论文

基于非对称量子信道的非局域 N -qubit受控幺正门的网络设计与优化

陈立冰*, 路洪

佛山科学技术学院光电子与物理学系, 佛山 528000

*联系人, E-mail: chlibing2008@163.com

收稿日期: 2016-12-23; 接受日期: 2017-03-16; 网络出版日期: 2017-07-21

广东省自然科学基金(编号: 06029431)资助

摘要 本文提出在非对称量子信道辅助下有效地实现非局域 N -qubit受控幺正门的局域操作方案. 分别设计两个量子网络去实现该非局域门. 方案一用 $(N-2)$ 个对称的qubit-qubit Bell态和一个非对称的qubit-qudit Bell态作为量子信道. 它利用qubit-qudit Bell态中qudit的 $(N-2)$ 个附加能级将 $(N-1)$ 个非局域控制态的多个计算基态“隐藏”起来, 简化了该非局域门的操作. 该方案的缺陷是, qudit的能级和所耗费的1-qudit门随 N 增加. 在不改变网络功能的条件下, 方案二用 $(N-1)$ 个非对称的qubit-qutrit Bell态作为量子信道, 对方案一进行了优化. 该方案分别利用 $(N-1)$ 个qutrit的第3能级仅将 $(N-1)$ 个非局域控制态的某个计算基态“暴露”于随后的操作, 进一步降低了网络的复杂度, 提高了操控速度. 值得注意的是, 两个方案在不使用辅助系统的条件下所需的局域二体门仅为 $(3N-4)$ 个.

关键词 N 能级量子系统, 3能级量子系统, 非局域 N -qubit受控幺正门, 量子网络, 优化

PACS: 03.67.Hk, 03.65.Ta, 03.67.Lx

量子计算是利用量子态的叠加和纠缠特性来实现基于量子物理体系的信息处理过程. 广义地说, 凡是利用各种物理体系来实现这种计算的装置都属于量子计算机. 当今, 人类真正需要的是能够突破经典计算极限的量子计算机. 满足这一要求的量子计算机需要能够相干地操控数以几十计乃至上百的qubit (称二能级量子系统为qubit). 研究表明, 如果能操控的qubit数达到30个左右, 量子计算机的计算能力将超过经典计算机. 美国已启动研制50–80个qubit的离子阱量子计算的计划^[1]. 量子计算, 一方面为我们解决一些经典

计算感到棘手的计算问题提供新的思路, 另一方面也促使我们回过头来研究量子物理的基本问题, 其两者任一者的突破都将极大地改变人类未来的生活.

目前, 量子计算面临的主要挑战是解决计算系统的可扩展性问题. 虽然很多物理体系是可扩展的, 不过无论采用何种系统, 目前实验上可独立操作的qubit数目被限制在10个左右^[2]. 因此, 仅依靠单一的物理系统来完成复杂的量子计算任务是相当困难的. 该问题可借助量子网络获得解决^[2–5]. 量子网络由量子信道和量子节点组成, 每个节点由十几个甚至几个qubit构

引用格式: 陈立冰, 路洪. 基于非对称量子信道的非局域 N -qubit受控幺正门的网络设计与优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 120301
Chen L B, Lu H. Quantum networks for implementing efficiently a nonlocal N -qubit controlled unitary gate via non-symmetric quantum channels: Designing and optimizing (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 120301, doi: [10.1360/SSPMA2016-00541](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00541)

成, 用于存储和处理量子信息, 而量子信道则用于各节点间的信息传输. 量子网络有许多与经典网络完全不同的鲜明特性. 例如, 它可获得的态空间随着节点的个数呈指数式增长、各量子节点可通过量子信道实现长程相互作用、各量子节点间具有非局域的关联等^[2,5]. 量子网络的重要应用之一是实现分布式量子计算^[6]. 分布式量子计算可协调若干计算节点来处理复杂的量子计算. 在目前量子计算机的可扩展性遭遇阻碍的情况下, 这无疑是绕过这一障碍的可行途径.

为执行分布量子计算, 需耦合各计算节点的qubit, 即需对位于不同节点的qubit实施远程或非局域量子

么正操作. 这可在局域操作、经典通信和共享纠缠(Local Operations, Classical Communication and Shared Entanglement, LOCCSE)辅助下实现. 如何用最少的LOCCSE来完成对不同节点的qubit实施量子么正操作是关键且基本的问题.

“若 $C_1, \dots, C_{N-1}$ 为真, 则 T 亦为真”. 不论是经典计算还是量子计算, 这类 $(N-1)$ 个控制端, 一个靶端的运算都是计算中极其重要的运算之一. 设有 N 个qubit, V 为1-qubit的么正变换, 则 N -qubit受控么正操作 $U_{C_1 \dots C_{N-1}-V}(C_1, \dots, C_{N-1}; T)$ 定义为

$$U_{C_1 \dots C_{N-1}-V}(C_1, \dots, C_{N-1}; T) = \sum_{\substack{c_1, \dots, c_{N-1}=0 \\ (c_1 \dots c_{N-1}=0)}}^1 \left(|c_1 \dots c_{N-1}\rangle_{C_1 \dots C_{N-1}} |t\rangle_T \langle c_1 \dots c_{N-1}|_{C_1 \dots C_{N-1}} \langle t|_T \right) + |1 \dots 1\rangle_{C_1 \dots C_{N-1}} (V|t\rangle_T) \langle 1 \dots 1|_{C_1 \dots C_{N-1}} \langle t|_T. \quad (1)$$

当 $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 时为 N -qubit的Toffoli门. N -qubit的受控么正操作是量子算法^[7,8]、量子傅里叶变换^[9]、量子纠错^[10-12]等的基元. 3-qubit的Toffoli门已在线性光学^[13]、核磁共振^[11]、离子阱^[14]等系统中实现. 但到目前为止, 实验上还未能实现 $N>3$ 的 N -qubit受控么正操作.

关于在LOCCSE辅助下非局域 N -qubit的受控么正门的局域实现问题, 目前国内外已有一些相关工作并取得了不少有意义的结果^[15-21]. 显然, 它可通过平庸的 $2(N-1)$ 向量子隐形传态方法来完成, 但该方法需要较多的LOCCSE资源. 2000年, Eisert等人^[15]首先研究了有效地实现该非局域门的问题, 他们证明了在 $(N-1)$ 个对称qubit-qubit Bell态的辅助下, 可用一个局域 N -qubit的受控门, $(N-1)$ 个局域CNOT门^[9], $(N-1)$ 个 X 或 Z 门^[9], 各执行 $(N-1)$ 次向基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 和向基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (即 $|\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle \pm |1\rangle)$)的正交投影测量(分别用 M_z 和 M_x 表示)实现该非局域门. 该方案的缺陷是需在靶端施一局域 N -qubit受控门. 为使操作成为可行, 需将该 N -qubit门转化为若干个1-qubit和2-qubit普适量子逻辑门的先后作用. 2004年, Shende等人^[22]已证明构建一任意的 N -qubit量子门需 $\Omega(4^n)$ 个2-qubit CNOT门和若干个1-qubit门. 随后, Möttönen等人^[23]和

Shende等人^[24]分别给出了 N -qubit量子门的具体构造方案, 所需的CNOT门均少于 $\Omega(4^n)$. 此外, 若不采用CNOT门, 在光学量子计算系统中, 可以使用更少的2-qubit门来实现 N -qubit量子门^[25]. 对 N -qubit Toffoli门, Barenco等人^[26]证明在不使用辅助系统时, 可用 $\Theta(n^2)$ 个CNOT门和若干1-qubit门实现; 若允许使用辅助系统, 则只需要 $(12N-23)$ 个CNOT门和 $20(N-2)$ 个1-qubit门^[9]. 2011年, 本课题组^[16]对Eisert等人的方案进行了优化, 通过在靶端引入辅助的qudit (称 $N(\geq 3)$ 能级量子系统为qudit; 也称3能级量子系统为qutrit, 4能级量子系统为ququit), 降低了网络的复杂度, 弥补了Eisert等人设计方法的不足.

本文进一步优化文献^[15,16]的方案. 给出基于非对称Bell态的非局域 N -qubit受控门的局域操作方案, 设计两个量子网络去实现该非局域门.

1 基于 $(N-2)$ 个对称的qubit-qubit Bell态和一个非对称的qubit-qudit Bell态的非局域 N -qubit受控门

假定 $Cindy_1, \dots, Cindy_{(N-1)}$, Thomas分别处在网络中 N 个不同的节点. $Cindy_1$ 拥有qubits($C_1, c_1, \dots, Cindy_{(N-1)}$ 拥有qubits(C_{N-1}, c_{N-1}). Thomas拥有qubits($T, t_1, \dots, t_{N-2}$)和

qudit $t_{N-1}^{(N)}$, $C_i (i = 1, \dots, N-1)$, T 分别处于未知的信息态:

$$|C_i\rangle_{C_i} = (\alpha_i|0\rangle + \beta_i|1\rangle)_{C_i}, \quad |T\rangle_T = (a|0\rangle + b|1\rangle)_T. \quad (2)$$

qubit-qubit 对 $(c_j, t_j; j = 1, \dots, N-2)$ 处于对称的 Bell 态:

$$|\varphi\rangle_{c_j t_j}^{b-b} = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)_{c_j t_j}. \quad (3)$$

qubit-qudit 对 $(c_{N-1}, t_{N-1}^{(N)})$ 处于非对称的 Bell 态:

$$|\varphi\rangle_{c_{N-1} t_{N-1}^{(N)}}^{b-d} = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)_{c_{N-1} t_{N-1}^{(N)}}. \quad (4)$$

Cindy₁, ..., Cindy_(N-1), 和 Thomas 想利用 LOCCSE 来实现方程(1)的非局域门:

$$|C_1\rangle_{C_1} \cdots |C_{N-1}\rangle_{C_{N-1}} |T\rangle_T \xrightarrow{\text{LOCCSE}} U_{C_1 \cdots C_{N-1} T} (C_1, \dots, C_{N-1}; T) |C_1\rangle_{C_1} \cdots |C_{N-1}\rangle_{C_{N-1}} |T\rangle_T. \quad (5)$$

首先构建一个能确定性地实现该目标的量子逻辑网络. 该方案(方案一)除了需用 CNOT 门, X 门, Z 门外, 还需用以下几个量子门.

1-qudit 门:

$$P^{m \rightarrow n}(x) = |n\rangle_x \langle m|_x, \quad (m = 0, 1; n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (6)$$

qudit-qubit 受控幺正门:

$$U_{C \rightarrow V}(c^{(N)}; t) = \sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle_{c^{(N)}} \langle n|_t \langle n|_{c^{(N)}} \langle t|_t + |1\rangle_{c^{(N)}} (V|t\rangle_t) \langle 1|_{c^{(N)}} \langle t|_t, \quad (N \text{ 为偶数}), \quad (7a)$$

$$\tilde{U}_{C \rightarrow V}(t^{(N)}; t) = \sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle_{c^{(N)}} \langle n|_t \langle n|_{c^{(N)}} \langle t|_t + |0\rangle_{c^{(N)}} (V|t\rangle_t) \langle 0|_{c^{(N)}} \langle t|_t, \quad (N \text{ 为奇数}). \quad (7b)$$

qubit-qudit CNOT 门:

$$U_{\text{CNOT}}(c; t^{(N)}) = |0\rangle_c \langle t^{(N)}|_t \langle 0|_c \langle t^{(N)}|_t + |1\rangle_c \langle X|t^{(N)}|_t \langle 1|_c \langle t^{(N)}|_t, \\ (X|0\rangle_{t^{(N)}} \rightarrow |1\rangle_{t^{(N)}}, X|1\rangle_{t^{(N)}} \rightarrow |0\rangle_{t^{(N)}}, X|n\rangle_{t^{(N)}} \rightarrow |n\rangle_{t^{(N)}}, (n = 2, \dots, N-1)). \quad (8)$$

先考虑 $N = 4$ 的情形. 此时系统的初态为

$$|\psi\rangle_{\text{初态}} = |C_1\rangle_{C_1} |C_2\rangle_{C_2} |C_3\rangle_{C_3} |T\rangle_T |\varphi\rangle_{c_1 t_1}^{b-b} |\varphi\rangle_{c_2 t_2}^{b-b} |\varphi\rangle_{c_3 t_3}^{b-d}. \quad (9)$$

方案一分成以下几步.

第1步, C_3 -T 操作. Cindy₃ 依次对 (C_3, c_3) 施一 CNOT

门 $U_{\text{CNOT}}(C_3; c_3)$, 对 c_3 执行测量 $(M_Z)_{c_3}$, 将测量结果告诉 Thomas. Thomas 据 Cindy₃ 的测量结果 $|0\rangle_{c_3}/|1\rangle_{c_3}$ 对 ququit $t_3^{(4)}$ 施操作 $I_{t_3^{(4)}}/X_{t_3^{(4)}}$. 经 C_3 -T 操作后, 系统的初态 $|\psi\rangle_{\text{初态}}$ 塌缩为态 $|\psi\rangle_1$. 该过程可表示为

$$|\psi\rangle_{\text{初态}} \xrightarrow{(I_{t_3^{(4)}}/X_{t_3^{(4)}})(M_Z)_{c_3} U_{\text{CNOT}}(C_3; c_3)} |\psi\rangle_1, \\ |\psi\rangle_1 = (1/\sqrt{2})(\alpha_3|00\rangle_{C_3 c_3} + \beta_3|11\rangle_{C_3 c_3}) |C_1\rangle_{C_1} |C_2\rangle_{C_2} |T\rangle_T |\varphi\rangle_{c_1 t_1}^{b-b} |\varphi\rangle_{c_2 t_2}^{b-b}. \quad (10)$$

此时, 控制3端的量子态 $|C_3\rangle_{C_3}$ 已与靶端 $t_3^{(4)}$ 的量子态 $|t_3^{(4)}\rangle$ 产生纠缠.

第2步, C_2 -T 操作. 首先, Cindy₂ 依次对 (C_2, c_2) 施一 $U_{\text{CNOT}}(C_2; c_2)$ 门, 对 c_2 执行测量 $(M_Z)_{c_2}$, 将测量结果告诉 Thomas. Thomas 据 Cindy₂ 的测量结果 $|0\rangle_{c_2}/|1\rangle_{c_2}$ 对 qubit t_2 施操作 I_{t_2}/X_{t_2} . 接着, Thomas 对 $t_3^{(4)}$ 施方程(6)的操作 $P^{0 \rightarrow 2}(t_3^{(4)})$ 和对

$(t_2, t_3^{(4)})$ 施方程(8)的 $U_{\text{CNOT}}(t_2; t_3^{(4)})$ 门. 得到

$$|\psi\rangle_1 \xrightarrow{U_{\text{CNOT}}(t_2; t_3^{(4)})P^{0 \rightarrow 2}(t_3^{(4)})(I_{t_2/X_{t_2}})(M_Z)_{c_2} U_{\text{CNOT}}(C_2; c_2)} |\psi\rangle_2,$$

$$|\psi\rangle_2 = (1/\sqrt{2})^2 \left[\alpha_2 |00\rangle_{C_2} (\alpha_3 |02\rangle + \beta_3 |11\rangle)_{C_3^{(4)}} + \beta_2 |11\rangle_{C_2} (\alpha_3 |02\rangle + \beta_3 |10\rangle)_{C_3^{(4)}} \right] |C_1\rangle_{C_1} |T\rangle_T |\varphi\rangle_{c_1 t_1}^{b-b}. \quad (11)$$

这里, 操作 $(I_{t_2/X_{t_2}})(M_Z)_{c_2} U_{\text{CNOT}}(C_2; c_2)$ 使控制2端的量子态 $|C_2\rangle_{C_2}$ 与靶端 $t_2^{(4)}$ 的量子态 $|t_2^{(4)}\rangle$ 产生纠缠. 操作 $P^{0 \rightarrow 2}(t_3^{(4)})$ 将与 $|0\rangle_{C_3}$ 纠缠的 $|0\rangle_{t_3^{(4)}}$ 态“隐藏”起来, 使后续的操作 $U_{\text{CNOT}}(t_2; t_3^{(4)})$ 仅对 $|1\rangle_{t_3^{(4)}}$ 态起作用.

第3步, C_1 -T操作. C_1 -T操作与第2步所示的操作相同, 只是 $C_1 \rightarrow C_2$, $c_1 \rightarrow c_2$, $t_1 \rightarrow t_2$, $P^{1 \rightarrow 3}(t_3^{(4)}) \rightarrow P^{0 \rightarrow 2}(t_3^{(4)})$, $U_{\text{CNOT}}(t_1; t_3^{(4)}) \rightarrow U_{\text{CNOT}}(t_2; t_3^{(4)})$. 经 C_1 -T操作后,

$$|\psi\rangle_2 \xrightarrow{U_{\text{CNOT}}(t_1; t_3^{(4)})P^{1 \rightarrow 3}(t_3^{(4)})(I_{t_1/X_{t_1}})(M_Z)_{c_1} U_{\text{CNOT}}(C_1; c_1)} |\psi\rangle_3,$$

$$|\psi\rangle_3 = (1/\sqrt{2})^3 \left(\lambda_0 |000002\rangle + \lambda_1 |000013\rangle + \lambda_2 |001102\rangle + \lambda_3 |001110\rangle + \lambda_4 |110002\rangle + \lambda_5 |110013\rangle + \lambda_6 |111102\rangle + \lambda_7 |111111\rangle \right)_{C_1 C_2 C_3^{(4)}} |T\rangle_T. \quad (12)$$

其中, $\lambda_j (j=0, 1, \dots, 7)$ 与 $(\alpha_i, \beta_i; i=1, 2, 3)$ 有关, 如 $\lambda_3 = \alpha_1 \beta_2 \beta_3$.

同理, 操作 $(I_{t_1/X_{t_1}})(M_Z)_{c_1} U_{\text{CNOT}}(C_1; c_1)$ 使 $|C_1\rangle_{C_1}$ 与 $|t_1^{(4)}\rangle$ 纠缠; 操作 $P^{1 \rightarrow 3}(t_3^{(4)})$ 将与 $|1\rangle_{C_3}$ 纠缠的 $|1\rangle_{t_3^{(4)}}$ 态“隐藏”起来, 使操作 $U_{\text{CNOT}}(t_1; t_3^{(4)})$ 仅对 $|0\rangle_{t_3^{(4)}}$ 态起作用.

至此, 我们已利用ququit $t_3^{(4)}$ 的能级 $|2\rangle_{t_3^{(4)}}$ 和 $|3\rangle_{t_3^{(4)}}$ 成

功地将3个非局域控制态 $|C_1\rangle_{C_1} |C_2\rangle_{C_2} |C_3\rangle_{C_3}$ 的计算基态 $|000\rangle_{C_1 C_2 C_3}$, $|010\rangle_{C_1 C_2 C_3}$, $|100\rangle_{C_1 C_2 C_3}$, $|110\rangle_{C_1 C_2 C_3}$, $|001\rangle_{C_1 C_2 C_3}$, $|011\rangle_{C_1 C_2 C_3}$, $|101\rangle_{C_1 C_2 C_3}$ “隐藏”起来, 仅使 $|111\rangle_{C_1 C_2 C_3}$ 参与第4步的操作.

第4步, T操作. 经Thomas对 $(t_3^{(4)}, T)$ 施方程(7a)的局域门后,

$$|\psi\rangle_3 \xrightarrow{U_{C-T}(t_3^{(4)}, T)} |\psi\rangle_4,$$

$$|\psi\rangle_4 = (1/\sqrt{2})^3 \left[\left(\lambda_0 |000002\rangle + \lambda_1 |000013\rangle + \lambda_2 |001102\rangle + \lambda_3 |001110\rangle + \lambda_4 |110002\rangle + \lambda_5 |110013\rangle + \lambda_6 |111102\rangle \right)_{C_1 C_2 C_3^{(4)}} |T\rangle_T + \lambda_7 |111111\rangle_{C_1 C_2 C_3^{(4)}} (V|T\rangle_T) \right]. \quad (13)$$

此时, 非局域门 $U_{C_1 C_2 C_3 - V}(C_1, C_2, C_3; T)$ 已编码在复合系统 $(C_1, C_2, C_3, t_1, t_2, t_3^{(4)}, T)$ 中.

第5步, T- C_1 操作. Thomas依次对 $(t_1, t_3^{(4)})$ 施 $U_{\text{CNOT}}(t_1; t_3^{(4)})$ 门, 对 $t_3^{(4)}$ 施操作 $P^{3 \rightarrow 1}(t_3^{(4)})$, 对 t_1 执行测量 $(M_X)_{t_1}$, 将结果告诉Cindy₁. Cindy₁据Thomas的测量结果 $|+\rangle_{t_1}, |-\rangle_{t_1}$ 对粒子 C_1 施操作 $I_{C_1/Z_{C_1}}$ 就可使 $|\psi\rangle_4$ 演变为

$$|\psi\rangle_4 \xrightarrow{(I_{C_1/Z_{C_1}})(M_X)_{t_1} P^{3 \rightarrow 1}(t_3^{(4)}) U_{\text{CNOT}}(t_1; t_3^{(4)})} |\psi\rangle_5,$$

$$|\psi\rangle_5 = (1/\sqrt{2})^4 \left[(\lambda_0|0000\rangle + \lambda_1|0001\rangle + \lambda_2|0110\rangle + \lambda_3|0111\rangle + \lambda_4|1000\rangle + \lambda_5|1001\rangle + \lambda_6|1110\rangle + \lambda_7|1111\rangle)_{C_1 C_2 C_3}^{(4)} |T\rangle_T + \lambda_7 |1111\rangle_{C_1 C_2 C_3}^{(4)} (V|T\rangle_T) \right]. \quad (14)$$

第6步, T- C_2 操作. T- C_2 操作与第5步的T- C_1 操作相同, 只是 $t_2 \rightarrow t_1$, $C_2 \rightarrow C_1$, $P^{2 \rightarrow 0}(t_3^{(4)}) \rightarrow P^{3 \rightarrow 1}(t_3^{(4)})$, $U_{\text{CNOT}}(t_2; t_3^{(4)}) \rightarrow U_{\text{CNOT}}(t_1; t_3^{(4)})$. 经此操作后,

$$|\psi\rangle_5 \xrightarrow{(I_{C_2/Z_{C_2}})(M_X)_{t_2} P^{2 \rightarrow 0}(t_3^{(4)}) U_{\text{CNOT}}(t_2; t_3^{(4)})} |\psi\rangle_6,$$

$$|\psi\rangle_6 = (1/\sqrt{2})^5 \left[(\lambda_0|0000\rangle + \lambda_1|0011\rangle + \lambda_2|0100\rangle + \lambda_3|0111\rangle + \lambda_4|1000\rangle + \lambda_5|1011\rangle + \lambda_6|1100\rangle)_{C_1 C_2 C_3}^{(4)} |T\rangle_T + \lambda_7 |1111\rangle_{C_1 C_2 C_3}^{(4)} (V|T\rangle_T) \right]. \quad (15)$$

最后, 第7步, T- C_3 操作. Thomas对 $t_3^{(4)}$ 执行测量 $(M_X)_{t_3^{(4)}}$ 并将结果 $|+\rangle_{t_3^{(4)}}|-\rangle_{t_3^{(4)}}$ 告诉Cindy₃, Cindy₃据此结果对粒子 C_3 施操作 $I_{C_3/Z_{C_3}}$ 就可获得目标态:

$$|\psi\rangle_6 \xrightarrow{(I_{C_3/Z_{C_3}})(M_X)_{t_3^{(4)}}} |\psi\rangle_{\text{目标态}},$$

$$|\psi\rangle_{\text{目标态}} = (1/\sqrt{2})^6 \left[(\lambda_0|000\rangle + \lambda_1|001\rangle + \lambda_2|010\rangle + \lambda_3|011\rangle + \lambda_4|100\rangle + \lambda_5|101\rangle + \lambda_6|110\rangle)_{C_1 C_2 C_3} |T\rangle_T + \lambda_7 |111\rangle_{C_1 C_2 C_3} (V|T\rangle_T) \right] \quad (16)$$

$$= (1/\sqrt{2})^6 U_{C_1 C_2 C_3 \rightarrow V}(C_1, C_2, C_3; T) |C_1\rangle_{C_1} |C_2\rangle_{C_2} |C_3\rangle_{C_3} |T\rangle_T.$$

方案的第5-7步为解码过程. 方案的成功概率为 $P = (1/\sqrt{2})^{6 \times 2} \times 2^6 = 1$.

方案一可推广到任意 N 的非局域 $\cap U_{C_1 \cdots C_{N-1} \rightarrow V}(C_1, \cdots, C_{N-1}; T)$. 此时系统的初态为

$$|\psi\rangle_{\text{初态}} = \bigotimes_{i=1}^{N-1} |C_i\rangle_{C_i} |T\rangle_T \bigotimes_{i=1}^{N-2} |\varphi\rangle_{C_i C_{i+1}}^{b-b} |\varphi\rangle_{C_{N-1} C_N}^{b-d}. \quad (17)$$

方案第1- N 步为编码过程, 第 $(N+1)$ - $(2N-1)$ 步为解码过程. 编码过程按以下步骤演变.

第1步:

$$|\psi\rangle_{\text{初态}} \xrightarrow{(I_{t_{N-1}^{(N)}/X} t_{N-1}^{(N)})(M_Z)_{C_{N-1}} U_{\text{CNOT}}(C_{N-1}; C_{N-1})} |\psi\rangle_1. \quad (18)$$

第2- $(N-1)$ 步的操作均相似, 只是注意对 $t_{N-1}^{(N)}$ 的操作 $P^{m \rightarrow n}$ 应依次为 $P^{0 \rightarrow 2}$, $P^{1 \rightarrow 3}$, $\cdots$, $P^{0 \rightarrow (N-1)}$ (N 为奇数) 或 $P^{1 \rightarrow (N-1)}$ (N 为偶数):

$$|\psi\rangle_1 \xrightarrow{U_{\text{CNOT}}(t_{N-2}^{(N)} t_{N-1}^{(N)}) P^{0 \rightarrow 2}(t_{N-1}^{(N)}) (I_{t_{N-2}^{(N)}/X} t_{N-2}^{(N)})(M_Z)_{C_{N-2}} U_{\text{CNOT}}(C_{N-2}; C_{N-2})} |\psi\rangle_2,$$

$$\cdots \quad (19)$$

...

$$|\psi\rangle_{N-2} \xrightarrow{U_{\text{CNOT}}(t_{N-1}^{(N)} t_{N-1}^{(N)}) P^{0 \rightarrow (N-1)}(t_{N-1}^{(N)}) (N \text{ 为奇数}) (I_{t_{N-1}^{(N)}/X} t_{N-1}^{(N)})(M_Z)_{C_1} U_{\text{CNOT}}(C_1; C_1)} |\psi\rangle_{N-1} \quad (20a)$$

或

$$|\psi\rangle_{N-2} \xrightarrow{U_{\text{CNOT}}(t_{N-1}^{(N)} t_{N-1}^{(N)}) P^{1 \rightarrow (N-1)}(t_{N-1}^{(N)}) (N \text{ 为偶数}) (I_{t_{N-1}^{(N)}/X} t_{N-1}^{(N)})(M_Z)_{C_1} U_{\text{CNOT}}(C_1; C_1)} |\psi\rangle_{N-1}. \quad (20b)$$

第 N 步:

$$|\psi\rangle_{N-1} \xrightarrow{\tilde{U}_{C \rightarrow V}(t_{N-1}^{(N)}; T) (N \text{ 为奇数})} |\psi\rangle_N \quad (21a)$$

或

$$|\psi\rangle_{N-1} \xrightarrow{U_{C \rightarrow V}(t_{N-1}^{(N)}; T) (N \text{ 为偶数})} |\psi\rangle_N. \quad (21b)$$

解码过程. 第 $(N+1)$ - $(2N-1)$ 步的操作均相似, 只

是注意对 $t_{N-1}^{(N)}$ 的操作 $P^{m \rightarrow n}$ 应依次为 $P^{(N-1) \rightarrow 0}$ (N 为奇数) 或 $P^{(N-1) \rightarrow 1}$ (N 为偶数), $\dots, P^{3 \rightarrow 1}, P^{2 \rightarrow 0}$:

$$|\psi\rangle_N \xrightarrow{(I_{C_1/Z_{C_1}})(M_X)_{t_1} P^{(N-1) \rightarrow 0} (t_{N-1}^{(N)})_{(N \text{ 为奇数})} U_{\text{CNOT}}(t_1; t_{N-1}^{(N)})} |\psi\rangle_{N+1}, \quad (22a)$$

或

$$|\psi\rangle_N \xrightarrow{(I_{C_1/Z_{C_1}})(M_X)_{t_1} P^{(N-1) \rightarrow 1} (t_{N-1}^{(N)})_{(N \text{ 为偶数})} U_{\text{CNOT}}(t_1; t_{N-1}^{(N)})} |\psi\rangle_{N+1}, \quad (22b)$$

...

$$|\psi\rangle_{2(N-1)-1} \xrightarrow{(I_{C_{N-2}/Z_{C_{N-2}}})(M_X)_{t_{N-2}} P^{2 \rightarrow 0} (t_{N-1}^{(N)})_{(N \text{ 为奇数})} U_{\text{CNOT}}(t_{N-2}; t_{N-1}^{(N)})} |\psi\rangle_{2(N-1)}. \quad (23)$$

最后, 第 $(2N-1)$ 步:

$$|\psi\rangle_{2(N-1)} \xrightarrow{(I_{C_{N-1}/Z_{C_{N-1}}})(M_X)_{t_{N-1}}} |\psi\rangle_{\text{目标态}} \\ = U_{C_1 \dots C_{N-1} V}(C_1, \dots, C_{N-1}; T) |C_1\rangle_{C_1} \dots |C_{N-1}\rangle_{C_{N-1}} |T\rangle_T. \quad (24)$$

该过程耗费 $(3N-5)$ 个CNOT门, 1个qudit-qubit受控么正门, $(2N-4)$ 个1-qudit门, $(N-1)$ 个 X 或 Z 门, $2(N-2)$ 个1-qudit门, 各 $(N-1)$ 次 M_Z 和 M_X 测量. 与仅限于使用对称量子信道的方案相比^[15,16], 该方案不需引入辅助系统, 仅需将 $(N-1)$ 个qubit-qubit Bell态中的一个变为qubit-qudit Bell态即可实现方案的优化. 例如, 对 $N=4$ 的非局域Toffoli门, Eisert的方案需25个CNOT门和2个辅助的qubit^[9,15], 而方案一仅需8个CNOT门且不需辅助的qubit或qudit.

方案一有两点不足: 一是qubit-qudit Bell态中的qudit为 N 态粒子, 使一个 N 较大的 N 态物理系统保持足够长的相干时间有困难; 二是靶端所需的1-qudit门随 N 线性增加. 方案二能有效地改进这些不足.

2 基于 $(N-1)$ 个非对称qubit-qutrit Bell态的非局域 N -qubit受控门

仍假定Cindy₁, $\dots$, Cindy _{$(N-1)$} 分别拥有 $(C_1, c_1), \dots$,

(C_{N-1}, c_{N-1}) . 但Thomas拥有1个qubit T 和 $(N-1)$ 个qutrits $(t_1^{(3)}, \dots, t_{N-1}^{(3)})$. qubit-qutrit对 $(c_i, t_i^{(3)}; i=1, \dots, N-1)$ 处于如下的qubit-qutrit Bell态:

$$|\phi\rangle_{c_i t_i^{(3)}} = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)_{c_i t_i^{(3)}}. \quad (25)$$

方案二需用以下几个量子门.

1-qutrit门:

$$P^{m \rightarrow n}(x) = |n\rangle_x \langle m|_x, (n, m = 1, 2). \quad (26)$$

2-qutrit的条件交换门:

$$U^{i \leftrightarrow j}(x, y) = |ij\rangle_{xy} \langle ij|_{xy}, (i, j = 1, 2). \quad (27)$$

qutrit-qubit受控么正门:

$$U_{C-V}(c^{(3)}; t) = \sum_{n=0}^1 |n\rangle_{c^{(3)}} |t\rangle_t \langle n|_{c^{(3)}} \langle t|_t \\ + |2\rangle_{c^{(3)}} (V|t\rangle_t) \langle 2|_{c^{(3)}} \langle t|_t. \quad (28)$$

以及CNOT门, X 门, Z 门.

仍以 $N=4$ 为例说明该操作方案. 系统的初态为

$$|\psi\rangle_{\text{初}} = |C_1\rangle_{C_1} |C_2\rangle_{C_2} |C_3\rangle_{C_3} |T\rangle_T |\phi\rangle_{c_1 t_1^{(3)}} |\phi\rangle_{c_2 t_2^{(3)}} |\phi\rangle_{c_3 t_3^{(3)}}. \quad (29)$$

方案分成以下几步.

第1步, C_1 - T 操作. 首先, Cindy₁和Thomas分别对粒子 $(C_1; c_1)$ 和 $t_1^{(3)}$ 施操作 $U_{\text{CNOT}}(C_1; c_1), (M_Z)_{c_1}, (I_{t_1^{(3)}}/X_{t_1^{(3)}})$, 使qubit C_1 的量子态 $|C_1\rangle_{C_1}$ 与qutrit $t_1^{(3)}$ 的量子态 $|t_1^{(3)}\rangle$ 产生纠缠. 接着, Thomas对 $t_1^{(3)}$ 施 $P^{1 \rightarrow 2}(t_1^{(3)})$ 门, 使与 $|1\rangle_{c_1}$ 纠缠的 $|2\rangle_{t_1^{(3)}}$ 态“暴露”于第2步的操作 $U^{2 \leftrightarrow 1}(t_1^{(3)}, t_2^{(3)})$. 该过程表示为

$$|\psi\rangle_{\text{初态}} \xrightarrow{P^{1 \rightarrow 2}(t_1^{(3)}) (I_{t_1^{(3)}}/X_{t_1^{(3)}}) (M_Z)_{c_1} U_{\text{CNOT}}(C_1; c_1)} |\psi\rangle_1, \\ |\psi\rangle_1 = (1/\sqrt{2})(\alpha_1|00\rangle_{C_1 t_1^{(3)}} + \beta_1|12\rangle_{C_1 t_1^{(3)}}) |C_2\rangle_{C_2} \\ |C_3\rangle_{C_3} |T\rangle_T |\phi\rangle_{c_2 t_2^{(3)}} |\phi\rangle_{c_3 t_3^{(3)}}. \quad (30)$$

第2步, C_2 - T 操作:

$$|\psi\rangle_1 \xrightarrow{U^{2 \leftrightarrow 1}(t_1^{(3)}, t_2^{(3)}) (I_{t_2^{(3)}}/X_{t_2^{(3)}}) (M_Z)_{c_2} U_{\text{CNOT}}(C_2; c_2)} |\psi\rangle_2, \\ |\psi\rangle_2 = (1/\sqrt{2})(\alpha_1 \alpha_2 |0000\rangle + \alpha_1 \beta_2 |0011\rangle + \beta_1 \alpha_2 |1200\rangle + \beta_1 \beta_2 |1112\rangle)_{C_1 t_1^{(3)} C_2 t_2^{(3)}} |C_3\rangle_{C_3} |T\rangle_T |\phi\rangle_{c_3 t_3^{(3)}}. \quad (31)$$

其中, 操作 $(I_{t_2^{(3)}}/X_{t_2^{(3)}})(M_Z)_{c_2} U_{\text{CNOT}}(C_2; c_2)$ 使控制 2 端的 $|C_2\rangle_{c_2}$ 与靶端的 $|t_2^{(3)}\rangle$ 产生纠缠; 操作 $U^{2 \leftrightarrow 1}(t_1^{(3)}, t_2^{(3)})$ 使与 $|1\rangle_{c_2}$ 纠缠的 $|2\rangle_{t_2^{(3)}}$ 态“暴露”于第 3 步

的操作 $U^{2 \leftrightarrow 1}(t_2^{(3)}, t_3^{(3)})$.

第 3 步, C_3 -T 操作. C_3 -T 操作与 C_2 -T 操作相同, 只是 $C_3 \rightarrow C_2, c_3 \rightarrow c_2, t_3^{(3)} \rightarrow t_2^{(3)}, t_2^{(3)} \rightarrow t_1^{(3)}$:

$$|\psi\rangle_2 \xrightarrow{U^{2 \leftrightarrow 1}(t_2^{(3)}, t_3^{(3)})(I_{t_3^{(3)}}/X_{t_3^{(3)}})(M_Z)_{c_3} U_{\text{CNOT}}(C_3; c_3)} |\psi\rangle_3,$$

$$|\psi\rangle_3 = (1/\sqrt{2})^3 \left(\lambda_0 |000000\rangle + \lambda_1 |000011\rangle + \lambda_2 |001100\rangle + \lambda_3 |001111\rangle + \lambda_4 |120000\rangle + \lambda_5 |120011\rangle + \lambda_6 |111200\rangle + \lambda_7 |111112\rangle \right)_{c_{t_1^{(3)}} c_{t_2^{(3)}} c_{t_3^{(3)}}} |T\rangle_T. \quad (32)$$

显然, $|C_3\rangle_{c_3}$ 已与 $|t_3^{(3)}\rangle$ 纠缠, 与 $|1\rangle_{c_3}$ 纠缠的 $|2\rangle_{t_3^{(3)}}$ 态已“暴露”. 方案二通过利用 3 个 qutrits 的 $|2\rangle_{t_1^{(3)}}, |2\rangle_{t_2^{(3)}}, |2\rangle_{t_3^{(3)}}$ 态成功地仅将非局域计算基态 $|111\rangle_{c_1 c_2 c_3}$ “暴露”于第 4 步的操作中.

第 4 步, T 操作:

$$|\psi\rangle_3 \xrightarrow{U_{C-T}(t_3^{(3)}; T)} |\psi\rangle_4,$$

$$|\psi\rangle_4 = (1/\sqrt{2})^3 \left[\left(\lambda_0 |000000\rangle + \lambda_1 |000011\rangle + \lambda_2 |001100\rangle + \lambda_3 |001111\rangle + \lambda_4 |120000\rangle + \lambda_5 |120011\rangle + \lambda_6 |111200\rangle \right)_{c_{t_1^{(3)}} c_{t_2^{(3)}} c_{t_3^{(3)}}} |T\rangle_T + \lambda_7 |111112\rangle_{c_{t_1^{(3)}} c_{t_2^{(3)}} c_{t_3^{(3)}}} (V|T\rangle_T) \right]. \quad (33)$$

现在, 非局域门 $U_{C_1 C_2 C_3 - V}(C_1, C_2, C_3; T)$ 已编码在复合系统 $(C_1, C_2, C_3, t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, t_3^{(3)}, T)$ 中. 后面几步为解码过程.

第 5 步, $T-C_3$ 操作:

$$|\psi\rangle_4 \xrightarrow{(I_{C_3/Z_{C_3}})(M_X)_{t_3^{(3)}} U^{1 \leftrightarrow 2}(t_2^{(3)}, t_3^{(3)})} |\psi\rangle_5,$$

$$|\psi\rangle_5 = (1/\sqrt{2})^4 \left[\left(\lambda_0 |000000\rangle + \lambda_1 |000011\rangle + \lambda_2 |001100\rangle + \lambda_3 |001111\rangle + \lambda_4 |120000\rangle + \lambda_5 |120011\rangle + \lambda_6 |111200\rangle \right)_{c_{t_1^{(3)}} c_{t_2^{(3)}} c_{t_3^{(3)}}} |T\rangle_T + \lambda_7 |111121\rangle_{c_{t_1^{(3)}} c_{t_2^{(3)}} c_{t_3^{(3)}}} (V|T\rangle_T) \right]. \quad (34)$$

第 6 步, $T-C_2$ 操作. 此步操作与 $T-C_3$ 操作相同, 只是 $t_1^{(3)} \rightarrow t_2^{(3)}, t_2^{(3)} \rightarrow t_3^{(3)}, C_2 \rightarrow C_3$:

$$|\psi\rangle_5 \xrightarrow{(I_{C_2/Z_{C_2}})(M_X)_{t_2^{(3)}} U^{1 \leftrightarrow 2}(t_1^{(3)}, t_2^{(3)})} |\psi\rangle_6,$$

$$|\psi\rangle_6 = (1/\sqrt{2})^5 \left[\left(\lambda_0 |000000\rangle + \lambda_1 |000011\rangle + \lambda_2 |001010\rangle + \lambda_3 |001111\rangle + \lambda_4 |120000\rangle + \lambda_5 |120100\rangle + \lambda_6 |121000\rangle \right)_{c_{t_1^{(3)}} c_{t_2^{(3)}} c_{t_3^{(3)}}} |T\rangle_T + \lambda_7 |121111\rangle_{c_{t_1^{(3)}} c_{t_2^{(3)}} c_{t_3^{(3)}}} (V|T\rangle_T) \right]. \quad (35)$$

最后, 第 7 步. 经 $T-C_1$ 的局域操作后, 完成了解码过程, 确定性地获得目标态:

$$|\psi\rangle_6 \xrightarrow{(I_{C_1/Z_{C_1}})(M_X)_{t_1^{(3)}} U^{2 \leftrightarrow 1}(t_1^{(3)})} |\psi\rangle_{\text{目标态}} = (1/\sqrt{2})^6 U_{C_1 C_2 C_3 - V}(C_1, C_2, C_3; T) |C_1\rangle_{c_1} |C_2\rangle_{c_2} \otimes |C_3\rangle_{c_3} |T\rangle_T. \quad (36)$$

方案二的成功概率也为1. 可将之推广到任意 N 的非局域门 $U_{C_1 \dots C_{N-1} T}(C_1, \dots, C_{N-1}; T)$. 系统的初态为

$$|\psi\rangle_{\text{初态}} = \bigotimes_{i=1}^{N-1} |C_i\rangle_{C_i} |T\rangle_T \bigotimes_{i=1}^{N-1} |\varphi\rangle_{c_i t_i^{(3)}}. \quad (37)$$

方案的第1- N 步为编码过程. 该过程利用 N 个非对称的qubit-qutrit Bell态分别将各控制端的 $|C_1\rangle_{C_1}, \dots, |C_{N-1}\rangle_{C_{N-1}}$ 与靶端的 $|t_1^{(3)}\rangle, \dots, |t_{N-1}^{(3)}\rangle$ 纠缠起来; 利用 $(N-1)$ 个qutrits的第3态 $|2\rangle_{t_1^{(3)}}, \dots, |2\rangle_{t_{N-1}^{(3)}}$ 仅使非局域控制态 $\bigotimes_{i=1}^{N-1} |C_i\rangle_{C_i}$ 的初始计算基态 $|1 \dots 1\rangle_{C_1 C_2 \dots C_{N-1}}$ “暴露”于第 N 步的操作, 优化了编码过程. 该过程表示为

第1步,

$$|\psi\rangle_{\text{初态}} \xrightarrow{P^{1 \rightarrow 2}(t_1^{(3)})(I_{t_1^{(3)}/X} t_1^{(3)})(M_Z)_{c_1} U_{\text{CNOT}}(C_1 c_1)} |\psi\rangle_1. \quad (38)$$

第2- $(N-1)$ 步的操作均相同:

$$|\psi\rangle_1 \xrightarrow{U^{2 \leftrightarrow 1}(t_1^{(3)}, t_2^{(3)})(I_{t_2^{(3)}/X} t_2^{(3)})(M_Z)_{c_2} U_{\text{CNOT}}(C_2 c_2)} |\psi\rangle_2, \quad (39)$$

$$|\psi\rangle_{(2N-1)} \xrightarrow{(I_{C_1/Z} t_1^{(3)})(M_X)_{t_1^{(3)}} P^{2 \rightarrow 1}(t_1^{(3)})} |\psi\rangle_{\text{目标态}} = U_{C_1 \dots C_{N-1} T}(C_1, \dots, C_{N-1}; T) |C_1\rangle_{C_1} \dots |C_{N-1}\rangle_{C_{N-1}} |T\rangle_T. \quad (44)$$

该过程共耗费 $(N-1)$ 个CNOT门, $2(N-2)$ 个2-qutrit条件交换门, 1个qutrit-qubit受控么正门, 2个1-qutrit门, $(N-1)$ 个 X 或 Z 门, 各 $(N-1)$ 次 M_Z 和 M_X 测量. 方案二有如下特点: (1) 在编码和解码过程中, 所有操作只涉及二态或三态系统, 与 N 无关. (2) 在靶端, 方案二用方程(27)的条件交换门 $U^{i \leftrightarrow j}(x, y)$ 代替方案一的CNOT门 $U_{\text{CNOT}}(c; t^{(N)})$. 在一些物理系统中, 操控 $U^{i \leftrightarrow j}(x, y)$ 比操控 $U_{\text{CNOT}}(c; t^{(N)})$ 容易. 例如, Zheng^[27]已证明在量子电动力学(CQED)中, $U^{i \leftrightarrow j}(x, y)$ 门的运算时间仅为 $U_{\text{CNOT}}(c; t^{(N)})$ 门的1/2. (3) 在靶端, 仅需2个1-qutrit门 $P^{m \rightarrow n}(x)$, 与 N 无关. 方案二可用于各种具有三能级结构且有较长相干时间的实际物理体系, 如离子阱体系、超导量子电路等.

3 方案的讨论

对上述两个方案, 我们进行如下讨论.

...

$$|\psi\rangle_{N-2} \xrightarrow{U^{2 \leftrightarrow 1}(t_{N-1}^{(3)})(I_{t_{N-1}^{(3)}/X} t_{N-1}^{(3)})(M_Z)_{c_{N-1}} U_{\text{CNOT}}(C_{N-1} c_{N-1})} |\psi\rangle_{N-1}. \quad (40)$$

第 N 步,

$$|\psi\rangle_{N-1} \xrightarrow{U_{C-N}(t_{N-1}^{(3)} T)} |\psi\rangle_N. \quad (41)$$

第 $(N+1)$ - $(2N-1)$ 步为解码过程. 其中第 $(N+1)$ - $(2N-2)$ 步的操作相同:

$$|\psi\rangle_N \xrightarrow{(I_{C_{N-1}/Z} t_{N-1}^{(3)})(M_X)_{t_{N-1}^{(3)}} U^{1 \leftrightarrow 2}(t_{N-2}^{(3)}, t_{N-1}^{(3)})} |\psi\rangle_{N+1}, \quad (42)$$

...

$$|\psi\rangle_{2(N-1)-1} \xrightarrow{(I_{C_2/Z} t_2^{(3)})(M_X)_{t_2^{(3)}} U^{1 \leftrightarrow 2}(t_1^{(3)}, t_2^{(3)})} |\psi\rangle_{2(N-1)}. \quad (43)$$

最后一步, $(2N-1)$ 步的操作:

(1) 为便于比较, 表1列出了为确定性地实现非局域 N -qubit受控么正门, 本文两个方案和文献[15,16]方案所需的主要物理资源. 表中Bell^{b-b}态表示通常的qubit-qubit Bell态, Bell^{b-d}和Bell^{b-t}分别表示非对称的qubit-qutrit Bell和qubit-qutrit Bell态^[28-35]; $U_{\text{CNOT}}(c; t)$ 表示通常的qubit-qubit CNOT门, $U_{\text{CNOT}}(c; t^{(N)})$ 表示方程(8)所示的qubit-qutrit CNOT门^[13,36-38]; $U_{C-I}(c^{(N)}; t)$ 表示方程(7)所示qutrit-qubit受控么正门^[13,36-38]; $U^{i \leftrightarrow j}(x, y)$ 表示方程(27)所示2-qutrit的条件交换门^[27,28].

显然, 相比Eisert等人^[15]最初提出的方案和本课题组^[16]2011年提出的方案, 本文方案所需的两体操作数量较少, 且不需要辅助系统. 特别是方案二, 用 $2(N-2)$ 个条件交换 $U^{i \leftrightarrow j}(x, y)$ 门代替 $2(N-2)$ 个 $U_{\text{CNOT}}(c; t^{(N)})$ 门, 节省了运算时间^[27]; 且操作所需的附加能级和靶端所需的1-qutrit门均与 N 无关.

(2) 在不使用辅助粒子的条件下, 在靶端, 两个方案均仅需 $(2N-3)$ 个二体门——这是耦合靶端 N 个子系

表 1 为确定性地实现非局域 N -qubit受控幺正门, 本文两个方案和文献[15,16]方案所需的物理资源

Table 1 The physical resources costs of scheme 1, scheme 2, and the schemes in refs. [15,16] for implementing deterministically a nonlocal N -qubit controlled unitary gate

方案	纠缠	N 体操作	两体操作	单体操作	辅助粒子
文献[15]方案	$(N-1)$ 个Bell ^{b-b} 态	1	$(N-1)$ 个 $U_{\text{CNOT}}(c;t)$	$(N-1)$ 个1-qubit门	0
文献[16]方案	$(N-1)$ 个Bell ^{b-b} 态	0	$(N-1)$ 个 $U_{\text{CNOT}}(c;t)$ $(N-1)$ 个 $U_{\text{CNOT}}(c;t^{(N)})$ 1个 $U_{\text{C-V}}(c^{(N)};t)$	$2(N-1)$ 个1-qubit门	1个qudit
本文方案一	$(N-2)$ 个Bell ^{b-b} 态 1个Bell ^{b-d} 态	0	$(N-1)$ 个 $U_{\text{CNOT}}(c;t)$ $2(N-2)$ 个 $U_{\text{CNOT}}(c;t^{(N)})$ 1个 $U_{\text{C-V}}(c^{(N)};t)$	$(N-1)$ 个1-qubit门 $2(N-2)$ 个1-qudit门	0
本文方案二	$(N-1)$ 个Bell ^{b-1} 态	0	$(N-1)$ 个 $U_{\text{CNOT}}(c;t)$ $2(N-2)$ 个 $U^{j \leftrightarrow j}(x,y)$ 1个 $U_{\text{C-V}}(c^{(3)};t)$	$(N-1)$ 个1-qubit门 2个1-qutrit门	0

统至少需要的两体门数目.

(3) 可采用多种方式编码非对称Bell态中的qudit或qutrit^[29-35]. 非对称Bell态在许多实际的物理系统中不难获得. 例如, 可使用频率比特来实现Bell^{b-d}. 假设我们在参量下转换过程中制备了两个频率关联的孪生光子a和b. 通过调节泵浦光的波长, 可以让孪生光子的波长分布在不同的区域, 或者为了使波长分离得更开一些, 可以让a和b分别通过两个波分复用器, 就可制备出频域的qubit-qudit态^[30,35]. 此外, 两个方案涉及的单体和二体操作已在多种物理系统的多种物理过程中实现^[2,13,36-39]. 例如, Nowack等人^[39]已于2007年在同一块半导体量子点器件上用全电学技术实验实现了量子测量、单体和二体量子门的操作等. 因此, 从理论上说, 本文方案所需要的技术在现有的许多物理系统中是可行的.

4 结论

本文讨论了在非对称Bell态辅助下确定性地实

现非局域 N -qubit受控幺正门的操作方案. 分别设计两个量子网络去实现该非局域门. 两个方案均不需引入辅助系统. 方案一仅需将文献[15]中 $(N-1)$ 个qubit-qubit Bell态中的一个变为qubit-qudit Bell态, 就可使用 $(3N-5)$ 个CNOT门, 1个qudit-qubit受控幺正门, $(2N-4)$ 个1-qudit门, $(N-1)$ 个 X 或 Z 门, 各 $(N-1)$ 次 M_Z 和 M_X 测量来实现该非局域的门. 该方案利用非对称Bell态中qudit的 $|2\rangle, |3\rangle, \dots, |N-1\rangle$ 能级, 将 $(N-1)$ 个非局域控制态 $\otimes_{i=1}^{N-1} |C_i\rangle_{C_i}$ 的多个计算基态“隐藏”起来, 简化了非局域门 $U_{C_1 \dots C_{N-1} \rightarrow V}(C_1, \dots, C_{N-1}; T)$ 的编码过程, 降低了网络的复杂度. 该方案的缺陷是, qudit的能级和操作所需的1-qudit门随 N 增加. 在不改变网络功能的条件下, 用 N 个qubit-qutrit Bell态作为量子信道, 对方案一进行了优化. 方案二利用非对称Bell态中 N 个qutrits的第3能级 $|2\rangle_{C_1}, \dots, |2\rangle_{C_{N-1}}$ 仅使非局域控制态 $\otimes_{i=1}^{N-1} |C_i\rangle_{C_i}$ 的某一计算基态“暴露”于随后的操作. 该方案用2个1-qutrit门代替方案一的 $(2N-4)$ 个1-qudit门, 用 $2(N-2)$ 个条件交换门代替方案一靶端的 $2(N-2)$ 个CNOT门, 大大提高了操控速度, 很好地弥补了方案一的不足.

参考文献

- Guo G C, Zhou Z W, Guo G P, et al. Present status and trends of development of quantum computers (in Chinese). *Disci Dev*, 2010, 25: 517–524 [郭光灿, 周正威, 郭国平, 等. 量子计算机的发展现状与趋势. *学科发展*, 2010, 25: 517–524]
- Zhou Z W, Chen W, Sun F W, et al. A survey on quantum information technology (in Chinese). *Chin Sci Bull (Chin Ver)*, 2012, 57: 1498–1525

- [周正威, 陈巍, 孙方稳, 等. 量子信息技术纵览. 科学通报, 2012, 57: 1498–1525]
- 3 Kimble H J. The quantum internet. *Nature*, 2008, 453: 1023–1030, arXiv: [0806.4195](#)
 - 4 Duan L M, Monroe C. Quantum networks with trapped ions. *Rev Mod Phys*, 2010, 82: 1209–1224
 - 5 Ritter S, Nölleke C, Hahn C, et al. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities. *Nature*, 2012, 484: 195–200, arXiv: [1202.5955](#)
 - 6 Cirac J I, Ekert A K, Huelga S F, et al. Distributed quantum computation over noisy channels. *Phys Rev A*, 1999, 59: 4249–4254
 - 7 Shor P W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. In: *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*. New York: IEEE, 1994. 124–134
 - 8 Grover L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 325–328
 - 9 Nielsen M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 171–211
 - 10 Shor P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys Rev A*, 1995, 52: R2493–R2496
 - 11 Cory D G, Price M D, Maas W, et al. Experimental quantum error correction. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 2152–2155
 - 12 Reed M D, DiCarlo L, Nigg S E, et al. Realization of three-qubit quantum error correction with superconducting circuits. *Nature*, 2012, 482: 382–385, arXiv: [1109.4948](#)
 - 13 Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M P, et al. Simplifying quantum logic using higher-dimensional Hilbert spaces. *Nat Phys*, 2009, 5: 134–140, arXiv: [0804.0272](#)
 - 14 Monz T, Kim K, Hänsel W, et al. Realization of the quantum Toffoli gate with trapped ions. *Phys Rev Lett*, 2009, 102: 040501, arXiv: [0804.0082](#)
 - 15 Eisert J, Jacobs K, Papadopoulos P, et al. Optimal local implementation of nonlocal quantum gates. *Phys Rev A*, 2000, 62: 052317
 - 16 Chen L B, Lu H. Improving the local implementation of a nonlocal multi-party quantum Toffoli gate. *Eur Phys J D*, 2011, 61: 745–749
 - 17 Chen L B, Lu H. Nonlocal unambiguous discrimination among N nonorthogonal qudit states lying in a higher-dimensional Hilbert space. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2012, 55: 55–59
 - 18 Huang Y F, Ren X F, Zhang Y S, et al. Experimental teleportation of a quantum controlled-NOT gate. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 240501
 - 19 Zhao N B, Wang A M. Local implementation of nonlocal operations with block forms. *Phys Rev A*, 2008, 78: 014305, arXiv: [0803.2982](#)
 - 20 Chen L B, Lu H. Quantum networks for implementing locally and conclusively a nonlocal qudit Toffoli gate: Designing and optimizing (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2016, 46: 110301 [陈立冰, 路洪. 确定性地实现非局域高维量子Toffoli门的网络设计与优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 110301]
 - 21 Ye M Y, Zhang Y S, Guo G C. Quantum entanglement and quantum operation (in Chinese). *Sci China Ser G-Phys Mech Astron*, 2008, 51: 14–21 [叶明勇, 张永生, 郭光灿. 量子纠缠和量子操作. 中国科学G辑: 物理学 力学 天文学, 2008, 51: 14–21]
 - 22 Shende V V, Markov I L, Bullock S S. Minimal universal two-qubit controlled-NOT-based circuits. *Phys Rev A*, 2004, 69: 062321
 - 23 Möttönen M, Vartiainen J J, Bergholm V, et al. Quantum circuits for general multiqubit gates. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 130502
 - 24 Shende V V, Bullock S S, Markov I L. Synthesis of quantum-logic circuits. *IEEE Trans Comput-Aided Des Integr Circuits Syst*, 2006, 25: 1000–1010
 - 25 Lin Q, He B. Highly efficient processing of multi-photon states. *Sci Rep*, 2015, 5: 12792, arXiv: [1407.5435](#)
 - 26 Barenco A, Bennett C H, Cleve R, et al. Elementary gates for quantum computation. *Phys Rev A*, 1995, 52: 3457–3467
 - 27 Zheng S B. Simplified construction and physical realization of N -qubit controlled phase gates. *Phys Rev A*, 2012, 86: 012326
 - 28 Zheng S B, Guo G C. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 2392–2395
 - 29 Lin Q, He B. Bi-directional mapping between polarization and spatially encoded photonic qutrits. *Phys Rev A*, 2009, 80: 062312, arXiv: [0905.3214](#)
 - 30 Jin R B, Shimizu R, Fujiwara M, et al. Simple method of generating and distributing frequency-entangled qudits. *Quantum Sci Technol*, 2016, 1: 015004
 - 31 Jin R B, Fujiwara M, Shimizu R, et al. Detection-dependent six-photon Holland-Burnett state interference. *Sci Rep*, 2016, 6: 36914, arXiv: [1607.00926](#)
 - 32 Li H, Wang S, Cui J, et al. Quantifying entanglement of arbitrary-dimensional multipartite pure states in terms of the singular values of coefficient matrices. *Phys Rev A*, 2013, 87: 042335, arXiv: [1304.7058](#)
 - 33 Qin W, Wang C, Long G L. High-dimensional quantum state transfer through a quantum spin chain. *Phys Rev A*, 2013, 87: 012339, arXiv: [1304.7060](#)
 - 34 Mair A, Vaziri A, Weihs G, et al. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 2001, 412: 313–316
 - 35 Zhou Z Y, Jiang Y K, Ding D S, et al. Actively switchable nondegenerate polarization-entangled photon-pair distribution in dense wave-division

- multiplexing. *Phys Rev A*, 2013, 87: 045806, arXiv: [1301.5097](#)
- 36 Ionicioiu R, Spiller T P, Munro W J. Generalized Toffoli gates using qudit catalysis. *Phys Rev A*, 2009, 80: 012312
- 37 Bernhard C, Bessire B, Feurer T, et al. Shaping frequency-entangled qudits. *Phys Rev A*, 2013, 88: 032322, arXiv: [1303.6202](#)
- 38 Di Y M, Wei H R. Synthesis of multivalued quantum logic circuits by elementary gates. *Phys Rev A*, 2013, 87: 012325, arXiv: [1302.0056](#)
- 39 Nowack K C, Koppens F H L, Nazarov Y V, et al. Coherent control of a single electron spin with electric fields. *Science*, 2007, 318: 1430–1433, arXiv: [0707.3080](#)

Quantum networks for implementing efficiently a nonlocal N -qubit controlled unitary gate via non-symmetric quantum channels: Designing and optimizing

CHEN LiBing* & LU Hong

Department of Photoelectron and Physics, Foshan University, Foshan 528000, China

We show how a nonlocal N -qubit controlled unitary gate can be implemented locally and effectively by using non-symmetric quantum channels. We construct respectively two quantum networks for realizing conclusively this nonlocal quantum gate. The first one hires $(N-2)$ symmetric qubit-qubit Bell states and a non-symmetric qubit-qudit Bell state as quantum channels. The basic idea of this scheme is to use $(N-2)$ additional levels of this qudit to “hide” certain computational states of $(N-1)$ nonlocal control states from the conditional dynamics, which results in an effective nonlocal N -qubit controlled unitary gate design. In this scheme, however, either the number of the additional levels or that of 1-qudit gates needs to increase with N . The other one can improve significantly the local implementation of this nonlocal gate if we harness $(N-1)$ non-symmetric qubit-qutrit Bell states as quantum channels. This scheme uses respectively $(N-1)$ qutrits’s additional levels to expose one and only one initial computational state of $(N-1)$ nonlocal control states to the conditional dynamics. In comparison with the first one, the procedure is greatly simplified, and the total gate time is reduced. The fact that the quantum network that does the proposed implementation is built entirely of local single-body and two-body gates, and has only $(3N-4)$ two-body gates is notable.

qudit, qutrit, N -qubit controlled unitary gate, quantum network, optimization

PACS: 03.67.Hk, 03.65.Ta, 03.67.Lx

doi: [10.1360/SSPMA2016-00541](#)