论文

一种模拟弹性波在层状地基中传播的简化高阶双渐近透射边界

高毅超^{①*}, 徐艳杰^②, 金峰^②, SONG ChongMin^③^① 华侨大学土木工程学院, 厦门 361021;^② 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084;^③ Department of Civil and Environmental Engineering, University of New South Wales, Sydney 2052, Australia

* E-mail: gyc@hqu.edu.cn

收稿日期: 2015-08-30; 接受日期: 2016-01-04; 网络出版日期: 2016-04-15

国家自然科学基金(批准号: 51409107, 41274106)和博士后自然科学基金(批准号: 2014M551832)资助项目

摘要 在强烈地震作用下, 层状地基与结构之间的动力相互作用将对结构的动力响应产生重大影响, 其难点是模拟波动在无限层状地基中传播引起的辐射阻尼效应. 基于比例边界有限单元法(SBFEM)构建的层状介质标量波高阶双渐近透射边界能够在全频范围内快速收敛到准确解, 具有很高的计算精度和计算效率, 并且具有良好的数值稳定性. 以二维水平等高层状地基为研究对象, 将弹性动力学方程强行解耦得到两个独立的标量波方程, 基于解耦的标量波方程构建了一种层状地基弹性波传播模拟的简化高阶双渐近透射边界. 同标量波高阶双渐近透射边界一样, 该透射边界具有良好的计算性能. 数值算例结果表明, 该透射边界对底部为固定边界条件的水平层状地基具有良好的模拟精度.

关键词 透射边界, 层状地基, 双渐近, 比例边界有限单元法

1 引言

在强烈地震荷载作用下, 结构与地基将发生显著的动力相互作用, 由此给结构的动力响应带来重大影响. 其中, 如何模拟波动在无限地基内传播引起的辐射阻尼效应是其中的重点和难点. 层状地基是土木工程中常见的地基形式, 因此开展弹性波在层状地基中的波传播模拟研究具有重要的理论意义和工程实用价值. 许多学者就该领域开展了广泛的研

究, 发展了一批有效的数值方法. 边界元法^[1,2]只需要离散边界, 使问题维数降低一维, 并且能够自动满足无穷远处的辐射边界条件, 因此被广泛地应用到层状介质波传播问题的模拟. 然而, 基本解的存在与否限制了边界元法在实际工程中的应用. 薄层法是由 Lysmer 提出的一种半解析数值方法, 它非常适合于模拟材料属性随深度变化的水平层状介质内的波动传播问题, 其主要应用为求解层状地基的格林函数^[3]; 在时域分析方面, Kausel^[4], Kausel 和 Park^[5]开

引用格式: 高毅超, 徐艳杰, 金峰, 等. 一种模拟弹性波在层状地基中传播的简化高阶双渐近透射边界. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 527-534
Gao Y C, Xu Y J, Jin F, et al. A simplified high order doubly asymptotic open boundary for modeling elastic wave propagation in layered foundation (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 527-534, doi: 10.1360/N092015-00175

展了一系列研究, 他们指出该方法在求解过程有数值散射问题^[6], 需要额外的数值处理措施以保证其计算的稳定.

比例边界有限单元法(Scaled boundary finite element method, SBFEM)是由 Song 和 Wolf^[7,8]提出的一种半解析数值方法, 它仅需离散边界而在径向保持解析, 兼具边界元法和有限元法的优点. 对于无限介质中波传播的模拟, 它不需要基本解即可自动满足无穷远处的辐射边界条件, 因此被广泛应用于无限域动力问题的模拟. 在无限层状介质波传播模拟领域, 一些学者基于 SBFEM 开展了探索性研究, 不过主要是在频域内完成的. Birk 和 Behnke^[9]采用比例相似中心轴线代替比例相似中心, 推导了三维层状介质的比例边界有限单元方程, 并采用高频渐近级数的方法求解其动力刚度. 然而该计算方法比较复杂, 计算量大, 精度也不够理想. 韩泽军等人^[10,11]在 Birk 等人的研究工作基础上, 采用连分式渐近算法求解二维和三维层状地基的动力刚度, 该算法提高了求解动力刚度的计算效率和计算精度. 在时域分析方面, Chen 等人^[12]将 SBFEM 应用到层状地基中弹性波传播模拟, 其时域的求解仍是通过耗时的卷积积分算法完成的.

高阶透射边界具有高阶精度和较高的计算效率, 成为了近十多年来无限域波动问题模拟的一个研究热点^[13]. Bazyar 和 Song^[14], Birk 等人^[15]在 SBFEM 的理论框架下基于动力刚度连分式渐近解构建了高阶透射边界, 该透射边界具有很高的计算精度和计算效率. 然而, 该高阶透射边界基于均匀介质假设得到, 同绝大多数高阶透射边界一样属于高频单向渐近边界. 对于半无限层状介质波传播问题(波导问题), 介质内同时存在向无穷远处传播的行波和在近场衰减的快衰波. 因此, 一个强健的透射边界应该能够同时模拟行波和快衰波的能量传递. 针对层状介质标量波传播问题, Prempramote 等人^[16]基于动力刚度的连分式双渐近解提出了一类高阶双渐近透射边界, 该透射边界能够在全频范围内迅速收敛到动力刚度的准确解, 具有很高的计算精度和计算效率, 并且具有良好的数值稳定性. 文献[17,18]结合 SBFEM 将该透射边界推广到层状库水中动水压力波(标量波)传播的模拟.

综上所述, 层状介质标量波问题的高阶双渐近透射边界具有良好的计算效率和数值稳定性. 本文

针对二维水平等高层状地基内弹性波传播问题, 将弹性动力学方程强行简化成两个独立的标量波方程, 在 SBFEM 的理论框架下基于解耦的标量波方程构建一种模拟弹性波在层状地基中传播的简化高阶双渐近透射边界, 并进行了算例验证.

2 弹性波动方程的简化

考虑图 1 所示的半无限等高层状地基, 竖直截断边界将其分割成近场和远场两个部分. 其中, 近场部分通过有限元法模拟, 竖直截断边界采用比例边界有限单元离散, 典型的比例边界有限单元如图 1(b)所示. 分别记 x 向和 y 向位移为 $u=u(x, y, t)$ 和 $v=v(x, y, t)$. 顶部边界满足 Newmann 边界条件, 即自由表面边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

底部边界满足 Dirichlet 边界条件, 即固定边界条件为

$$u = 0, \quad v = 0. \quad (2)$$

在笛卡尔直角坐标系下, 二维弹性波动方程的表达式为

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (4)$$

图 1 半无限等高层状地基

(a) 几何模型; (b) 典型单元

式中, λ 和 G 分别为拉梅常数和剪切模量. 忽略方程(3)和(4)式的耦合项, 则二维层状地基的弹性波动方程可以简化为

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (6)$$

在笛卡尔坐标系下, 微分算子 L 的定义为

$$L = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T. \quad (7)$$

考虑(7)式, (5)和(6)式可以改写成

$$L^T \sigma_u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$L^T \sigma_v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (9)$$

其中, $\sigma_u = \{\sigma_x \quad \tau_{yx}\}^T$ 和 $\sigma_v = \{\tau_{xy} \quad \sigma_y\}^T$ 分别为水平向位移 u 和竖向位移 v 对应的应力向量, 它们与水平向位移 u 和竖向位移 v 之间的关系分别为

$$\sigma_u = D_u L u, \quad (10)$$

$$\sigma_v = D_v L v, \quad (11)$$

其中, D_u 和 D_v 均为对角矩阵

$$D_u = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, D_v = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & \lambda + 2G \end{bmatrix}. \quad (12)$$

层状地基中 P 波和 S 波的波速 c_p 和 c_s 分别为

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (13)$$

(8)和(9)式具有相同的表达形式, 下面仅以(8)式为例, 推导二维半无限等高层状地基简化弹性波动方程对应的比例边界有限单元方程.

3 简化弹性波动方程的比例边界有限单元方程

均匀介质弹性动力学问题的比例边界有限单元方程推导过程详见文献[8]. 本文参照文献[8]的思路, 推导了二维半无限等高层状地基简化弹性波动方程对应的比例边界有限单元方程, 主要推导过程如下.

考虑如图 1 所示的二维半无限等高层状地基, 其中竖直截断边界的横坐标 x_b 为常数. 采用 3 节点线单

元离散竖直截断边界, 典型的比例边界有限单元如图 1(b)所示. 记节点的纵坐标向量为 y_b , 同有限元法, 边界上任意一点的纵坐标可以通过插值函数插值得到, 即

$$y_b(\eta) = N(\eta) y_b. \quad (14)$$

在笛卡尔坐标系下, 半无限层状地基内任意一点的坐标可以表示成

$$x(\xi) = x_b + \xi, \quad y(\xi, \eta) = y_b(\eta) = N(\eta) y_b, \quad (15)$$

式中径向坐标 ξ 在竖直截断边界处取 0. 笛卡尔坐标 (x, y) 至比例边界坐标 (ξ, η) 的雅克比转换矩阵为

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y_{b,\eta} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

对于二维问题, 单位厚度的微元体积 dV 可以表示成

$$dV = |J(\eta)| d\xi d\eta, \quad (17)$$

其中, $|J(\eta)|$ 为雅克比矩阵 $J(\eta)$ 的行列式. 考虑(16)式, (7)式定义微分算子 L 在比例边界坐标系下的表达式为

$$L = b^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b^2(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (18)$$

其中向量 b^1 和 $b^2(\eta)$ 正交, 其定义分别为

$$b^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad b^2(\eta) = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

考虑(18)式, 水平位移 u 对应的应力向量 σ_u 可以表示为

$$\sigma_u = (\lambda + 2G) B^1(\eta) u(\xi)_{,\xi} + G B^2(\eta) u(\xi), \quad (20)$$

其中, 系数矩阵 $B^1(\eta)$ 和 $B^2(\eta)$ 的定义为

$$B^1(\eta) = b^1 N(\eta), \quad B^2(\eta) = b^2(\eta) N(\eta)_{,\eta}. \quad (21)$$

对(8)式在环向采用伽辽金加权余量法, 可以得到其对应的比例边界有限单元方程为

$$E_u^0 u(\xi)_{,\xi\xi} - E_u^2 u(\xi) - M^0 \ddot{u}(\xi) = 0, \quad (22)$$

其中, 系数矩阵 E_u^0 , E_u^2 和 M^0 的定义分别为

$$\begin{aligned} E_u^0 &= \int_{-1}^{+1} [B^1(\eta)]^T (\lambda + 2G) B^1(\eta) |J(\eta)| d\eta \\ &= \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T (\lambda + 2G) N(\eta) |J(\eta)| d\eta, \\ E_u^2 &= \int_{-1}^{+1} [B^2(\eta)]^T G B^2(\eta) |J(\eta)| d\eta, \\ M^0 &= \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T \rho N(\eta) |J(\eta)| d\eta. \end{aligned} \quad (23)$$

同理可得, (9)式对应的比例边界有限方程与(22)

式具有相同的表达形式

$$\mathbf{E}_v^0 \mathbf{v}(\xi)_{,\xi\xi} - \mathbf{E}_v^2 \mathbf{v}(\xi) - \mathbf{M}^0 \ddot{\mathbf{v}}(\xi) = 0, \quad (24)$$

其中, 系数矩阵 $\mathbf{E}_v^0$ 和 $\mathbf{E}_v^2$ 的定义分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_v^0 &= \int_{-1}^{+1} [\mathbf{N}(\eta)]^T \mathbf{G} \mathbf{N}(\eta) |\mathbf{J}(\eta)| d\eta, \\ \mathbf{E}_v^2 &= \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}^2(\eta)]^T (\lambda + 2G) \mathbf{B}^2(\eta) |\mathbf{J}(\eta)| d\eta. \end{aligned} \quad (25)$$

对比(23)和(25)式, 并考虑(13)式, 容易得到

$$\mathbf{M}^0 = \frac{1}{c_p^2} \mathbf{E}_u^0 = \frac{1}{c_s^2} \mathbf{E}_v^0. \quad (26)$$

根据动力刚度 $\mathbf{S}^\infty(\omega)$ 的定义, 边界力幅值 $\mathbf{R}(\omega)$ 与边界位移幅值 $\mathbf{W}(\omega)$ 之间的关系满足下式:

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{S}^\infty(\omega) \mathbf{W}(\omega). \quad (27)$$

结合虚功原理和动力刚度的定义, 可以将(22)和(24)式统一改写成动力刚度表示的比例边界有限单元方程, 即

$$\mathbf{S}^\infty(\omega) [\mathbf{E}^0]^{-1} \mathbf{S}^\infty(\omega) - \mathbf{E}^2 + \omega^2 \mathbf{M}^0 = 0. \quad (28)$$

下面将从(28)式出发, 推导高阶双渐近透射边界的数学表达式.

4 高阶双渐近透射边界

层状介质标量波问题的高阶双渐近透射边界的详细推导过程参见文献[16,17], 本文参照其推导思路, 将简化弹性波动方程的高阶双渐近透射边界的主要推导过程摘录如下.

动力刚度表示的比例边界有限单元方程可以通过模态变换解耦. 考虑如下广义特征值分解

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 \boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{E}^0 \boldsymbol{\Phi} [\boldsymbol{\Lambda}]^2 / h^2, \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{E}^0 \boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{I}, \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{E}^2 \boldsymbol{\Phi} &= [\boldsymbol{\Lambda}]^2 / h^2, \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角元素均为正值的对角矩阵, $\boldsymbol{\Phi}$ 为特征向量矩阵, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵. 对方程(28)式左乘 $\boldsymbol{\Phi}^T$, 右乘 $\boldsymbol{\Phi}$, 并考虑(26)和(29)式可得

$$[\tilde{\mathbf{S}}(a_0)]^2 + (a_0^2 \mathbf{I} - [\boldsymbol{\Lambda}]^2) = 0, \quad (30)$$

其中模态动力刚度 $\tilde{\mathbf{S}}(a_0)$ 为对角矩阵, 其定义为

$$\tilde{\mathbf{S}}(a_0) = h \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{S}^\infty(\omega) \boldsymbol{\Phi}. \quad (31)$$

无量纲频率 a_0 的定义为

$$a_0 = \omega h / c. \quad (32)$$

记模态动力刚度 $\tilde{\mathbf{S}}(a_0)$ 的对角元素为 $\tilde{S}_j(a_0)$, 则

单一模态的模态动力刚度的方程为

$$(\tilde{S}_j(a_0))^2 + a_0^2 - \lambda_j^2 = 0. \quad (32)$$

根据文献[17]的结果, $\tilde{S}_j(a_0)$ 连分式双渐近解可以表示成

$$\tilde{S}_j(a_0) = (ia_0) - \lambda_j^2 (\tilde{Y}_j^{(1)}(a_0))^{-1}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j^{(i)}(a_0) &= (-1)^i 2(ia_0) - \lambda_j^2 (\tilde{Y}_j^{(i+1)}(a_0))^{-1}, \\ (i &= 1, 2, \dots, M_H), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\tilde{Y}_{L,j}(a_0) = \tilde{Y}_j^{(M_H+1)}(a_0), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{L,j}(a_0) &= (-1)^{M_H+1} \lambda_j + (-1)^{M_H+1} (ia_0) \\ &\quad - (ia_0)^2 (\tilde{Y}_{L,j}^{(1)}(a_0))^{-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{L,j}^{(i)}(a_0) &= (-1)^{M_H+i+1} 2\lambda_j - (ia_0)^2 (\tilde{Y}_{L,j}^{(i+1)}(a_0))^{-1}, \\ (i &= 1, 2, \dots, M_L). \end{aligned} \quad (37)$$

将动力刚度的连分式双渐近解((33)~(37)式)代入动力刚度的定义式(27), 结合辅助变量技术, 并进行傅里叶逆变换即可得到高阶双渐近透射边界在时域内的表达式. 弹性波动方程解耦后, 两个方向上的控制方程是独立的, 并且具有相同的表达形式, 因此可以在两个方向上分别施加独立的高阶双渐近透射边界, 近似模拟层状地基中弹性波的传播.

记竖直截断边界上的位移向量为 $\mathbf{w}_b$, 它可以通过边界上的水平位移向量 $\mathbf{u}_b$ 和竖向位移向量 $\mathbf{v}_b$ 组装得到, 即

$$\mathbf{w}_b = \left\{ \{\mathbf{u}_b\}^T \quad \{\mathbf{v}_b\}^T \right\}^T. \quad (38)$$

同理, 边界节点反力向量 $\mathbf{r}_b$ 由水平反力向量 $\mathbf{r}_u$ 和竖向反力向量 $\mathbf{r}_v$ 组装得到, 即

$$\mathbf{r}_b = \left\{ \{\mathbf{r}_u\}^T \quad \{\mathbf{r}_v\}^T \right\}^T. \quad (39)$$

通过组装两个方向上的高阶双渐近透射边界, 可得简化的弹性波高阶双渐近透射边界, 它与标量波高阶双渐近透射边界具有相同的表达形式, 即

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{C}_\infty \dot{\mathbf{w}}_b - \mathbf{A}_b \mathbf{w}^{(1)}, \quad (40)$$

$$0 = -\mathbf{A}_b \mathbf{w}_b - 2\mathbf{C}_\infty \dot{\mathbf{w}}^{(1)} - \mathbf{A}_b \mathbf{w}^{(2)}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathbf{A}_b \mathbf{w}^{(i-1)} - 2(-1)^i \mathbf{C}_\infty \dot{\mathbf{w}}^{(i)} - \mathbf{A}_b \mathbf{w}^{(i+1)}, \\ (i &= 2, 3, \dots, M_H), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathbf{A}_b \mathbf{w}^{(M_H)} + (-1)^{M_H+1} \mathbf{A}_b \mathbf{w}_L^{(0)} \\ &\quad + (-1)^{M_H+1} \mathbf{C}_\infty \dot{\mathbf{w}}_L^{(0)} - \mathbf{C}_\infty \dot{\mathbf{w}}_L^{(1)}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$0 = -C_{\infty} \dot{w}_L^{(i-1)} + 2(-1)^{M_H+i+1} A_b w_L^{(i)} - C_{\infty} \dot{w}_L^{(i+1)}, \quad (45)$$

$$(i=1, 2, \dots, M_L),$$

其中, $w^{(i)} (i=1, 2, \dots, M_H)$ 和 $w_L^{(i)} (i=0, 1, \dots, M_L)$ 为辅助变量. 系数矩阵的定义为

$$C_{\infty} = \begin{bmatrix} E_u^0 / c_p & 0 \\ 0 & E_v^0 / c_s \end{bmatrix}, \quad A_b = \begin{bmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_v \end{bmatrix}, \quad (46)$$

其中分块矩阵 A_u 和 A_v 的表达式为

$$A = \frac{1}{h} \Phi^{-T} A \Phi^{-1}. \quad (47)$$

通过竖直截断边界与近场域的网格协调, 可以直接将高阶双渐近透射边界直接嵌入到近场有限元方程当中, 形成一个整体的控制方程. 该整体控制方程具有对称、稀疏的特点, 可以利用通用的有限元求解器求解. 本文基于有限元开源软件框架 OpenSees 数值实现了高阶双渐近透射边界和有限元的耦合, 并在 OpenSees 平台上进行算例验证.

5 算例

为了验证本文的精度, 考虑图 2 所示的水平等高均匀层状地基, 层状地基的高度为 h , 底面为固定边界条件, 顶面为自由边界条件, 左侧边界受到三角形分布荷载的作用, 分布荷载的最大值位于层状地基上顶面, 大小为 $p(t)$. 取无量纲材料参数如下: $G/\rho = 1$, 泊松比 $\nu=0.25$. 近场域采用有限元模拟, 在水平方向上, 网格离散范围为 l , 网格尺寸为 $0.25h \times 0.25h$, 单元类型为 8 节点二次四边形单元. 为了同近场有限元网格协调, 竖直截断边界采用 4 个 3 节点二次线单元离散.

为了验证简化高阶双渐近透射边界的计算精度, 采用有限元扩展网格解(纯有限元解)作为参考解, 其中有限元扩展网格模型的离散范围为 $l = 50h$, P 波在

图 2 三角形分布荷载作用下的等高层状地基

该范围内往返传播所需的无量纲时间为 57.8. 本算例中, 高阶双渐近透射边界的阶数均取 $M_H=M_L=4$, 并与黏性边界^[19]的计算结果进行了对比, 其中黏性边界通过在截断边界 l 处施加黏滞阻尼器实现.

考虑层状地基左侧受到水平向三角形分布荷载作用, 其中 $p(t)$ 为图 3 所示的三角脉冲荷载. 分别取近场有限元网格离散范围 $l=h$ 和 $l=2h$, 在三角脉冲荷载作用下, A 点的水平位移和竖向位移响应曲线绘制于图 4 和图 5.

当近场有限元网格离散的范围为 $l=h$ 时, 从 A 点水平位移的对比图中可以看出, 黏性边界解与扩展网格解相差较大, 并且在长期的响应中很快衰减至零; 简化高阶双渐近透射边界解与扩展网格解基本一致, 在幅值上略大于扩展网格解, 伴随有一定的周期延长现象. 竖向位移响应的对比结果与水平位移响应的对比结果规律一致.

增加近场有限元网格离散范围至 $l=2h$ 时, 黏性边界解的精度有所提高, 在响应前期与扩展网格解基本吻合, 但在长时间的响应中仍迅速衰减至零; 简化高阶双渐近透射边界解与扩展网格解更加吻合, 在幅值上与扩展网格解相一致, 周期延长量也减小了, 计算精度进一步提高.

考虑层状地基左侧受到竖向三角形分布荷载作用, 其中 $p(t)$ 为定义的 Ricker 波.

$$p(t) = P_T \left(1 - 2 \left(\frac{t-t_s}{t_0} \right)^2 \right) \exp \left(- \left(\frac{t-t_s}{t_0} \right)^2 \right), \quad (44)$$

其中, t_s 为峰值点对应的的时间, $2/t_0$ 为主导角频率, 计算中取 $t_s=5$ s, $t_0=1.0$ s.

取近场有限元网格的离散范围 $l=2h$, 在竖向

图 3 三角脉冲荷载

图4 水平三角脉冲荷载作用下A点位移时程($l=h$)

(a) 水平位移; (b) 竖向位移

图5 水平三角脉冲荷载作用下A点位移时程($l=2h$)

(a) 水平位移; (b) 竖向位移

图6 竖向Ricker波作用下A点位移时程($l=2h$)

(a) 水平位移; (b) 竖向位移

Ricker波荷载作用下, A点的水平位移和竖向位移响应曲线绘制于图6。从A点的水平位移响应对比图中可以看出, 竖向荷载作用下的水平位移响应对比结果与水平荷载作用下的结果对比类似。在响应前期, 黏性边界解与扩展网格解吻合较好, 但在后期的响

应中与扩展网格解相差较大; 双渐近透射边界解基本与扩展网格解相吻合, 其响应幅值略低于扩展网格解, 并伴随有一定的周期延长。

从A点的竖向位移响应对比图中可以看出, 竖向位移响应的对比结果与水平位移响应的对比结果

具有相同的规律,但是计算精度略差.

6 总结

本文以二维半无限水平等高层状地基为研究对象,将标量波高阶双渐近透射边界推广应用到弹性波问题.采用忽略弹性波动方程耦合项的方法,将其强行解耦成两个独立的标量波方程,针对两个方向上解耦的标量波方程构建高阶双渐近透射边界.通过组合两个方向上的标量波高阶双渐近透射边界,构建了一种模拟弹性波在层状地基中传播的简化高阶双渐近透射边界.同标量波高阶双渐近透射边界,该透射边界具有良好的计算精度和数值稳定性.

考虑底部为固定边界条件的水平层状地基算例,计算分析结果表明:1)在水平荷载作用下,无论是水平位移响应还是竖向位移响应,双渐近透射边界解均与扩展网格解吻合良好,精度较黏性边界解有很大提高,但是伴随有一定的周期延长;增加近场域离散范围,双渐近透射边界解精度进一步提高,周期延长量也减小了;2)在竖向荷载作用下,双渐近透射边界解仍和扩展网格解吻合良好,但是竖向位移响应的计算精度略差于水平位移响应的计算精度.

综上,本文针对半无限等高层状地基发展的简化高阶双渐近透射边界具有良好的计算精度,适用于层状地基中弹性波传播的模拟.

参考文献

- 1 Spyarakos C C, Xu C J. Dynamic analysis of flexible massive strip-foundations embedded in layered soils by hybrid BEM-FEM. *Comput Struct*, 2004, 82: 2541–2550
- 2 Padrón L A, Aznárez J J, Maeso O. Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthq Eng*, 2008, 28: 333–346
- 3 Kausel E, Peek R. Dynamic loads in the interior of a layered stratum: An explicit solution. *B Seismol Soc Am*, 1982, 72: 1459–1481
- 4 Kausel E. Thin-layer method: Formulation in the time domain. *Int J Numer Meth Eng*, 1994, 37: 927–941
- 5 Kausel E, Park J. Response of layered half-space obtained directly in the time domain, Part II: SV-P and three-dimensional sources. *B Seismol Soc Am*, 2006, 96: 1810–1826
- 6 Park J, Kausel E. Numerical dispersion in the thin-layer method. *Comput Struct*, 2004, 82: 607–625
- 7 Song C M, Wolf J P. The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics. *Comput Method Appl M*, 1997, 147: 329–355
- 8 Song C M, Wolf J P. The scaled boundary finite-element method—A primer: Solution procedures. *Comput Struct*, 2000, 78: 211–225
- 9 Birk C, Behnke R. A modified scaled boundary finite element method for three-dimensional dynamic soil-structure interaction in layered soil. *Int J Numer Meth Eng*, 2012, 89: 371–402
- 10 韩泽军, 林皋. 三维层状地基动力刚度矩阵连分式算法. *大连理工大学学报*, 2012, 6: 862–869
- 11 韩泽军, 林皋, 钟红. 改进的比例边界有限元法求解层状地基动力刚度矩阵. *水电能源科学*, 2012, 7: 100–104
- 12 Chen X J, Birk C, Song C M. Transient analysis of wave propagation in layered soil by using the scaled boundary finite element method. *Comput Geotech*, 2015, 63: 1–12
- 13 Givoli D. High-order local non-reflecting boundary conditions: A review. *Wave Motion*, 2004, 39: 319–326
- 14 Bazyar M H, Song C M. A continued-fraction-based high-order transmitting boundary for wave propagation in unbounded domains of arbitrary geometry. *Int J Numer Meth Eng*, 2008, 74: 209–237
- 15 Birk C, Prempramote S, Song C M. An improved continued-fraction-based high-order transmitting boundary for time-domain analyses in unbounded domains. *Int J Numer Meth Eng*, 2012, 89: 269–298
- 16 Prempramote S, Song C M, Tin-Loi F, et al. High-order doubly asymptotic open boundaries for scalar wave equation. *Int J Numer Meth Eng*, 2009, 79: 340–374
- 17 Wang X, Jin F, Prempramote S, et al. Time-domain analysis of gravity dam-reservoir interaction using high-order doubly asymptotic open boundary. *Comput Struct*, 2011, 89: 668–680
- 18 Gao Y C, Jin F, Wang X, et al. Finite element analysis of dam-reservoir interaction using high-order doubly asymptotic open boundary. *Math Probl Eng*, 2011, 2011: 210624
- 19 Lysmer J, Kuhlemeyer R L. Finite dynamic model for infinite media. *J Eng Mech Div ASCE*, 1969, 95: 759–877

A simplified high order doubly asymptotic open boundary for modeling elastic wave propagation in layered foundation

GAO YiChao¹, XU YanJie², JIN Feng² & SONG ChongMin³

¹ School of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;

² State Key Laboratory of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

³ Department of Civil and Environmental Engineering, University of New South Wales, Sydney 2052, Australia

Dynamic structure-layered foundation interaction has great contribution to the seismic response of structure subjected to strong earthquake. The main difficulty in this area lies in accurately modeling the radiation damping caused by the wave propagation in the infinite layered foundation. Based on the scaled boundary finite element method, a high order doubly asymptotic open boundary for modeling the scalar wave propagation in the semi-infinite layered medium has been developed. This open boundary is capable of accurately mimicking the unbounded layered medium over the entire frequency range. It converges to the exact solution quickly as its order increases and has high computational efficiency as well as good numerical stability. In this paper, the elastic wave equation for layered foundation is decoupled, leading to two independent scalar wave equations. The scalar wave high order doubly open boundary is applied for each independent scalar wave equation. As a result, a simplified high order doubly asymptotic open boundary for elastic waver propagation in layered foundation is developed. Numerical example results demonstrate that this proposed open boundary is suitable for modeling the elastic wave propagation in the layered foundation with fixed bottom boundary condition.

open boundary, layered foundation, doubly asymptotic, scaled boundary finite element method

doi: 10.1360/N092015-00175