族 $\mathcal{F}$ 中所有函数都分担 S IM, 即如果对每对函数 $f(z), g(z) \in \mathcal{F}$ 和所有 $z \in D$ 都成立

$$f(z) \in S \iff g(z) \in S,$$

那么 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2 引理

为证明定理, 需要下述引理. 引理 2.1 是著名的 Zalcman 引理^[10] 的一种推广形式.

引理 2.1^[11,12] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘上的亚纯函数族. 那么 $\mathcal{F}$ 在单位圆盘上不正规的充分必要条件是存在

- a) 一个正数 $0 < r < 1$;
- b) 一个点列 z_n 使得 $|z_n| < r$;
- c) 一个函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;
- d) 一个正数列 $\rho_n \rightarrow 0$,

使得 $g_n(\zeta) := f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 在复平面上按球面距离局部一致收敛于增长级至多为 2 的非常数亚纯函数 $g(\zeta)$.

注 2.1 在引理 2.1 中, 如果 $\mathcal{F}$ 是解析函数族, 那么 $g(\zeta)$ 就是增长级至多为 1 的整函数.

下面的引理 2.2 和引理 2.3 在我们的主要定理证明中非常有用, 为便于陈述, 我们用 $U(z_0, r)$ 表示以 z_0 为心、以 r 为半径的圆盘, 即 $U(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $U^0(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$.

引理 2.2 设 $\{f_n(z)\}$ 是 $U(z_0, r)$ 上的亚纯函数族. 若 $\{f_n(z)\}$ 在 z_0 处不正规, 在 $U^0(z_0, r)$ 上正规, 则下述结论之一成立:

(1) 函数族 $\{f_n(z)\}$ 中存在一个子函数列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 和一个趋于 z_0 的点列 $\{z_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k}(z_{n_k}) = 0$;

(2) 函数族 $\{f_n(z)\}$ 中存在一个子函数列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 和一个趋于 z_0 的点列 $\{z_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k}(z_{n_k}) = \infty$, 但 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 $U^0(z_0, r)$ 内每个紧致集上按球面距离一致收敛于 0.

证明 不失一般性, 可以假设 $z_0 = 0$. 根据条件, 在函数族 $\{f_n(z)\}$ 中存在子函数列 $\{f_{n_m}(z)\}$, 使得

$$f_{n_m}(z) \rightarrow F(z)$$

按球面距离一致收敛于去心领域 $U^0(0, r)$.

为简便起见, 下面我们仍用 $\{f_n(z)\}$ 表示 $\{f_{n_m}(z)\}$. 分两种情形:

情形 1 在 $U^0(0, r)$ 内, 有 $F(z) \equiv \infty$.

假设结论 (1) 不成立. 那么存在正数 r' 使得 $r' < r$ 且对足够大的 n , 在 $U(0, r')$ 上 $f_n(z) \neq 0$. 因此 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 是 $U(0, r')$ 上的解析函数族. 由于在 $C_{\frac{r'}{2}} := \{z : |z| = \frac{r'}{2}\}$ 内, $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 是正规的, 因此, 对任意的 $M > 0$, 存在正整数 N , 使得

$$\left| \frac{1}{f_n(z)} \right| \leq M$$

对所有 $n > N$ 和 $z \in C_{\frac{r'}{2}}$ 成立. 据最大模原理可知

$$\left| \frac{1}{f_n(z)} \right| \leq M$$

对所有 $n > N$ 和 $z \in U(0, \frac{r'}{2})$ 成立. 于是

$$|f_n(z)| \geq \frac{1}{M}$$

对所有 $n > N$ 和 $z \in \overline{U}(0, \frac{r'}{2})$ 成立. 因此 $\{f_n(z)\}$ 在 $z = 0$ 处正规. 这矛盾于我们的假设.

情形 2 在 $U^0(0, r)$ 内, 有 $F(z) \neq \infty$.

假设结论 (1) 不成立. 那么存在正数 r' 使得 $r' < r$ 且对足够大的 n , 在 $U(0, r')$ 上 $f_n(z) \neq 0$. 于是 $F(z) \neq 0$ 或 $F(z) \equiv 0$. 若 $F(z) \neq 0$, 则存在 $r_0 \in (0, r')$ 使得 $F(z) \neq 0, \infty$ 对 $z \in C_{r_0} := \{z : |z| = r_0\}$ 成立. 因此 $|\frac{1}{F(z)}|$ 在 C_{r_0} 上连续, 即

$$\frac{2M_0}{3} := \max \left\{ \left| \frac{1}{F(z)} \right| : z \in C_{r_0} \right\} > 0. \quad (2.1)$$

由于 $\{f_n(z)\}$ 在 C_{r_0} 上正规, 由 (2.1) 可知, 存在正整数 N , 使得

$$|f_n(z)| \geq \frac{1}{M_0} \quad \text{即} \quad \left| \frac{1}{f_n(z)} \right| \leq M_0$$

对所有 $n > N$ 和 $z \in C_{r_0}$ 成立. 注意到 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 是 $U(0, r')$ 内的解析函数族, 据最大模原理可知

$$\left| \frac{1}{f_n(z)} \right| \leq M_0$$

对所有 n 和 $z \in \overline{U}(0, r_0)$ 成立. 因此 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 在 0 处正规, 进而知 $\{f_n(z)\}$ 在 0 处正规. 这矛盾于我们的假设.

因此, 对 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 运用情形 1 的结论即知, $F(z) \equiv 0$. 结论 (2) 成立.

引理 2.2 证毕.

注 2.2 引理 2.2 是 [6] 中一个结果的推广, 在那里 $\{f_n(z)\}$ 是 $U(z_0, r)$ 上的解析函数族. 对 $\{\frac{1}{f_n(z)}\}$ 运用引理 2.2, 可得如下引理 2.3.

引理 2.3 设 $\{f_n(z)\}$ 是 $U(z_0, r)$ 上的亚纯函数族. 若 $\{f_n(z)\}$ 在 z_0 处不正规, 在 $U^0(z_0, r)$ 上正规, 则下述结论之一成立:

- (1) 函数族 $\{f_n(z)\}$ 中存在一个子函数列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 和一个趋于 z_0 的点列 $\{z_{n_k}\}$ 使得 $f_{n_k}(z_{n_k}) = \infty$;
- (2) 函数族 $\{f_n(z)\}$ 中存在一个子函数列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 和一个趋于 z_0 的点列 $\{z_{n_k}\}$ 使得 $f_{n_k}(z_{n_k}) = 0$, 但 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 $U^0(z_0, r)$ 内每个紧致集上按球面距离一致收敛于 ∞ .

引理 2.4^[5,13] 设 $\mathcal{F}$ 是 $U(z_0, r)$ 上的亚纯函数族. 假设对于 $\mathcal{F}$ 中每个 $f(z)$ 和所有 $z \in U(z_0, r)$ 都存在不同的 $\beta_1, \beta_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ 使得 $f(z) \neq \beta_1, \beta_2$. 若函数族 $\mathcal{F}$ 在 $U^0(z_0, r)$ 上正规, 则函数族 $\mathcal{F}$ 在 $U(z_0, r)$ 上正规.

引理 2.5 设 $R(z)$ 是次数至少为 3 的有理函数. 那么至多有六个不同值 a , 使得 $R(z) - a$ 具有至多两个不同的零点.

证明 反证, 假设引理的结论不成立, 那么至少存在 7 个不同的值 a_i , 使得 $R(z) - a_i$ 有至多两个不同的零点, 其中 $i = 1, 2, \dots, 7$. 根据著名的 Nevanlinna 第二基本定理, 我们有

$$\begin{aligned} 5T(r, R) &\leq \sum_{i=1}^7 \overline{N}\left(r, \frac{1}{R - a_i}\right) + S(r, R) \\ &\leq 14 \log r + o\{\log r\}. \end{aligned}$$

注意到 $T(r, R) = \deg R \cdot \log r + O(1) \geq 3 \log r + O(1)$, 我们得到

$$\log r \leq o\{\log r\},$$

而这是不可能的.

引理 2.5 证毕.

3 定理的证明

证明 假设 $\mathcal{F}$ 在 D 上不正规. 不失一般性, 我们假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0^* \in D, \alpha(z_0^*) \neq \infty$ 处不正规 (否则, 我们用 $\frac{1}{\alpha(z)}$ 和 $\frac{1}{R \circ f(z)}$ 分别替换 $\alpha(z)$ 和 $R \circ f(z)$). 分两种情形证之:

情形 1 对任何 $z_0 \in D$, $R(z) - \alpha(z_0)$ 有至少三个不同的零点 a, b 和 c .

根据引理 2.1 可知, 存在点列 $z_n \rightarrow z_0^*$, 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$ 和 $\rho_n \rightarrow 0^+$ 使得

$$h_n(\xi) := f_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow h(\xi)$$

在复平面上按球面距离局部一致收敛, 其中 $h(\xi)$ 是非常数亚纯函数.

从而

$$R \circ f_n(z_n + \rho_n \xi) - \alpha(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow R \circ h(\xi) - \alpha(z_0^*) \quad (3.1)$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离局部一致收敛.

我们断言: $R \circ h(\xi) - \alpha(z_0^*)$ 有至少两个不同的零点.

如果 $h(\xi)$ 是非常数多项式, 那么 $h(\xi) - a$, $h(\xi) - b$ 和 $h(\xi) - c$ 都有零点. 因此 $R \circ h(\xi) - \alpha(z_0^*)$ 有至少三个不同的零点.

如果 $h(\xi)$ 是具有至少一个极点的有理函数, 注意到任何有理函数至多具有一个 Picard 例外值, 那么可知 $h(\xi) - a$, $h(\xi) - b$ 和 $h(\xi) - c$ 中至少两个有零点. 因此此时 $R \circ h(\xi) - \alpha(z_0^*)$ 有至少两个不同的零点.

如果 $h(\xi)$ 是超越亚纯函数, 那么 $h(\xi) - a$, $h(\xi) - b$ 和 $h(\xi) - c$ 中至少有一个具有无穷个零点. 事实上, 假如都至多具有有限个不同零点, 由 Picard 定理^[12]可知, $h(\xi)$ 必为多项式, 矛盾.

于是, 由断言知, 存在两个不同的点 ξ_1 和 ξ_2 使得

$$R \circ h(\xi_1) - \alpha(z_0^*) = 0, \quad R \circ h(\xi_2) - \alpha(z_0^*) = 0 \quad (\xi_1 \neq \xi_2).$$

选择足够小的正数 δ 使得 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ 且 $R \circ h(\xi) - \alpha(z_0^*)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 里除去 ξ_1 和 ξ_2 外没有其他零点, 其中

$$D_1 = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \xi_1| < \delta\}, \quad D_2 = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \xi_2| < \delta\}.$$

根据 (3.1) 和 Hurwitz 定理^[11], 对充分大的 n , 存在 $\xi_{1n} \in D_1$ 和 $\xi_{2n} \in D_2$ 使得

$$R \circ f_n(z_n + \rho_n \xi_{1n}) - \alpha(z_n + \rho_n \xi_{1n}) = 0,$$

$$R \circ f_n(z_n + \rho_n \xi_{2n}) - \alpha(z_n + \rho_n \xi_{2n}) = 0.$$

注意到 $R \circ f_m(z)$ 和 $R \circ f_n(z)$ 分担 $\alpha(z)$ IM, 我们得到

$$R \circ f_m(z_n + \rho_n \xi_{1n}) - \alpha(z_n + \rho_n \xi_{1n}) = 0,$$

$$R \circ f_m(z_n + \rho_n \xi_{2n}) - \alpha(z_n + \rho_n \xi_{2n}) = 0.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$R \circ f_m(z_0^*) - \alpha(z_0^*) = 0.$$

由于最多除去有限个 f_m 外, $R \circ f_m(\xi) - \alpha(\xi)$ 的零点没有聚点, 容易得知

$$z_n + \rho_n \xi_{1n} = z_0^*, \quad z_n + \rho_n \xi_{2n} = z_0^*,$$

或等价地,

$$\xi_{1n} = \frac{z_0^* - z_n}{\rho_n}, \quad \xi_{2n} = \frac{z_0^* - z_n}{\rho_n}.$$

这矛盾于前面所设的 $\xi_{1n} \in D_1$, $\xi_{2n} \in D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

因此, $\mathcal{F}$ 在情形 1 下是正规的.

情形 2 存在 $z_0 \in D$ 使得 $R(z) - \alpha(z_0) := (z - \beta_0)^p H(z)$ 至多有两个零点 (或极点) β_0 , 同时 $k \neq l|p|$, 其中 l 和 k 分别是 $f(z) - \beta_0$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 z_0 处的零点重数, $H(z)$ 是满足 $H(\beta_0) \neq 0, \infty$ 的有理函数, $\alpha(z)$ 非常数并满足 $\alpha(z_0) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

据情形 1 的结论可知 $z_0^* = z_0$.

注意由于 $\alpha(z)$ 非常数, 从而存在去心邻域 $U^0(z_0, r)$ 使得

$$\alpha(z) \neq \alpha(z_0), \infty. \quad (3.2)$$

于是由引理 2.5 可知, 最多除去 12 个有穷值外, $R(z)$ 都至少可在 3 个不同点处取到其它任何值. 再由情形 1 的结论可断言: 对于足够小的 r , 族 $\mathcal{F}$ 在 $U^0(z_0, r)$ 上正规.

据上述断言可知, 任给函数列 $\{f_n(z)\} \subset \mathcal{F}$, 存在子函数列 $\{f_{n_m}(z)\}$ 使得

$$f_{n_m}(z) \rightarrow G(z)$$

在去心领域 $U^0(z_0, r)$ 内闭一致收敛.

以下为简便而言, 仍用 $\{f_n(z)\}$ 表示 $\{f_{n_m}(z)\}$.

我们的重要断言: 存在点列 $z_n \in U(z_0, r)$ ($z_n \rightarrow z_0$) 使得 $R \circ f_n(z_n) - \alpha(z_n) = 0$.

分两个子情形:

情形 2.1 $R(z) - \alpha(z_0)$ 有零点.

据引理 2.2, 再分两个子情形:

子情形 2.1.1 存在点列 $\{z'_n\}$ 趋于 z_0 使得 $f_n(z'_n) = \beta_0$.

事实上我们可以找到 $\rho, \epsilon > 0$ 使得 $|R(z) - \alpha(z_0)| > \epsilon$ 对 $|z - \beta_0| = \rho$ 成立. 再选 δ 和 $0 < \delta < r$ 使得 $|\alpha(z) - \alpha(z_0)| < \epsilon$ 对 $|z - z_0| < \delta$ 成立.

若 $G(z) \equiv \infty$, 则 $f_n(z) \rightarrow \infty, z \in U^0(z_0, r)$, 并且 $f_n(z'_n) = \beta_0$, 其中点列 $z'_n \rightarrow z_0$. 于是对充分大的 n , 我们有 $|z'_n - z_0| < \delta$, 和

$$|(f_n(z) - \beta) - f_n(z) + \beta_0| = |\beta - \beta_0| \leq \rho < |f_n(z) - \beta_0|, \quad (3.3)$$

其中 $|z - z_0| = \delta, \beta \in U(\beta_0, \rho)$. 于是由 Rouché 定理^[14] 可以得知, $f_n(z)$ 取值 $\beta \in U(\beta_0, \rho)$, 即对充分大的 n 有 $f_n(U(z_0, \delta)) \supset U(\beta_0, \rho)$. 再从 $f_n(\partial U(z_0, \delta)) \cap U(\beta_0, \rho) = \emptyset$ 知道, 可以找到 $f_n^{-1}(U(\beta_0, \rho))$ 的一个分支 U_n 包含于 $U(z_0, \delta)$. 因此 U_n 是 Jordan 域, 并且 $f_n: U_n \rightarrow U(\beta_0, \rho)$ 是逆紧映射^[5].

对 $z \in \partial U_n$, 我们有 $f_n(z) \in \partial U(\beta_0, \rho)$ 和 $|R \circ f_n(z) - \alpha(z_0)| > \epsilon$. 因此

$$|R \circ f_n(z) - \alpha(z) - (R \circ f_n(z) - \alpha(z_0))| = |\alpha(z) - \alpha(z_0)| < \epsilon < |R \circ f_n(z) - \alpha(z_0)|, \quad (3.4)$$

其中 $z \in \partial U_n$.

若 $G(z) \neq \infty$, 则 $G(z)$ 在 $U^0(z_0, r)$ 上亚纯.

假设 $G(z) \neq 0$ 在 $U^0(z_0, r')$ 内对任何 $r' \in (0, r)$ 成立. 于是存在足够小的 δ 和 ρ 使得 (3.3) 成立. 同样地推理可知 (3.4) 在 ∂U 上成立. 注意到由 $R \circ f_n(z'_n) - \alpha(z_0) = 0$ 和 (3.4), Rouché 定理^[14] 便导出我们的断言.

假设 $G(z) \equiv 0$ 在 $U^0(z_0, r')$ 内对任何 $r' \in (0, r)$ 成立. 选取 $\delta, \epsilon > 0$ 使得 $|\alpha(z) - \alpha(z_0)| > \epsilon$ 在 $z \in \partial U(z_0, \delta)$ 上成立. 于是对充分大的 n , 有

$$|R \circ f_n(z) - \alpha(z_0)| < \epsilon < |R \circ f_n(z) - \alpha(z) - (R \circ f_n(z) - \alpha(z_0))| = |\alpha(z) - \alpha(z_0)|, \quad (3.5)$$

其中 $z \in \partial U(z_0, \delta)$. Rouché 定理^[14] 和 (3.5) 告诉我们, 函数 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内的零点与极点的个数之差是相等的. 由 (3.2) 可知 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在那里有至少一个零点, 但无极点. 这便导致 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内至少有一个零点, 用 z_n 表示其中之一. 即存在点列 $z_n \in U(z_0, r)$ 使得 $R \circ f_n(z_n) - \alpha(z_n) = 0$. 我们的断言成立.

子情形 2.1.2 在 $U^0(z_0, r)$ 内存在点列 $\{z_n\}$ 趋于 z_0 使得 $f_n(z_n) = \infty$, 但是 $\{f_n(z)\}$ 按球面距离一致收敛于 β_0 .

假设蕴含 $R(\beta_0) = \alpha(z_0)$. 从而对所有 $|z - z_0| = r$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R \circ f_n(z) \rightarrow \alpha(z_0)$.

因此对足够大的 n 和 $|z - z_0| = r$, (3.5) 成立. Rouché 定理^[14] 和 (3.5) 告诉我们, 函数 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内的零点与极点的个数之差是相等的. 由 (3.2) 可知 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在那里有至少一个零点, 但无极点. 注意到 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 在那里至少有一个极点, 这些便导致 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内至少有两个零点, 用 z_n 表示其中之一. 即存在点列 $z_n \in U(z_0, r)$ 使得 $R \circ f_n(z_n) - \alpha(z_n) = 0$. 我们的断言成立.

情形 2.2 $R(z) - \alpha(z_0)$ 没有零点.

根据引理 2.3, 我们区分两种子情形:

子情形 2.2.1 存在点列 $\{z'_n\}$ 趋于 z_0 使得 $f_n(z'_n) = \infty$.

此时有

$$R \circ f_n(z'_n) - \alpha(z_0) = (f_n(z'_n) - \beta_0)^p H(f_n(z'_n)) = 0.$$

在 $U^0(z_0, r)$ 内, $f_n(z) \rightarrow I(z)$ 按球面距离一致收敛.

再分两种子情形:

子情形 2.2.1.1 $I(z) \equiv \beta_0$.

于是在 $U^0(z_0, r)$ 内, $R \circ f_n(z) - \alpha(z_0) \rightarrow \infty$ 按球面距离一致收敛.

对所有 $z \in \partial U(z_0, \delta)$ 和足够大的 n , (3.4) 成立. 注意到 $R \circ f_n(z'_n) - \alpha(z_0) = 0$ 以及 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 与 $R \circ f_n(z) - \alpha(z_0)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内的极点一样, Rouché 定理^[14] 说明我们的断言成立.

子情形 2.2.1.2 $I(z) \neq \beta_0$.

若 $I(z) \neq \infty$, 则 $I(z)$ 在 $U^0(z_0, r)$ 内亚纯. 则存在 $\delta \in (0, r)$ 和 $\epsilon > 0$ 使得 $|\alpha(z) - \alpha(z_0)| < \epsilon$, 其中 $z \in U(z_0, \delta)$ 以及 $|R \circ I(z) - \alpha(z_0)| > 2\epsilon$, $z \in \partial U(z_0, \delta)$. 于是对足够大的 n , $|R \circ f_n(z) - \alpha(z_0)| > \epsilon$. 因此 (3.4) 成立, 其中 $z \in \partial U(z_0, \delta)$. Rouché 定理^[14] 告诉我们, 函数 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 和 $R \circ f_n(z) - \alpha(z_0)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内的零点与极点的个数之差是相等的. 注意到 $R \circ f_n(z'_n) - \alpha(z_0) = 0$ 以及 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 与 $R \circ f_n(z) - \alpha(z_0)$ 在 $U(z_0, \delta)$ 内的极点一样, 可知我们的断言成立.

若 $I(z) \equiv \infty$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R \circ f_n(z) \rightarrow \alpha(z_0)$, 其中 $z \in |z - z_0| = r$. 因此对足够大的 n 和 $|z - z_0| = r$, (3.5) 式成立. Rouché 定理^[14] 告诉我们, 函数 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 $U(z_0, r)$ 内的零点与极点的个数之差是相等的. 现由 (3.2) 知, 在 $U(z_0, r)$ 内, $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 有至少一个零点, 且无极点, $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 有至少一个极点. 从而可知, $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 在 $U(z_0, r)$ 内有至少两个零点, 用 z_n 表示其中之一, 即可得知, 存在点列 $z_n \in U(z_0, r)$ 使得 $R \circ f_n(z_n) - \alpha(z_n) = 0$. 断言成立.

子情形 2.2.2 若子情形 2.2.1 不成立, 则 $\{f_n(z)\}$ 在 $U(z_0, r)$ 内解析.

由于 $\{f_n(z)\}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 2.3 知, 存在子函数列, 仍记为 $\{f_n(z)\}$, 使得

$$f_n(z) \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

在 $U^0(z_0, r)$ 内按球面距离内闭一致收敛, 在 z_0 处不正规.

从 (3.6) 与假设条件容易得到 $R(\infty) = \alpha(z_0)$.

由于 $\{f_n(z)\}$ 在 $U(z_0, r)$ 上不正规, 据引理 2.4 可知, 对充分大的 n , $f_n(z)$ 在 $U(z_0, r)$ 内取值 β_0 . 于是 $R \circ f_n$ 在 $U(z_0, r)$ 内至少有一个极点. 这样当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R \circ f_n(z) \rightarrow \alpha(z_0)$, 其中 $|z - z_0| = r$. 因此对很大的 n 和 $|z - z_0| = r$, (3.5) 成立. 由 Rouché 定理^[14] 可知, 函数 $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 和 $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 在 $U(z_0, r)$ 内的零点与极点的个数之差是相等的. 现在 $U(z_0, r)$ 内, $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ 有至少一个零点, 且无极点, $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 有至少一个极点. 从而可知, $R \circ f_n(z) - \alpha(z)$ 在 $U(z_0, r)$ 内有至少两个零点,

用 z_n 表示其中之一, 即可得知, 存在点列 $z_n \in U(z_0, r)$ 使得 $R \circ f_n(z_n) - \alpha(z_n) = 0$. 此情形断言也成立.

至此在各种情形下, 断言均成立.

根据断言和情形 1 的类似推理, 对充分大的 n , 可得 $z_n = z_0$. 因为

$$R(z) - \alpha(z_0) = (z - \beta_0)^p H(z),$$

所以

$$\begin{aligned} R \circ f_n(z) - \alpha(z) &= (f_n(z) - \beta_0)^p H(f_n(z)) - (\alpha(z) - \alpha(z_0)), \\ (f_n(z_0) - \beta_0)^p H(f_n(z_0)) &= R \circ f_n(z_0) - \alpha(z_0) = 0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R \circ f_n(z) - \alpha(z) &= (z - z_0)^k [(z - z_0)^{lp-k} h_n(z) - \beta(z)], \quad \text{若 } lp > k; \\ R \circ f_n(z) - \alpha(z) &= (z - z_0)^{lp} [h_n(z) - (z - z_0)^{k-lp} \beta(z)], \quad \text{若 } lp < k, \end{aligned}$$

其中 $h_n(z), \beta(z)$ 亚纯, 并且 $h_n(z_0) \neq 0, \beta(z_0) \neq 0$.

设

$$\begin{aligned} H_n(z) &:= (z - z_0)^{lp-k} h_n(z) - \beta(z), \quad \text{若 } lp > k; \\ H_n(z) &:= h_n(z) - (z - z_0)^{k-lp} \beta(z), \quad \text{若 } lp < k. \end{aligned}$$

于是 $H_n(z_0) = -\beta(z_0) \neq 0$ 或 $H_n(z_0) = h_n(z_0) \neq 0$. 注意到 $lp \neq k$, 立刻得知 $\{H_n(z)\}$ 是亚纯函数族且在 $U^0(z_0, r)$ 上正规, 在 z_0 处不正规.

类似于前面的推理可知, 存在点列 $z_n^* \in U(z_0, r)$ 使得 $z_n^* \rightarrow z_0$ 且 $H_n(z_n^*) = 0$. 明显地, $z_n^* \neq z_0$ 且

$$R \circ f_n(z_n^*) - \alpha(z_n^*) = 0.$$

注意到 $R \circ f_n(z)$ 与 $R \circ f_m(z)$ 分担 $\alpha(z)$ IM, 对每个 m , 立刻得到

$$R \circ f_m(z_n^*) - \alpha(z_n^*) = 0.$$

于是令 $n \rightarrow \infty$, $R \circ f_m(z_0) - \alpha(z_0) = 0$. 因为除去有限多个 f_m 外, $R \circ f_m(\xi) - \alpha(\xi)$ 的零点都没有聚点, 所以 $z_n^* = z_0$. 这矛盾于我们的假设. 从而 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 处正规.

定理 1.1 证毕.

致谢 第一作者有幸参加方明亮教授主持的讨论班, 经常与方明亮教授、杨得贵教授和雷春林博士交流探讨并得到他们的帮助, 在此表示诚挚的谢意. 作者对审稿人的细致评阅和有意义建议以及柴钊编辑的帮助表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Hayman W K. Meromorphic Functions. Oxford: Clarendon Press, 1964
- 2 Yang L. Value Distribution Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- 3 Chang J M, Fang M L, Zalcman L. Composite meromorphic functions and normal families. Proc Royal Society Edinburgh, 2009, 139: 57-72
- 4 Fang M L, Yuan W J. On Rosenbloom's fix-points theorem and related results. J Austral Math Soc Ser A, 2000, 68: 321-333

- 5 Bergweiler W. Fixed points of composite meromorphic functions and normal families. *Proc Royal Soc Edinburgh Sect A Math*, 2004, 134: 653–660
- 6 Hinchliffe J D. Normality and fixpoints of holomorphic functions. *Proc Royal Society Edinburgh. Sect A-Mathematical and Physical Sciences*, 2003, 133: 1335–1339
- 7 袁文俊, 李志荣, 肖冰. 复合解析函数族分担亚纯函数的正规性. *中国科学: 数学*, 2010, 40: 429–436
- 8 Yuan W J, Xiao B, Wu Q F. Composite meromorphic functions and normal families. *Arch Math*, 2011, 96: 435–444
- 9 Fang M L, Hong W. Some results on normal family of meromorphic functions. *Bull Amer Math Soc (Second Series)*, 2000, 23: 143–151
- 10 Zalcman L. A heuristic principle in complex function theory. *Amer Math Monthly*, 1975, 82: 813–817
- 11 Zalcman L. Normal families: new perspectives. *Bull Amer Math Soc*, 1998, 35: 215–230
- 12 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2007
- 13 Clifford E F. Normal families and value distribution in connection with composite functions. *J Math Anal Appl*, 2005, 312: 195–204
- 14 Estermann T. *Complex Numbers and Functions*. London: Athlone-Oxford University Press, 1962

Normal families and composite meromorphic functions

YUAN WenJun, XIAO Bing & LIN JianMing

Abstract In the paper, we study the normality of families of meromorphic functions. We prove the result: Let $\alpha(z)$ be a meromorphic function, $\mathcal{F}$ a family of meromorphic functions in a domain D , and $R(z)$ be a rational function of degree at least 3. If $R \circ f(z)$ and $R \circ g(z)$ share $\alpha(z)$ IM for each pair $f(z), g(z) \in \mathcal{F}$ and one of the following conditions holds: (1) $R(z) - \alpha(z_0)$ has at least three distinct zeros or poles for any $z_0 \in D$; (2) There exists $z_0 \in D$ such that $R(z) - \alpha(z_0) := (z - \beta_0)^p H(z)$ has at most two distinct zeros (or poles) β_0 and suppose that the multiplicities l and k of zeros of $f(z) - \beta_0$ and $\alpha(z) - \alpha(z_0)$ at z_0 , respectively, satisfy $k \neq l|p|$, where $H(z)$ is a rational function and $H(\beta_0) \neq 0, \infty$ and $\alpha(z_0) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and $\alpha(z)$ is nonconstant. Then $\mathcal{F}$ is normal in D . In particular, the result is a kind of generalization of the famous Montel's criterion.

Keywords: composite function, normal family, meromorphic function, share value

MSC(2000): 30D45, 30D35

doi: 10.1360/012011-72