论 文

基于无源定位观测方程的一类伪线性加权最小二乘定位闭式解及其理论性能分析

王鼎^{①*}, 李长胜^②, 张瑞杰^③^① 解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450001^② 解放军信息工程大学训练部, 郑州 450001^③ 解放军信息工程大学数学工程与先进计算国家重点实验室, 郑州 450001

* 通信作者. E-mail: wang_ding814@aliyun.com

收稿日期: 2014-09-25; 接受日期: 2015-04-10; 网络出版日期: 2015-07-14

国家自然科学基金 (批准号: 61201381) 资助项目

摘要 针对无源定位问题中的一类特殊观测方程, 提出一种将其非线性观测方程进行伪线性处理, 从而实现目标位置 (闭式) 解算的定位理论框架. 首先, 在不限定具体物理观测量的前提下, 建立将非线性观测方程转化为伪线性观测方程的代数模型, 并在没有系统误差 (特指观测站位置状态扰动) 的条件下, 推导出伪线性加权最小二乘定位闭式解 (称其为 Pwls-a). 接着, 利用一阶误差分析方法定量证明该闭式解的统计方差可渐近逼近无系统误差时的克拉美罗界 (Cramér-Rao bound). 随后, 在系统误差存在条件下, 定量推导闭式解 Pwls-a 的统计方差, 并定量证明该方差无法渐近逼近系统误差存在条件下的克拉美罗界. 对此, 推导出另一种可抑制系统误差的伪线性加权最小二乘定位闭式解 (称其为 Pwls-b), 并定量证明该闭式解的统计方差可渐近逼近系统误差存在条件下的克拉美罗界. 此外, 将闭式解 Pwls-b 推广应用于多目标联合定位的场景中最后, 以协同 AOA/TDOA/GROA 信息的无源定位问题为算例, 阐述伪线性无源定位理论框架的具体应用, 并通过数值实验验证文中理论分析的有效性和定位方法的优越性.

关键词 无源定位 观测误差 系统误差 伪线性 最小二乘 闭式解 克拉美罗界

1 引言

与雷达、声纳、激光等有源定位体制相比, 无源定位系统^[1,2]并不会主动发射电磁波信号, 因此该系统具有生存能力强、隐蔽性能好、探测距离远等优势, 近些年来受到国内外学者和相关技术人员的广泛讨论和深入研究. 众所周知, 无源定位系统的本质就是通过位置 (有时也包括速度) 已知的观测站接收来自目标辐射源发射的信号 (也可能是目标散射第三方辐射源发射的信号), 并从信号中挖掘出可用于目标定位的观测量. 用于无源定位的观测量主要包括时域、频域、空域和能量域共 4 大类参量, 其中时域观测量包括到达时间 TOA(time of arrival)^[3,4]、到达时间差 TDOA(time difference of arrival)^[5~9]等参量; 频域观测量包括到达频率 FOA(frequency of arrival)^[10]、到达频率差 FDOA(frequency difference of arrival)^[11~16]等参量; 空域观测量包括到达方位角^[12,14,17~20]、到达仰角^[18,19]等参量; 能量

引用格式: 王鼎, 李长胜, 张瑞杰. 基于无源定位观测方程的一类伪线性加权最小二乘定位闭式解及其理论性能分析. 中国科学: 信息科学, 2015, 45: 1197–1217, doi: 10.1360/N112014-00082

域观测量包括接收信号强度 RSS(received signal strength)^[21]、信号到达增益比 GROA(gain ratio of arrival)^[22,23] 等参量. 在信号视距传播条件下, (协同) 利用上述观测信息能够建立目标位置状态与观测站位置状态之间的代数方程 (通常为非线性方程), 通过优化求解该方程即可获得目标位置状态的估计值.

近些年来, 大量基于 (或协同) 上述 4 大类观测量的无源定位算法已被相继提出, 其中最具有普适性的方法是将无源定位问题转化为非线性加权最小二乘优化问题, 并利用 Taylor 级数迭代公式进行数值运算^[24], 其主要优势在于对定位观测方程几乎没有任何特殊限制, 具有较强的普适性. 另一方面, 针对一些特殊的定位观测量, 国内外相关学者还提出一系列 (广义) 最小二乘定位算法, 其中包括约束加权最小二乘 CWLS(constrained weighted least squares) 定位算法^[16,25]、约束总体最小二乘 CTLS(constrained total least squares) 定位算法^[8,9,26]、结构总体最小二乘 STLS(structured total least squares) 定位算法^[19] 等. 需要指出的是, 上述定位算法均需要迭代运算, 这不仅会产生庞大的计算, 还可能会导致迭代发散和局部收敛等问题. 为了避免无源定位中的迭代运算, 学者们还提出若干闭式类解算方法^[5,7,11~14,18,20~23], 其基本思想是将非线性观测方程转化为伪线性方程, 再利用线性加权最小二乘估计法获得目标位置的闭式解. 但需要注意的是, 很多定位观测方程是无法直接转化为伪线性方程的 (例如 TDOA 定位方程), 此时就需要引入辅助变量实现伪线性化处理, 然后再利用两步线性加权最小二乘估计法获得目标位置的闭式解, 例如, 文献 [5,11,13, 21~23] 中的方法均是两步伪线性加权最小二乘定位算法. 当然, 另有一些定位观测方程是可以直接转化为伪线性方程的 (例如 AOA 定位方程), 而且, 即便是单域观测量无法转化为伪线性方程, 通过协同多域观测量仍可能实现伪线性化处理 (例如协同 AOA/TDOA 的定位方程). 在可以直接转化为伪线性观测方程的基础上, 仅需要通过单步线性加权最小二乘估计法便可获得目标位置的闭式解^[7,12,14,18].

值得一提的是, 上述文献中关于定位闭式解的推导及其性能分析都是针对某些具体而特定的物理观测量所进行的, 尚缺乏统一的理论模型. 事实上, 这些伪线性定位方法背后均蕴含着统一的理论框架, 若能够对其进行抽象归纳便可以推广应用于更多定位场景. 对此, 本文将针对无源定位问题中可直接转化为伪线性方程的物理观测量 (包括基于单域的观测量或协同多域的观测量), 给出将非线性观测方程进行伪线性化处理, 从而获得目标位置闭式解的计算公式及其理论分析框架. 文中的算法推导和性能分析均是在两种情形下进行讨论的, 第一种情形是假设无系统误差, 即观测站的位置状态精确已知; 第二种情形是假设存在系统误差. 此外, 文中还将以协同 AOA/TDOA/GROA 信息的无源定位场景为特定算例, 阐述提出的伪线性无源定位理论框架的具体应用. 数值实验结果表明, 新提出的伪线性加权最小二乘定位方法能够在不需要迭代的情况下渐近逼近相应的克拉美罗界 CRB(Cramér-Rao bound), 并且所推导出的理论性能预测值可以很好地逼近仿真实验值. 最后还需要强调的是, 新的定位理论框架可适用于任意能够直接转化为伪线性方程的定位观测量, 具有一定的普适性.

2 非线性观测模型及参数估计克拉美罗界

2.1 无系统误差条件下的非线性观测模型及参数估计克拉美罗界

考虑某个无源定位系统, 其中待定位目标的真实位置状态向量为 s (可同时包含位置和速度向量), 假设通过某些观测方式可以获得关于目标位置状态的时域、空域、频域或能量域参量, 相应的非线性观测方程可以表示为

$$z = f(s, w) + n, \quad (1)$$

式中, $z \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 为实际中获得的观测向量; $s \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ ($q \leq p$) 为待估计的目标位置状态向量; $w \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ 为观测方程中的系统参数 (在无源定位中通常包括观测站位置和速度向量); $f(\cdot, \cdot)$ 表示非线性观测方程, 它同时是关于未知参量 s 和系统参量 w 的非线性函数 (由于这里并不限制特定的观测测量, 因此可用统一的函数来描述); $n \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 为加性观测误差, 这里假设它服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为 $\text{cov}(n) = E[nn^T]$.

利用最大似然方法估计式 (1) 中的未知参量 s 可以获得渐近最优的统计性能, 该估计器可以等价地表示为

$$\hat{s}_{\text{opt}}^{(a)} = \arg \min_{s \in \mathbb{R}^{q \times 1}} (z - f(s, w))^T \text{cov}^{-1}(n) (z - f(s, w)). \quad (2)$$

不难证明, 利用上述估计器所获得的估计方差矩阵等于相应的 CRB, 并且可表示为

$$\text{cov}(\hat{s}_{\text{opt}}^{(a)}) = (F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w))^{-1} = \text{CRB}^{(a)}(s), \quad (3)$$

式中, $F_1(s, w) = \frac{\partial f(s, w)}{\partial s^T} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 表示函数向量 $f(s, w)$ 关于向量 s 的 Jacobi 矩阵.

2.2 存在系统误差条件下的非线性观测模型及参数估计克拉美罗界

在很多情况下, 系统参量 w 也是通过实际观测获得, 因此其中也难免会存在一定测量误差, 即所谓的系统误差 (在无源定位中通常指观测站的位置误差或速度误差等参数), 不妨假设其观测向量为 v , 则有

$$v = w + m, \quad (4)$$

式中, $m \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ 表示系统参数的观测误差, 这里假设它服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为 $\text{cov}(m) = E[mm^T]$, 而且 m 与 n 统计独立.

当系统误差存在时, 最大似然估计器仍然可以获得渐近最优的统计性能, 并且该估计器可以等价地表示为

$$\begin{aligned} \{\hat{s}_{\text{opt}}^{(b)}, \hat{w}_{\text{opt}}^{(b)}\} = \arg \min_{\substack{s \in \mathbb{R}^{q \times 1} \\ w \in \mathbb{R}^{k \times 1}}} & ((z - f(s, w))^T \text{cov}^{-1}(n) (z - f(s, w)) \\ & + (v - w)^T \text{cov}^{-1}(m) (v - w)). \end{aligned} \quad (5)$$

不难证明, 上述估计器所获得的估计方差等于相应的 CRB, 并且可以表示为

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(\begin{bmatrix} \hat{s}_{\text{opt}}^{(b)} \\ \hat{w}_{\text{opt}}^{(b)} \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w) & F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) \\ F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w) & F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) + \text{cov}^{-1}(m) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \text{CRB}^{(b)} \left(\begin{bmatrix} s \\ w \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $F_2(s, w) = \frac{\partial f(s, w)}{\partial w^T} \in \mathbb{R}^{p \times k}$ 表示函数向量 $f(s, w)$ 关于向量 w 的 Jacobi 矩阵. 对于无源定位问题而言, 往往更关注未知参量 s 的估计性能, 利用矩阵求逆公式可得

$$\text{cov}(\hat{s}_{\text{opt}}^{(b)}) = (F_1^T(s, w) (F_2(s, w) \text{cov}(m) F_2^T(s, w) + \text{cov}(n))^{-1} F_1(s, w))^{-1} = \text{CRB}^{(b)}(s). \quad (7)$$

比较式 (3) 和 (7) 可得 $\text{CRB}^{(b)}(s) \geq \text{CRB}^{(a)}(s)$, 即系统误差会增加未知参量 s 的估计方差的下界.

需要指出的是, 式 (2) 和 (5) 都是多模非线性优化问题, 其求解过程需要迭代运算^[24], 这可能会导致迭代发散和局部收敛等问题. 然而, 对于一些特殊的定位观测模型, 可将式 (1) 直接转化为与其具有相同维数的“伪线性”观测方程, 而求解该“伪线性”观测方程可以避免迭代运算中出现的各种问题. 下节将在不局限定位观测方程的条件下, 提出具有统一理论框架的“伪线性”定位模型、方法及其理论性能分析. 文中提出的定位理论框架将分别在无系统误差和有系统误差这两种情况下进行讨论.

3 无系统误差条件下的伪线性最小二乘闭式解及其统计性能

本节将在无系统误差条件下推导伪线性最小二乘闭式解 (文中称该闭式解为 Pwls-a) 及其统计性能, 并证明其渐近统计最优性, 即其渐近估计方差等于相应的 CRB (即 $\text{CRB}^{(a)}(s)$).

3.1 无系统误差条件下的伪线性最小二乘闭式解

首先定义无观测误差条件下的观测向量 $z_0 = f(s, w)$. 文中考虑的观测量仅局限于可直接转化成伪线性观测方程的情形, 并且通过研究发现伪线性观测方程中的观测向量和系数矩阵都是关于 z_0 和 w 的函数, 由此可知伪线性观测方程可以表述成如下形式:

$$a(z_0, w) = B(z_0, w)h(s) = B(z_0, w)t, \quad (8)$$

式中, $a(z_0, w) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 为伪线性观测向量, $B(z_0, w) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 为伪线性系数矩阵, 它们都是关于 z_0 和 w 的向量函数和矩阵函数, 并且其具体的函数形式随着物理观测量的不同而改变, $t = h(s) \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ 是关于 s 的向量函数, 而且由 t 求解 s 的闭式形式易于获得, 即 $h(\cdot)$ 的反函数 $h^{-1}(\cdot)$ 的闭式形式可以直接获得 (对于无源定位问题而言, 往往有 $h(s) = s$). 由于式 (8) 是关于参量 t 的线性方程, 因此第一步可先求解出 t , 再利用 t 和 s 之间的闭式关系估计出 s .

在实际计算中, 函数 $a(\cdot, \cdot)$ 和 $B(\cdot, \cdot)$ 的形式是可知的, 但 z_0 却不可获知, 只能用带误差的观测向量 z 来代替. 显然, 若用 z 直接代替 z_0 , 式 (8) 已经无法成立, 为此需要引入误差向量

$$\varepsilon^{(a)} = a(z, w) - B(z, w)t, \quad (9)$$

为了合理估计 t , 需要分析误差向量 $\varepsilon^{(a)}$ 的统计特性, 为此可利用一阶 Taylor 级数展开将 $\varepsilon^{(a)}$ 表示成关于误差向量 n 的线性形式. 根据一阶 Taylor 级数展开的数学形式可推得

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(a)} &\approx (A_1(z_0, w) - [\dot{B}_{11}(z_0, w)t \ \dot{B}_{12}(z_0, w)t \ \cdots \ \dot{B}_{1p}(z_0, w)t])n \\ &= E_1(t, z_0, w)n, \end{aligned} \quad (10)$$

式中

$$\begin{cases} E_1(t, z_0, w) = A_1(z_0, w) - [\dot{B}_{11}(z_0, w)t \ \dot{B}_{12}(z_0, w)t \ \cdots \ \dot{B}_{1p}(z_0, w)t] \in \mathbb{R}^{p \times p}, \\ A_1(z_0, w) = \frac{\partial a(z_0, w)}{\partial z_0^T} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \dot{B}_{1l}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial \langle z_0 \rangle_l} \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (l = 1, 2, \dots, p), \end{cases} \quad (11)$$

式 (10) 忽略了关于误差向量 n 的高阶项. 根据式 (10) 可知误差向量 $\varepsilon^{(a)}$ 近似服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵可近似表示为

$$\text{cov}(\varepsilon^{(a)}) = E_1(t, z_0, w)\text{cov}(n)E_1^T(t, z_0, w). \quad (12)$$

联合式 (9) 和 (12) 就可以建立如下线性加权最小二乘优化模型

$$\begin{aligned}\hat{t}_{\text{wls}}^{(a)} &= \arg \min_{t \in \mathbb{R}^{q \times 1}} (a(z, w) - B(z, w)t)^T \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) (a(z, w) - B(z, w)t) \\ &= (B^T(z, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z, w))^{-1} B^T(z, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z, w).\end{aligned}\quad (13)$$

需要指出的是, $\text{cov}(\varepsilon^{(a)})$ 表达式中的 z_0 和 t 均无法获知, 其中 z_0 可用其观测向量 z 来代替, 而 t 可用其任意无偏估计值 $\hat{t}_{\text{ue}}$ (通过非加权最小二乘估计获得) 来代替, 此时 $\text{cov}(\varepsilon^{(a)})$ 可用其估计值 $\hat{\text{cov}}(\varepsilon^{(a)})$ 来表示, 即有

$$\hat{t}_{\text{wls}}^{(a)} = (B^T(z, w) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z, w))^{-1} B^T(z, w) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z, w), \quad (14)$$

进一步可得目标位置状态向量 s 的伪线性加权最小二乘估计值为

$$\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} = h^{-1}((B^T(z, w) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z, w))^{-1} B^T(z, w) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z, w)). \quad (15)$$

为了便于描述, 下文将闭式解 (15) 记为 Pwls-a. 针对上述伪线性最小二乘闭式解, 这里给出如下两点注记.

注记 1 为了给出 $\text{cov}(\varepsilon^{(a)})$ 更加准确的估计, 可将上述计算步骤重复计算几轮 (通常 2~3 轮即可), 每一轮中用当前最新的估计值更新 $\hat{\text{cov}}(\varepsilon^{(a)})$.

注记 2 $\text{cov}(\varepsilon^{(a)})$ 中还包括误差向量 n 的协方差矩阵 $\text{cov}(n)$, 该值通常可根据实际条件先验获得, 例如角度、时差、频差、信号能量等观测量的估计方差都有相应的理论计算公式.

3.2 无系统误差条件下闭式解 Pwls-a 的统计性能

本小节将推导伪线性加权最小二乘闭式解 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}$ 的理论性能, 并证明其 (渐近) 统计性能等于相应的 CRB, 为此, 需要首先推导 $\hat{t}_{\text{wls}}^{(a)}$ 的统计特性. 首先根据式 (14) 可知

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w) + \tilde{B}^{(a)T}(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w) \\ + B^T(z_0, w) \tilde{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w) + B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) \tilde{B}^{(a)}(z_0, w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t + \hat{t}_{\text{wls}}^{(a)} \end{pmatrix} \\ & \approx \begin{pmatrix} B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z_0, w) + \tilde{B}^{(a)T}(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z_0, w) \\ + B^T(z_0, w) \tilde{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z_0, w) + B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) \tilde{a}^{(a)}(z_0, w) \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \hat{t}_{\text{wls}}^{(a)} \approx (B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w))^{-1} B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) \varepsilon^{(a)},\end{aligned}\quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} \tilde{a}^{(a)}(z_0, w) = a(z, w) - a(z_0, w), \tilde{B}^{(a)}(z_0, w) = B(z, w) - B(z_0, w), \\ \tilde{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) = \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) - \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}), \tilde{t}_{\text{wls}}^{(a)} = \hat{t}_{\text{wls}}^{(a)} - t.\end{cases}\quad (17)$$

式 (16) 中省略的是关于误差向量 n 的高阶项. 根据式 (16) 可进一步推得

$$\text{cov}(\hat{t}_{\text{wls}}^{(a)}) = (B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w))^{-1}. \quad (18)$$

另一方面, 根据等式 $t = h(s)$ 可知

$$\tilde{t}_{\text{wls}}^{(a)} \approx H(s) \tilde{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} \Leftrightarrow \hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} \approx H^{-1}(s) \hat{t}_{\text{wls}}^{(a)}, \quad (19)$$

式中, $H(s) = \frac{\partial h(s)}{\partial s^T} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ 表示函数向量 $h(s)$ 关于向量 s 的 Jacobi 矩阵. 最后再结合式 (18) 和 (19) 可得

$$\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}) = \left(H^T(s) B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w) H(s) \right)^{-1}. \quad (20)$$

可以证明上述理论性能等于相应的 CRB, 即有如下命题.

命题 1 $\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}) = \text{CRB}^{(a)}(s)$.

证明 将等式 $z_0 = f(s, w)$ 代入式 (8) 中可得

$$a(f(s, w), w) = B(f(s, w), w)h(s), \quad (21)$$

计算式 (21) 两边关于向量 s 的 Jacobi 矩阵可知

$$E_1(t, z_0, w)F_1(s, w) = B(z_0, w)H(s), \quad (22)$$

将式 (22) 代入式 (20) 中可得

$$\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}) = \left(F_1^T(s, w) E_1^T(t, z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) E_1(t, z_0, w) F_1(s, w) \right)^{-1}, \quad (23)$$

再将式 (12) 代入式 (23) 中, 并结合式 (3) 可推得

$$\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}) = \left(F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w) \right)^{-1} = \text{CRB}^{(a)}(s). \quad (24)$$

根据命题 1 可知 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}$ 的渐近统计最优性, 其定位方差可渐近逼近相应的 CRB(在门限效应发生前).

4 存在系统误差条件下的伪线性最小二乘闭式解及其统计性能

在无源定位系统中, 往往会存在系统误差, 即观测站位置或速度存在扰动误差 (对于机载、舰载和星载观测平台而言较为常见), 而该误差对于定位算法的影响往往是较大的^[9,13,24]. 对此, 本节将首先推导上述伪线性最小二乘闭式解 Pwls-a 在系统误差存在条件下的统计性能, 并证明其估计方差难以达到存在系统误差条件下的 CRB(即 $\text{CRB}^{(b)}(s)$). 对此, 本节还将给出一种在性能上可渐近逼近 $\text{CRB}^{(b)}(s)$ 的伪线性最小二乘闭式解 (文中称该闭式解为 Pwls-b), 并证明其渐近统计最优性.

4.1 存在系统误差条件下闭式解 Pwls-a 的统计性能

为了便于区分, 下面将系统误差存在条件下的闭式解 Pwls-a 记为

$$\begin{cases} \hat{t}_{\text{wls}}^{(a)} = (B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z, v))^{-1} B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z, v), \\ \hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} = h^{-1} \left((B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z, v))^{-1} B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) a(z, v) \right), \end{cases} \quad (25)$$

式 (25) 是利用观测向量 v 代替式 (14) 和 (15) 中的真实值 w .

根据式 (25) 中的第一式可得

$$\begin{pmatrix} B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w) + \tilde{B}^{(a)T}(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w) \\ + B^T(z_0, w) \tilde{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) B(z_0, w) + B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)}) \tilde{B}^{(a)}(z_0, w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t + \tilde{t}_{\text{wls}}^{(a)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \approx \begin{pmatrix} B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})a(z_0, w) + \tilde{B}^{(a)T}(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})a(z_0, w) \\ + B^T(z_0, w)\tilde{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(a)})a(z_0, w) + B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})\tilde{a}^{(a)}(z_0, w) \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \tilde{t}_{\text{wls}}^{(a)} \approx (B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})B(z_0, w))^{-1}B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})\tilde{\varepsilon}^{(a)}, \end{aligned} \quad (26)$$

式中

$$\begin{cases} \tilde{t}_{\text{wls}}^{(a)} = \hat{t}_{\text{wls}}^{(a)} - t, \tilde{\varepsilon}^{(a)} = \tilde{a}^{(a)}(z_0, w) - \tilde{B}^{(a)}(z_0, w)t = a(z, v) - B(z, v)t, \\ \tilde{a}^{(a)}(z_0, w) = a(z, v) - a(z_0, w), \tilde{B}^{(a)}(z_0, w) = B(z, v) - B(z_0, w). \end{cases} \quad (27)$$

式 (26) 中省略的是关于误差的高阶项, 根据该式可推得

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{t}_{\text{wls}}^{(a)}) &= (B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})B(z_0, w))^{-1}B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})\text{cov}(\tilde{\varepsilon}^{(a)})\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})B(z_0, w) \\ &\quad \times (B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})B(z_0, w))^{-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

根据式 (19) 可进一步得

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}) &= (H^T(s)B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})B(z_0, w)H(s))^{-1} \\ &\quad \times H^T(s)B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})\text{cov}(\tilde{\varepsilon}^{(a)})\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})B(z_0, w)H(s) \\ &\quad \times (H^T(s)B^T(z_0, w)\text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(a)})B(z_0, w)H(s))^{-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

为了给出更为显式的形式, 下面还需要推导 $\text{cov}(\tilde{\varepsilon}^{(a)})$ 的表达式. 利用一阶 Taylor 级数展开可得

$$\tilde{\varepsilon}^{(a)} \approx E_1(t, z_0, w)n + E_2(t, z_0, w)m = E(t, z_0, w)\xi, \quad (30)$$

式中

$$\begin{cases} \xi = [n^T \ m^T]^T \in \mathbb{R}^{(p+k) \times 1}, \\ E(t, z_0, w) = [E_1(t, z_0, w) \ E_2(t, z_0, w)] \in \mathbb{R}^{p \times (p+k)}, \\ E_2(t, z_0, w) = A_2(z_0, w) - [\dot{B}_{21}(z_0, w)t \ \dot{B}_{22}(z_0, w)t \ \cdots \ \dot{B}_{2k}(z_0, w)t] \in \mathbb{R}^{p \times k}, \\ A_2(z_0, w) = \frac{\partial a(z_0, w)}{\partial w^T} \in \mathbb{R}^{p \times k}, \dot{B}_{2l}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial \langle w \rangle_l} \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad (l = 1, 2, \dots, k), \end{cases} \quad (31)$$

于是有

$$\text{cov}(\tilde{\varepsilon}^{(a)}) = E_1(t, z_0, w)\text{cov}(n)E_1^T(t, z_0, w) + E_2(t, z_0, w)\text{cov}(m)E_2^T(t, z_0, w). \quad (32)$$

再将式 (12), (22) 和 (32) 代入式 (29) 中可得

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}) &= (F_1^T(s, w)\text{cov}^{-1}(n)F_1(s, w))^{-1} + (F_1^T(s, w)\text{cov}^{-1}(n)F_1(s, w))^{-1} \\ &\quad \times F_1^T(s, w)\text{cov}^{-1}(n)E_1^{-1}(t, z_0, w)E_2(t, z_0, w)\text{cov}(m)E_2^T(t, z_0, w)E_1^{-T}(t, z_0, w) \\ &\quad \times \text{cov}^{-1}(n)F_1(s, w)(F_1^T(s, w)\text{cov}^{-1}(n)F_1(s, w))^{-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

另一方面, 计算式 (21) 两边关于向量 w 的 Jacobi 矩阵可知

$$F_2(s, w) = -E_1^{-1}(t, z_0, w)E_2(t, z_0, w), \quad (34)$$

将式 (34) 代入式 (33), 并结合式 (3) 可得

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} \right) &= \text{CRB}^{(a)}(s) + \text{CRB}^{(a)}(s) F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) \text{cov}(m) \\ &\quad \times F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w) \text{CRB}^{(a)}(s). \end{aligned} \quad (35)$$

根据式 (35) 可首先得 $\text{cov} \left(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} \right) \geq \text{cov} \left(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} \right) = \text{CRB}^{(a)}(s)$, 即系统误差必然会导致闭式解 Pwls-a 的方差增加, 进一步分析还可得如下命题.

命题 2 $\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}) \geq \text{CRB}^{(b)}(s)$.

证明 首先根据式 (7) 和矩阵求逆公式可得

$$\begin{aligned} \text{CRB}^{(b)}(s) &= \text{CRB}^{(a)}(s) + \text{CRB}^{(a)}(s) F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) \\ &\quad \times \left(\text{cov}^{-1}(m) + F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) - F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) \right. \\ &\quad \times F_1(s, w) \text{CRB}^{(a)}(s) F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) \left. \right)^{-1} \\ &\quad \times F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w) \text{CRB}^{(a)}(s). \end{aligned} \quad (36)$$

另一方面

$$\begin{aligned} &F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) - F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w) \text{CRB}^{(a)}(s) F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) \\ &= F_2^T(s, w) \text{cov}^{-1/2}(n) \cdot \Pi^\perp[\text{cov}^{-1/2}(n) F_1(s, w)] \cdot \text{cov}^{-1/2}(n) F_2(s, w) \geq O, \end{aligned} \quad (37)$$

式 (37) 利用了正交投影矩阵的半正定性. 结合式 (36) 和 (37) 可知

$$\begin{aligned} \text{CRB}^{(b)}(s) &\leq \text{CRB}^{(a)}(s) + \text{CRB}^{(a)}(s) F_1^T(s, w) \text{cov}^{-1}(n) F_2(s, w) \text{cov}(m) F_2^T(s, w) \\ &\quad \times \text{cov}^{-1}(n) F_1(s, w) \text{CRB}^{(a)}(s) \\ &= \text{cov} \left(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

命题 2 表明伪线性最小二乘闭式解 Pwls-a 在系统误差条件下难以达到相应的 CRB(即 $\text{CRB}^{(b)}(s)$), 也就是说它并不是渐近最优的估计器, 为此, 下面将给出一种能够达到 $\text{CRB}^{(b)}(s)$ 的伪线性最小二乘闭式解, 并称之为 Pwls-b.

4.2 存在系统误差条件下的伪线性最小二乘闭式解

在系统误差存在条件下, 向量 z_0 和 w 均无法获知, 只能用带误差的向量 z 和 v 来替代. 类似于式 (9), 这里首先引入如下误差向量

$$\varepsilon^{(b)} = a(z, v) - B(z, v)t, \quad (39)$$

根据一阶 Taylor 级数展开可得

$$\varepsilon^{(b)} \approx E_1(t, z_0, w)n + E_2(t, z_0, w)m = E(t, z_0, w)\xi, \quad (40)$$

于是有

$$\text{cov}(\varepsilon^{(b)}) = E_1(t, z_0, w) \text{cov}(n) E_1^T(t, z_0, w) + E_2(t, z_0, w) \text{cov}(m) E_2^T(t, z_0, w). \quad (41)$$

类似于式 (13), 在系统误差存在条件下可以建立如下加权最小二乘优化模型

$$\begin{aligned}\hat{t}_{\text{wls}}^{(b)} &= \arg \min_{t \in \mathbb{R}^{q \times 1}} (a(z, v) - B(z, v)t)^T \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) (a(z, v) - B(z, v)t) \\ &= (B^T(z, v) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) B(z, v))^{-1} B^T(z, v) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) a(z, v),\end{aligned}\quad (42)$$

类似地, $\text{cov}(\varepsilon^{(b)})$ 表达式中的 z_0 , w 和 t 均无法获知, 其中 z_0 和 w 可用其观测向量 z 和 v 来代替, 而 t 可用其任意无偏估计值 $\hat{t}_{\text{ue}}^{(b)}$ (通过非加权最小二乘估计获得) 来代替, 此时 $\text{cov}(\varepsilon^{(b)})$ 需要用 $\hat{\text{cov}}(\varepsilon^{(b)})$ 来表示, 于是有

$$\hat{t}_{\text{wls}}^{(b)} = (B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) B(z, v))^{-1} B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) a(z, v), \quad (43)$$

进一步可得目标位置状态向量 s 的伪线性加权最小二乘估计值为

$$\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)} = h^{-1}((B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) B(z, v))^{-1} B^T(z, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) a(z, v)). \quad (44)$$

为了便于描述, 下文将闭式解 (44) 记为 Pwls-b. 针对上述伪线性最小二乘闭式解, 这里给出如下两点注记.

注记 3 为了给出 $\text{cov}(\varepsilon^{(b)})$ 更加准确的估计, 可将上述计算步骤重复计算几轮 (通常 2~3 轮即可), 每一轮中用当前最新的估计值更新 $\hat{\text{cov}}(\varepsilon^{(b)})$.

注记 4 $\text{cov}(\varepsilon^{(b)})$ 中还包括误差向量 m 的协方差矩阵 $\text{cov}(m)$, 该值在实际中可通过先验统计的方式获得.

4.3 存在系统误差条件下闭式解 Pwls-b 的统计性能

本小节将推导上述伪线性加权最小二乘闭式解 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}$ 的理论性能, 并证明该渐近统计性能等于相应的 CRB, 为此, 需要首先推导 $\hat{t}_{\text{wls}}^{(b)}$ 的统计性能. 类似于式 (16) 中的分析可得

$$\hat{t}_{\text{wls}}^{(b)} \approx (B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) B(z_0, w))^{-1} B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) \varepsilon^{(b)}, \quad (45)$$

进一步有

$$\text{cov}(\hat{t}_{\text{wls}}^{(b)}) = (B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) B(z_0, w))^{-1}. \quad (46)$$

另一方面, 根据等式 $t = h(s)$ 可知

$$\hat{t}_{\text{wls}}^{(b)} \approx H(s) \hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)} \Leftrightarrow \hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)} \approx H^{-1}(s) \hat{t}_{\text{wls}}^{(b)}, \quad (47)$$

结合式 (46) 和 (47) 可得

$$\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}) = (H^T(s) B^T(z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) B(z_0, w) H(s))^{-1}. \quad (48)$$

可以证明上述理论性能等于相应的 CRB, 即有如下命题.

命题 3 $\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}) = \text{CRB}^{(b)}(s)$.

证明 首先将式 (22) 代入式 (48) 中可得

$$\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}) = (F_1^T(s, w) E_1^T(t, z_0, w) \text{cov}^{-1}(\varepsilon^{(b)}) E_1(t, z_0, w) F_1(s, w))^{-1}, \quad (49)$$

再将式 (41) 代入式 (49) 中可得

$$\text{cov} \left(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)} \right) = \left(F_1^T(s, w) \left(\text{cov}(n) + E_1^{-1}(t, z_0, w) E_2(t, z_0, w) \right)^{-1} F_1(s, w) \right)^{-1}, \quad (50)$$

最后将式 (34) 代入式 (50) 中可得

$$\text{cov} \left(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)} \right) = (F_1^T(s, w) (F_2(s, w) \text{cov}(m) F_2^T(s, w) + \text{cov}(n))^{-1} F_1(s, w))^{-1} = \text{CRB}^{(b)}(s). \quad (51)$$

根据命题 3 可知 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}$ 的渐近统计最优性, 其定位方差可渐近逼近系统误差存在条件下的 CRB(在门限效应发生前).

5 基于伪线性加权最小二乘闭式解的多目标联合定位

本节考虑在系统误差存在条件下, 将文中提出的伪线性加权最小二乘闭式解推广应用于多目标联合定位的场景. 假设需要对 D 个目标进行定位, 其中第 d 个目标的位置状态向量为 $s_d \in \mathbb{R}^{q_d \times 1}$, 并且关于它的非线性观测方程可建模为

$$z_d = z_{d0} + n_d = f_d(s_d, w) + n_d \in \mathbb{R}^{p_d \times 1}, \quad 1 \leq d \leq D, \quad (52)$$

式中, n_d 为加性观测误差, 假设它服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为 $\text{cov}(n_d) = E[n_d n_d^T]$, $z_{d0} = f_d(s_d, w)$ 表示没有误差条件下的观测向量, 其中的非线性观测方程可以转化为如下形式的伪线性方程:

$$a_d(z_{d0}, w) = B_d(z_{d0}, w) h_d(s_d) = B(z_{d0}, w) t_d, \quad 1 \leq d \leq D. \quad (53)$$

为了进行多目标联合定位, 需要将上述 D 个伪线性观测方程联立表示成如下更高维度的伪线性方程:

$$\bar{a}(\bar{z}_0, w) = \bar{B}(\bar{z}_0, w) \bar{h}(\bar{s}) = \bar{B}(\bar{z}_0, w) \bar{t}, \quad (54)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{z}_0 = [z_{10}^T \ z_{20}^T \ \cdots \ z_{D0}^T]^T \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times 1}, \bar{s} = [s_1^T \ s_2^T \ \cdots \ s_D^T]^T \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times 1}, \\ \bar{t} = [t_1^T \ t_2^T \ \cdots \ t_D^T]^T \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times 1}, \bar{h}(\bar{s}) = [h_1^T(s_1) \ h_2^T(s_2) \ \cdots \ h_D^T(s_D)]^T \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times 1}, \\ \bar{a}(\bar{z}_0, w) = [a_1^T(z_{10}, w) \ a_2^T(z_{20}, w) \ \cdots \ a_D^T(z_{D0}, w)]^T \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times 1}, \\ \bar{B}(\bar{z}_0, w) = [B_1^T(z_{10}, w) \ B_2^T(z_{20}, w) \ \cdots \ B_D^T(z_{D0}, w)]^T \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times \bar{q}}, \end{cases} \quad (55)$$

式中, $\bar{p} = \sum_{d=1}^D p_d$ 和 $\bar{q} = \sum_{d=1}^D q_d$.

在系统误差存在条件下, 向量 $\bar{z}_0$ 和 w 均无法获知, 只能用带误差的向量 $\bar{z}$ 和 v 来替代. 类似于式 (39), 这里首先引出如下误差向量:

$$\bar{\varepsilon}^{(b)} = \bar{a}(\bar{z}, v) - \bar{B}(\bar{z}, v) \bar{t}. \quad (56)$$

根据一阶 Taylor 级数展开, 并类似于式 (40) 中的分析过程可知

$$\bar{\varepsilon}^{(b)} \approx \bar{E}_1(\bar{t}, \bar{z}_0, w) \bar{n} + \bar{E}_2(\bar{t}, \bar{z}_0, w) m = \bar{E}(\bar{t}, \bar{z}_0, w) \bar{\xi}, \quad (57)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{\xi} = [\bar{n}^T \ m^T]^T = [n_1^T \ n_2^T \ \cdots \ n_D^T \ m^T]^T \in \mathbb{R}^{(\bar{p}+k) \times 1}, \\ \bar{E}(\bar{t}, \bar{z}_0, w) = [\bar{E}_1(\bar{t}, \bar{z}_0, w) \ \bar{E}_2(\bar{t}, \bar{z}_0, w)] \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times (\bar{p}+k)}, \\ \bar{E}_1(\bar{t}, \bar{z}_0, w) = \text{blkdiag}[E_{11}(t_1, z_{10}, w) \ E_{21}(t_2, z_{20}, w) \ \cdots \ E_{D1}(t_D, z_{D0}, w)] \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times \bar{p}}, \\ \bar{E}_2(\bar{t}, \bar{z}_0, w) = [E_{12}^T(t_1, z_{10}, w) \ E_{22}^T(t_2, z_{20}, w) \ \cdots \ E_{D2}^T(t_D, z_{D0}, w)]^T \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times k}, \end{cases} \quad (58)$$

式中

$$\begin{cases} E_{d1}(t_d, z_{d0}, w) = A_{d1}(z_{d0}, w) - [\dot{B}_{d11}(z_{d0}, w)t_d \ \dot{B}_{d12}(z_{d0}, w)t_d \ \cdots \ \dot{B}_{d1p}(z_{d0}, w)t_d] \in \mathbb{R}^{p_d \times p_d}, \\ E_{d2}(t_d, z_{d0}, w) = A_{d2}(z_{d0}, w) - [\dot{B}_{d21}(z_{d0}, w)t_d \ \dot{B}_{d22}(z_{d0}, w)t_d \ \cdots \ \dot{B}_{d2k}(z_{d0}, w)t_d] \in \mathbb{R}^{p_d \times k}, \\ A_{d1}(z_{d0}, w) = \frac{\partial a_d(z_{d0}, w)}{\partial z_{d0}^T} \in \mathbb{R}^{p_d \times p_d}, \dot{B}_{d1l}(z_{d0}, w) = \frac{\partial B_d(z_{d0}, w)}{\partial \langle z_{d0} \rangle_l} \in \mathbb{R}^{p_d \times q_d} (l = 1, 2, \dots, p), \\ A_{d2}(z_{d0}, w) = \frac{\partial a_d(z_{d0}, w)}{\partial w^T} \in \mathbb{R}^{p_d \times k}, \dot{B}_{d2l}(z_{d0}, w) = \frac{\partial B_d(z_{d0}, w)}{\partial \langle w \rangle_l} \in \mathbb{R}^{p_d \times q_d} (l = 1, 2, \dots, k), \end{cases} \quad (59)$$

于是有

$$\text{cov}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) = \bar{E}_1(\bar{t}, \bar{z}_0, w) \text{cov}(\bar{n}) \bar{E}_1^T(\bar{t}, \bar{z}_0, w) + \bar{E}_2(\bar{t}, \bar{z}_0, w) \text{cov}(m) \bar{E}_2^T(\bar{t}, \bar{z}_0, w), \quad (60)$$

式中

$$\text{cov}(\bar{n}) = \text{blkdiag}[\text{cov}(\bar{n}_1) \ \text{cov}(\bar{n}_2) \ \cdots \ \text{cov}(\bar{n}_D)]. \quad (61)$$

类似于式 (42), 在系统误差存在条件下可以建立多目标联合定位的加权最小二乘优化模型

$$\begin{aligned} \hat{t}_{\text{wls}}^{(b)} &= \arg \min_{\bar{t} \in \mathbb{R}^{q \times 1}} (\bar{a}(\bar{z}, v) - \bar{B}(\bar{z}, v)\bar{t})^T \text{cov}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) (\bar{a}(\bar{z}, v) - \bar{B}(\bar{z}, v)\bar{t}) \\ &= (\bar{B}^T(\bar{z}, v) \text{cov}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) \bar{B}(\bar{z}, v))^{-1} \bar{B}^T(\bar{z}, v) \text{cov}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) \bar{a}(\bar{z}, v). \end{aligned} \quad (62)$$

类似地, $\text{cov}(\bar{\varepsilon}^{(b)})$ 表达式中的 $\bar{z}_0, w$ 和 $\bar{t}$ 均无法获知, 其中 $\bar{z}_0$ 和 w 可用其观测向量 $\bar{z}$ 和 v 来代替, 而 $\bar{t}$ 可用其任意无偏估计值 $\hat{t}_{\text{ue}}^{(b)}$ (通过非加权最小二乘估计获得) 来代替, 此时 $\text{cov}(\bar{\varepsilon}^{(b)})$ 需要用 $\hat{\text{cov}}(\bar{\varepsilon}^{(b)})$ 来表示, 于是有

$$\hat{t}_{\text{wls}}^{(b)} = (\bar{B}^T(\bar{z}, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) \bar{B}(\bar{z}, v))^{-1} \bar{B}^T(\bar{z}, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) \bar{a}(\bar{z}, v), \quad (63)$$

进一步可得多目标联合位置状态向量 $\bar{s}$ 的伪线性加权最小二乘估计值为

$$\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)} = \bar{h}^{-1}((\bar{B}^T(\bar{z}, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) \bar{B}(\bar{z}, v))^{-1} \bar{B}^T(\bar{z}, v) \hat{\text{cov}}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) \bar{a}(\bar{z}, v)), \quad (64)$$

式中, $\bar{h}(\bar{s}) = [h_1^T(s_1) \ h_2^T(s_2) \ \cdots \ h_D^T(s_D)]^T$.

类似于第 4.3 小节中的分析过程可知 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}$ 的理论估计方差为

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}) &= (\bar{H}^T(\bar{s}) \bar{B}^T(\bar{z}_0, w) \text{cov}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{(b)}) \bar{B}(\bar{z}_0, w) \bar{H}(\bar{s}))^{-1} \\ &= (\bar{F}_1^T(\bar{s}, w) (\bar{F}_2(\bar{s}, w) \text{cov}(m) \bar{F}_2^T(\bar{s}, w) + \text{cov}(\bar{n}))^{-1} \bar{F}_1(\bar{s}, w))^{-1} = \text{CRB}^{(b)}(\bar{s}), \end{aligned} \quad (65)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{H}(\bar{s}) = \text{blkdiag}[H_1(s_1) \ H_2(s_2) \ \cdots \ H_D(s_D)] \in \mathbb{R}^{\bar{q} \times \bar{q}}, \\ \bar{F}_1(\bar{s}, w) = \text{blkdiag}[F_{11}(s_1, w) \ F_{21}(s_2, w) \ \cdots \ F_{D1}(s_D, w)] \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times \bar{q}}, \\ \bar{F}_2(\bar{s}, w) = [F_{12}^T(s_1, w) \ F_{22}^T(s_2, w) \ \cdots \ F_{D2}^T(s_D, w)]^T \in \mathbb{R}^{\bar{p} \times k}, \end{cases} \quad (66)$$

式中

$$H_d(s_d) = \frac{\partial h_d(s_d)}{\partial s_d^T} \in \mathbb{R}^{q_d \times q_d}, F_{d1}(s_d, w) = \frac{\partial f_d(s_d, w)}{\partial s_d^T} \in \mathbb{R}^{p_d \times q_d}, F_{d2}(s_d, w) = \frac{\partial f_d(s_d, w)}{\partial w^T} \in \mathbb{R}^{p_d \times k}. \quad (67)$$

根据命题 3 可知 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}$ 的渐近统计最优性, 其定位方差可渐近逼近系统误差存在条件下的 CRB(在门限效应发生前)。至此, 文中的理论分析已完成, 下节将给出一个具体的无源定位算例用以说明其应用。

6 基于伪线性最小二乘估计的定位算例 —— 协同 AOA/TDOA/GROA 信息的无源定位

这里考虑协同 AOA/TDOA/GROA 信息的无源定位场景。需要指出的是, 仅 TDOA 观测方程或仅 GROA 观测方程均无法直接转化成伪线性方程, 但若协同 AOA 观测方程则可以实现伪线性化。

假设目标的位置向量为 $s = [x^{(t)} \ y^{(t)} \ z^{(t)}]^T$, 现有 M 个观测站用于目标定位, 其中第 1 个观测站为主站, 其余观测站均为辅站, 并且第 m 个观测站的位置向量为 $w_m = [x_m^{(r)} \ y_m^{(r)} \ z_m^{(r)}]^T$, 由于 w_m 可以事先观测, 因此这里将其作为系统参量来看待, 而全部的系统参量可表示为 $w = [w_1^T \ w_2^T \ \cdots \ w_M^T]^T$ 。现协同 AOA/TDOA/GROA 信息进行目标定位, 相应的定位观测方程可以表示为 [5,19,23]

$$\begin{cases} \theta_m = \arctan \frac{y^{(t)} - y_m^{(r)}}{x^{(t)} - x_m^{(r)}}, \beta_m = \arctan \frac{z^{(t)} - z_m^{(r)}}{\sqrt{(x^{(t)} - x_m^{(r)})^2 + (y^{(t)} - y_m^{(r)})^2}}, \\ t_m = \frac{1}{c}(\|s - w_m\|_2 - \|s - w_1\|_2), g_m = \frac{\|s - w_m\|_2}{\|s - w_1\|_2}, \end{cases} \quad (68)$$

式中, θ_m 和 β_m 分别表示目标信源到达第 m 个观测站的方位角和仰角, t_m 表示目标信源到达第 m 个观测站与第 1 个观测站的时间差, g_m 表示目标信源到达第 m 个观测站与第 1 个观测站的增益比 [22,23]。

定义没有观测误差条件下的观测向量为

$$z_0 = [\theta^T \ \beta^T \ t^T \ g^T]^T \in \mathbb{R}^{(4M-2) \times 1}, \quad (69)$$

式中

$$\begin{cases} \theta = [\theta_1 \ \cdots \ \theta_M]^T \in \mathbb{R}^{M \times 1}, \beta = [\beta_1 \ \cdots \ \beta_M]^T \in \mathbb{R}^{M \times 1}, \\ t = [t_2 \ \cdots \ t_M]^T \in \mathbb{R}^{(M-1) \times 1}, g = [g_2 \ \cdots \ g_M]^T \in \mathbb{R}^{(M-1) \times 1}. \end{cases} \quad (70)$$

首先, 根据 AOA/TDOA/GROA 定位观测方程的代数特征可以得到如下等价的“伪线性”方程

$$\begin{aligned} x_m^{(r)} \sin \theta_m - y_m^{(r)} \cos \theta_m &= x^{(t)} \sin \theta_m - y^{(t)} \cos \theta_m, \left(x_m^{(r)} \cos \theta_m + y_m^{(r)} \sin \theta_m \right) \sin \beta_m - z_m^{(r)} \cos \beta_m \\ &= (x^{(t)} \cos \theta_m + y^{(t)} \sin \theta_m) \sin \beta_m - z^{(t)} \cos \beta_m, \\ ct_m + \left(x_m^{(r)} \cos \theta_m + y_m^{(r)} \sin \theta_m \right) \cos \beta_m + z_m^{(r)} \sin \beta_m &= \left(\left(x_1^{(r)} \cos \theta_1 + y_1^{(r)} \sin \theta_1 \right) \cos \beta_1 + z_1^{(r)} \sin \beta_1 \right) \\ &= (\cos \theta_m \cos \beta_m - \cos \theta_1 \cos \beta_1) x^{(t)} + (\sin \theta_m \cos \beta_m - \sin \theta_1 \cos \beta_1) y^{(t)} + (\sin \beta_m - \sin \beta_1) z^{(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(x_m^{(r)} \cos \theta_m + y_m^{(r)} \sin \theta_m \right) \cos \beta_m + z_m^{(r)} \sin \beta_m - g_m \left(\left(x_1^{(r)} \cos \theta_1 + y_1^{(r)} \sin \theta_1 \right) \cos \beta_1 + z_1^{(r)} \sin \beta_1 \right) \\
& = (\cos \theta_m \cos \beta_m - g_m \cos \theta_1 \cos \beta_1) x^{(t)} + (\sin \theta_m \cos \beta_m - g_m \sin \theta_1 \cos \beta_1) y^{(t)} \\
& + (\sin \beta_m - g_m \sin \beta_1) z^{(t)}.
\end{aligned} \quad (71)$$

若将上式表示为矩阵形式可得

$$a(z_0, w) = B(z_0, w)h(s) = B(z_0, w)t, \quad (72)$$

式中

$$\begin{cases} t = h(s) = s = [x^{(t)} \ y^{(t)} \ z^{(t)}]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \\ a(z_0, w) = [a_\theta^T(z_0, w) \ a_\beta^T(z_0, w) \ a_t^T(z_0, w) \ a_g^T(z_0, w)]^T \in \mathbb{R}^{(4M-2) \times 1}, \\ B(z_0, w) = [B_\theta^T(z_0, w) \ B_\beta^T(z_0, w) \ B_t^T(z_0, w) \ B_g^T(z_0, w)]^T \in \mathbb{R}^{(4M-2) \times 3}, \end{cases} \quad (73)$$

式中

$$\begin{cases} a_\theta(z_0, w) = \begin{bmatrix} x_1^{(r)} \sin \theta_1 - y_1^{(r)} \cos \theta_1 \\ \vdots \\ x_M^{(r)} \sin \theta_M - y_M^{(r)} \cos \theta_M \end{bmatrix}, a_\beta(z_0, w) = \begin{bmatrix} \phi_1^{(r)} \sin \beta_1 - z_1^{(r)} \cos \beta_1 \\ \vdots \\ \phi_M^{(r)} \sin \beta_M - z_M^{(r)} \cos \beta_M \end{bmatrix}, \\ a_t(z_0, w) = \begin{bmatrix} ct_2 + \rho_2^{(r)} - \rho_1^{(r)} \\ \vdots \\ ct_M + \rho_M^{(r)} - \rho_1^{(r)} \end{bmatrix}, a_g(z_0, w) = \begin{bmatrix} \rho_2^{(r)} - g_2 \rho_1^{(r)} \\ \vdots \\ \rho_M^{(r)} - g_M \rho_1^{(r)} \end{bmatrix}, \\ \phi_m^{(r)} = x_m^{(r)} \cos \theta_m + y_m^{(r)} \sin \theta_m, \rho_m^{(r)} = (x_m^{(r)} \cos \theta_m + y_m^{(r)} \sin \theta_m) \cos \beta_m + z_m^{(r)} \sin \beta_m, \end{cases} \quad (74)$$

$$\begin{cases} B_\theta(z_0, w) = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \theta_M & -\cos \theta_M & 0 \end{bmatrix}, B_\beta(z_0, w) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \sin \beta_1 & \sin \theta_1 \sin \beta_1 & -\cos \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \theta_M \sin \beta_M & \sin \theta_M \sin \beta_M & -\cos \beta_M \end{bmatrix}, \\ B_t(z_0, w) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \beta_2 - \cos \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \theta_2 \cos \beta_2 - \sin \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \beta_2 - \sin \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \theta_M \cos \beta_M - \cos \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \theta_M \cos \beta_M - \sin \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \beta_M - \sin \beta_1 \end{bmatrix}, \\ B_g(z_0, w) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \beta_2 - g_2 \cos \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \theta_2 \cos \beta_2 - g_2 \sin \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \beta_2 - g_2 \sin \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \theta_M \cos \beta_M - g_M \cos \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \theta_M \cos \beta_M - g_M \sin \theta_1 \cos \beta_1 & \sin \beta_M - g_M \sin \beta_1 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (75)$$

根据式 (73)~(75) 可得

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(t, z_0, w) \\ = A_1(z_0, w) - [\dot{B}_{1\theta_1}(z_0, w)t \cdots \dot{B}_{1\theta_M}(z_0, w)t \dot{B}_{1\beta_1}(z_0, w)t \cdots \dot{B}_{1\beta_M}(z_0, w)t \\ \dot{B}_{1t_2}(z_0, w)t \cdots \dot{B}_{1t_M}(z_0, w)t \dot{B}_{1g_2}(z_0, w)t \cdots \dot{B}_{1g_M}(z_0, w)t], \\ E_2(t, z_0, w) \\ = A_2(z_0, w) - [\dot{B}_{2x_1^{(r)}}(z_0, w)t \dot{B}_{2y_1^{(r)}}(z_0, w)t \dot{B}_{2z_1^{(r)}}(z_0, w)t \\ \dot{B}_{2x_2^{(r)}}(z_0, w)t \dot{B}_{2y_2^{(r)}}(z_0, w)t \dot{B}_{2z_2^{(r)}}(z_0, w)t \cdots \\ \dot{B}_{2x_M^{(r)}}(z_0, w)t \dot{B}_{2y_M^{(r)}}(z_0, w)t \dot{B}_{2z_M^{(r)}}(z_0, w)t], \end{array} \right. \quad (76)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(z_0, w) = \frac{\partial a(z_0, w)}{\partial z_0^T}, A_2(z_0, w) = \frac{\partial a(z_0, w)}{\partial w^T}, \dot{B}_{1\theta_m}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial \theta_m}, \\ \dot{B}_{1\beta_m}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial \beta_m}, \dot{B}_{1t_m}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial t_m}, \dot{B}_{1g_m}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial g_m}, \\ \dot{B}_{2x_m^{(r)}}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial x_m^{(r)}}, \dot{B}_{2y_m^{(r)}}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial y_m^{(r)}}, \dot{B}_{2z_m^{(r)}}(z_0, w) = \frac{\partial B(z_0, w)}{\partial z_m^{(r)}}, \end{array} \right. \quad (77)$$

式 (77) 中各个子矩阵的表达式可通过一阶偏导获得, 鉴于篇幅限制这里不再给出。

基于上述推导, 利用式 (12) 和 (15) 可以获得无系统误差条件下的渐近统计最优的定位闭式解 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}$, 利用式 (24) 可计算其渐近估计方差阵 $\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)})$ (亦即 $\text{CRB}^{(a)}(s)$)。当存在系统误差时, 利用式 (35) 可首先计算定位闭式解 $\bar{s}_{\text{Pwls}}^{(a)}$ 在系统误差条件下的渐近估计方差阵 $\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(a)})$, 再利用式 (41) 和 (44) 可以获得渐近统计最优的定位闭式解 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}$, 最后利用式 (51) 可计算其渐近估计方差阵 $\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)})$ (亦即 $\text{CRB}^{(b)}(s)$)。另一方面, 当对多目标进行联合定位时, 可利用式 (60) 和 (64) 获得渐近统计最优的定位闭式解 $\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)}$, 利用式 (51) 可计算其渐近估计方差阵 $\text{cov}(\hat{s}_{\text{Pwls}}^{(b)})$ (亦即 $\text{CRB}^{(b)}(\bar{s})$)。

7 数值实验

本节将以协同 AOA/TDOA/GROA 信息的无源定位场景为例进行仿真实验, 并采用文中的伪线性加权最小二乘闭式解进行目标位置的解算。

7.1 针对单目标的仿真实验

本小节针对单目标进行仿真实验, 并将文中的伪线性加权最小二乘定位闭式解与 Taylor 级数迭代算法, CTLS 迭代算法以及 CRB 进行性能比较。

假设共有 6 个观测站, 观测站的三维坐标见表 1, 目标处于静止状态, 根据目标距离观测站位置的远近可分为 3 种情况: 第 1 种情况是目标位于远场处, 其三维坐标为 (4500 m, 5500 m, 6500 m); 第 2 种情况是目标位于近场处, 其三维坐标为 (1500 m, 1500 m, 1500 m); 第 3 种情况是目标位于远场和近场之间, 其三维坐标为 (2000 m, 2800 m, 2500 m)。另一方面, 假设 AOA, TDOA 和 GROA 的观测误差均服从独立的零均值高斯分布, 并且观测站位置精确已知。首先, 固定 TDOA 和 GROA 的估计标准差为 $\sigma_{\text{TDOA}} = 0.3/c$ 和 $\sigma_{\text{GROA}} = 0.003$, 图 1 给出了目标定位均方根误差随着 AOA 估计标准差

表 1 观测站三维坐标

Table 1 The 3-D coordinate of the observers

Serial number of observer	$x(\text{m})$	$y(\text{m})$	$z(\text{m})$
1	300	100	150
2	400	150	100
3	300	500	200
4	350	200	100
5	-100	-100	-100
6	200	-300	-200

图 1 目标定位均方根误差随着 σ_{AOA} 的变化曲线
Figure 1 Location RMSE changing with σ_{AOA}

图 2 目标定位均方根误差随着 σ_{TDOA} 的变化曲线
Figure 2 Location RMSE changing with σ_{TDOA}

图 3 目标定位均方根误差随着 σ_{GROA} 的变化曲线
Figure 3 Location RMSE changing with σ_{GROA}

σ_{AOA} 的变化曲线; 接着, 固定 GROA 和 AOA 的估计标准差为 $\sigma_{\text{GROA}} = 0.003$ 和 $\sigma_{\text{AOA}} = 0.1^\circ$, 图 2 给出了目标定位均方根误差随着 TDOA 估计标准差 σ_{TDOA} 的变化曲线; 最后, 固定 TDOA 和 AOA 的估计标准差为 $\sigma_{\text{TDOA}} = 0.3/c$ 和 $\sigma_{\text{AOA}} = 0.1^\circ$, 图 3 给出了目标定位均方根误差随着 GROA 估计

标准差 σ_{GROA} 的变化曲线. 需要强调的是, 由于这里并没有考虑观测站位置估计误差的影响, 因此在图 1~3 中无需给出闭式解 Pwls-b 的性能曲线, 而且图中 Taylor 级数迭代算法和 CTLS 迭代算法的性能曲线均是在迭代初值设为真实值的条件下所计算出的.

从图 1~3 中可以得到如下结论.

(1) 无论将目标位置设为上述哪种情形, 文中的伪线性加权最小二乘定位闭式解的理论性能与相应的 CRB(即 $\text{CRB}^{(a)}(s)$), Taylor 级数迭代算法以及 CTLS 迭代算法的性能都能基本重合, 从而验证了第 2 节中理论分析的有效性.

(2) 在相同的仿真实验条件下, 对近场源的定位精度始终优于对远场源的定位精度, 这主要是由于其中包含有 AOA 观测量.

(3) 相比 Taylor 级数迭代算法和 CTLS 迭代算法而言, 尽管伪线性加权最小二乘闭式解难以进一步改善定位性能, 但它不需要选取迭代初值, 不存在迭代发散等问题. 事实上, 通过大量仿真实验会发现, 当两种迭代算法所选取的初值远离目标位置真实值时, 它们都会以较大的概率产生发散现象, 并且随着观测误差的增加, 这一问题会愈加明显.

下面将在观测站位置估计存在误差的条件下进行数值实验, 并将文中的定位闭式解与 Taylor 级数迭代算法以及相应的 CRB 进行比较. 需要指出的是, 这里将给出两种 Taylor 级数迭代算法的定位结果, 第一种是不考虑系统误差的影响 (例如文献 [6] 中的算法), 第二种是考虑对系统误差的抑制 (例如文献 [15,17,24] 中的算法), 为了便于区分, 不妨将前者称为 Taylor-a, 将后者称为 Taylor-b. 仿真条件基本同上, 只是将 AOA, TDOA 和 GROA 的估计标准差分别固定为 $\sigma_{\text{AOA}} = 0.1^\circ$, $\sigma_{\text{TDOA}} = 0.2/c$ 和 $\sigma_{\text{GROA}} = 0.002$, 并且假设观测站位置估计误差服从零均值高斯分布, 图 4~6 分别给出了当目标位置设为上述 3 种情况时, 目标定位均方根误差随着观测站位置估计标准差的变化曲线, 其中给出了定位闭式解 Pwls-a 与 Taylor-a 以及定位闭式解 Pwls-b 与 Taylor-b 的性能曲线.

从图 4~6 中可以得到如下结论.

(1) 当观测站位置存在估计误差时, 文中的闭式解 Pwls-a 与迭代算法 Taylor-a 的定位性能都会明显下降, 并且它们的性能曲线与式 (35) 给出的理论值基本重合, 这一方面验证了文中理论分析的有效性, 同时也说明了两者的鲁棒性近似且都较弱.

(2) 文中的定位闭式解 Pwls-b 与迭代算法 Taylor-b 都能够较好地抑制系统误差的影响, 并且它们的性能曲线与相应的 CRB(即 $\text{CRB}^{(b)}(s)$) 吻合得较好, 这不仅进一步验证了文中的理论分析, 同时也验证了文献 [15,17,24] 中关于 Taylor 级数迭代算法的性能推导.

(3) 定位闭式解 Pwls-b 与迭代算法 Taylor-b 的性能曲线均无法达到无系统误差条件下的 CRB(即 $\text{CRB}^{(a)}(s)$).

7.2 针对两目标的仿真实验

本小节针对两目标进行仿真实验, 并将两目标协同定位与两目标独立定位的性能进行比较, 由于这里重点强调协同多目标定位所带来的性能增益, 因此下面仅利用文中的伪线性最小二乘闭式解 Pwls-b(包括独立定位和联合定位两种解) 进行实验, 并将其性能与相应的 CRB(包括独立定位和联合定位两种界) 进行比较.

仿真条件基本同上, 只是假设存在两个目标, 目标 1 的三维坐标为 (2500 m, 2800m, 2400 m), 目标 2 的三维坐标为 (2000 m, 2000 m, 2000 m). 首先将观测站位置估计标准差固定为 5 m, 而将 AOA, TDOA 和 GROA 的估计标准差分别设为 $\sigma_{\text{AOA}} = 0.01^\circ \times \delta$, $\sigma_{\text{TDOA}} = 0.1 \times \delta/c$ 和 $\sigma_{\text{GROA}} = 0.001 \times \delta$ (这里将 δ 称为定位参数扰动量), 图 7 和 8 分别给出了两个目标定位均方根误差随着 δ 的变化曲线; 接

图 4 目标定位均方根误差随着观测站位置估计标准差的变化曲线

Figure 4 Location RMSE changing with standard deviation of observer position estimation (target coordinate is (4500 m, 5500 m, 6500 m))

图 5 目标定位均方根误差随着观测站位置估计标准差的变化曲线

Figure 5 Location RMSE changing with standard deviation of observer position estimation (target coordinate is (2000 m, 2800 m, 2500 m))

图 6 目标定位均方根误差随着观测站位置估计标准差的变化曲线

Figure 6 Location RMSE changing with standard deviation of observer position estimation (target coordinate is (1500 m, 1500 m, 1500 m))

着, 分别固定 AOA, TDOA 和 GROA 的估计标准差为 $\sigma_{\text{AOA}} = 0.1^\circ$, $\sigma_{\text{TDOA}} = 0.1/c$ 和 $\sigma_{\text{GROA}} = 0.02$, 图 9 和 10 分别给出了两个目标定位均方根误差随着观测站位置估计标准差的变化曲线。

从图 7~10 中可以得到如下结论。

- (1) 在系统误差存在条件下, 多目标联合定位比多目标独立定位能够获得更高的定位精度。
- (2) 相比于多目标独立定位, 多目标联合定位的优势随着定位参数扰动量 δ 的增加而逐渐减小, 这是因为随着定位观测量估计误差的增加, 多目标联合定位的优势将会逐渐减弱。
- (3) 相比于多目标独立定位, 多目标联合定位的优势随着观测站位置估计误差的增加而逐渐增大, 这是因为当系统误差的影响逐渐占据主导作用时, 多目标联合定位的优势将会逐渐显现。
- (4) 无论是多目标独立定位还是多目标联合定位, 定位闭式解 Pwls-b 的性能均可以达到相应的 CRB。

图 7 目标 1 的定位均方根误差随着 δ 的变化曲线

Figure 7 Location RMSE for the first target changing with δ

图 8 目标 2 的定位均方根误差随着 δ 的变化曲线

Figure 8 Location RMSE for the second target changing with δ

图 9 目标 1 的定位均方根误差随着观测站位置估计标准差的变化曲线

Figure 9 Location RMSE for the first target changing with standard deviation of observer position estimation

图 10 目标 2 的定位均方根误差随着观测站位置估计标准差的变化曲线

Figure 10 Location RMSE for the second target changing with standard deviation of observer position estimation

8 结束语

本文基于无源定位问题中的一类特殊的观测方程, 提出一种将非线性观测方程进行伪线性化处理, 从而能够实现目标位置闭式解算的定位理论框架. 本文首先在不限定具体物理观测量的前提下, 建立将非线性观测方程转化为伪线性方程的代数模型, 然后分别在无系统误差和有系统误差这两种情况下推导出相应的伪线性加权最小二乘定位闭式解及其理论性能, 最后将文中的定位闭式解和性能分析推广应用于多目标联合定位的场景中. 为了将较为抽象的理论框架应用于具体的定位场景中, 文中以协同 AOA/TDOA/GROA 信息的无源定位背景为例, 阐述其具体应用, 并通过数值实验验证文中理论分析的有效性和定位方法的优越性.

需要指出的是, 由于文中的理论框架并不局限于特定的物理观测量, 因此相关结论还可推广应用于任意可进行伪线性化处理的定位方程中, 例如, 协同 AOA/TDOA/FDOA 信息的无源定位、协同

AOA/TOA/FOA 信息的无源定位等.

参考文献

- 1 Sun Z K, Zhou Y Y, He L X. Single/Multi-base Active and Passive Location Technology. Beijing: National Defense Industry Press, 1996 [孙仲康, 周一宇, 何黎星. 单多基地有源无源定位技术. 北京: 国防工业出版社, 1996]
- 2 Sun Z K, Guo F C, Feng D W. Single-Base Passive Location and Track Technology. Beijing: National Defense Industry Press, 2008 [孙仲康, 郭福成, 冯道旺. 单站无源定位跟踪技术. 北京: 国防工业出版社, 2008]
- 3 Cheung K W, So H C, Ma W K, et al. Least squares algorithms for time-of-arrival-based mobile location. *IEEE Trans Signal Process*, 2004, 52: 1121–1128
- 4 Ma Z H, Ho K C. TOA localization in the presence of random sensor position errors. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Prague, 2011. 2468–2471
- 5 Chan Y T, Ho K C. A simple and efficient estimator by hyperbolic location. *IEEE Trans Signal Process*, 1994, 42: 1905–1915
- 6 Xiong J Y, Wang W, Zhu Z L. A new TDOA algorithm based on Taylor series expansion in cellular networks. *J Commun*, 2004, 25: 144–150 [熊瑾煜, 王巍, 朱中梁. 基于泰勒级数展开的蜂窝 TDOA 定位算法. *通信学报*, 2004, 25: 144–150]
- 7 Wang D, Lin S C, Li C S. A nearly unbiased passive location algorithm for two stations based on direction of arrival and time difference of arrival measurements. *J Radar Sci Technol*, 2008, 6: 371–377 [王鼎, 林四川, 李长胜. 双站基于角度和时差的近似无偏定位. *雷达科学与技术*, 2008, 6: 371–377]
- 8 Yang K, An J P, Bu X Y, et al. Constrained total least-squares location algorithm using time-difference-of-arrival measurements. *IEEE Trans Veh Technol*, 2010, 59: 1558–1562
- 9 Chen S C, He H Y, Yu H G, et al. Constrained total least-squares for source location using TDOA measurements in the presence of sensor position errors. *Acta Aeronaut et Astronaut Sin*, 2013, 34: 1165–1173 [陈少昌, 贺慧英, 禹华钢, 等. 传感器位置误差条件下的约束总体最小二乘时差定位算法. *航空学报*, 2013, 34: 1165–1173]
- 10 Mason J. Algebraic two-satellite TOA/FOA position solution on an ellipsoidal earth. *IEEE Trans Aerospace Electron Syst*, 2004, 40: 1087–1092
- 11 Ho K C, Xu W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Trans Signal Process*, 2004, 52: 2453–2463
- 12 Ho K C, Chan Y T. An asymptotically unbiased estimator for bearings-only and Doppler-bearing target motion analysis. *IEEE Trans Signal Process*, 2006, 54: 809–822
- 13 Ho K C, Lu X, Kovavisaruch L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: analysis and solution. *IEEE Trans Signal Process*, 2007, 55: 684–696
- 14 Yang L, Sun M, Ho K C. Doppler-bearing tracking in the presence of observer location error. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 4082–4087
- 15 Li J Z, Guo F C. Performance analysis for passive source localization using merely FDOA measurements with erroneous receiver positions. *Acta Aeronaut et Astronaut Sin*, 2011, 32: 1497–1505 [李金洲, 郭福成. 传感器位置误差条件下仅用到达频率差的无源定位性能分析. *航空学报*, 2011, 32: 1497–1505]
- 16 Yu H G, Huang G M, Gao J, et al. An efficient constrained weighted least squares algorithm for moving source location using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2012, 11: 44–47
- 17 Lu X N, Ho K C. Taylor-series technique for source localization using AOAs in the presence of sensor location errors. In: *Proceedings of the 4th IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing*, Waltham, 2006, 190–194

- 18 Wang D, Li C S. Nearly unbiased algorithm for 3-D passive location with bearings-only measurements by two stations. *Mod Defence Technol*, 2009, 37: 108–113 [王鼎, 李长胜. 一种双站交叉定位无偏估计滤波算法. *现代防御技术*, 2009, 37: 108–113]
- 19 Wang D, Zhang L, Wu Y. The structured total least squares algorithm for passive location based on angle information. *Sci China Inf Sci*, 2009, 52: 1043–1054
- 20 Xu Z, Qu C W, Wang C H, et al. Research on a passive localization algorithm based on minimizing the generalized Rayleigh quotient (in Chinese). *Acta Electron Sin*, 2012, 40: 2446–2450 [徐征, 曲长文, 王昌海, 等. 一种基于最小化广义 Rayleigh 商的无源定位算法研究. *电子学报*, 2012, 40: 2446–2450]
- 21 Ho K C, Sun M. An accurate algebraic closed-form solution for energy-based source localization. *IEEE Trans Audio Speech Lang Process*, 2007, 15: 2542–2550
- 22 Ho K C, Sun M. Passive source localization using time differences of arrival and gain ratios of arrival. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 464–477
- 23 Hao B J, Li Z, Ren Y M, et al. Passive multiple disjoint sources localization using TDOAs and GROAs. *Acta Electron Sin*, 2012, 40: 2374–2381 [郝本建, 李赞, 任耘梅, 等. 基于 TDOAs 与 GROAs 的多信号源被动定位. *电子学报*, 2012, 40: 2374–2381]
- 24 Wang D. The Taylor-series location and its performance analysis with erroneous observer positions. *J Astronaut*, 2013, 34: 1634–1643 [王鼎. 观测站位置状态扰动下 Taylor 级数迭代定位方法及性能分析. *宇航学报*, 2013, 34: 1634–1643]
- 25 Cheung K W, So H C, Ma W K, et al. A constrained least squares approach to mobile positioning: algorithms and optimality. *EURASIP J Appl Signal Process*, 2006, 2006: 150
- 26 Yang T C, Yu C Q, Wang T P, et al. A single observer location method under the scatter signals position disturbance situation: the constraint total least square method. *Sci Sin Inform*, 2011, 41: 377–384 [杨天池, 宇超群, 王天鹏, 等. 散射体位置扰动条件下约束总体最小二乘单站定位方法. *中国科学: 信息科学*, 2011, 41: 377–384]

A pseudo-linear weighted least-squares solution and performance analysis based on passive location measurement equations

WANG Ding^{1*}, LI ChangSheng² & ZHANG RuiJie³

¹ *Institute of Information Systems Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China;*

² *Training Department, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China;*

³ *State Key Laboratory of Mathematical Engineering and Advanced Computing, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China*

*E-mail: wang_ding814@aliyun.com

Abstract Utilizing a type of special measurement equation from the passive location problem, a novel theoretical analysis framework, which transforms nonlinear localization equations into pseudo-linear equalities and locates the source with a closed-form solution, is presented. An algebraic model is constructed for pseudo-linearizing the nonlinear localization equations, and the corresponding pseudo-linear weighted least-squares solution, namely Pwls-a, is provided under the assumption that system errors (i.e., observer position and velocity perturbations) are not present. Moreover, the estimation covariance matrix of solution Pwls-a is derived through a first-order perturbation analysis method, and its theoretical performance is proved to attain the corresponding Cramér-Rao bound (CRB). Furthermore, the statistical covariance matrix is also mathematically analyzed in a case in which system errors exist; the result shows that its asymptotical estimation variance cannot reach the relevant CRB in

the presence of system errors. As a consequence, a pseudo-linear weighted least-squares solution, namely Pwls-b, is proposed to mitigate the effects of system errors, and its statistical performance is proved to be asymptotically equal to the CRB under the existence of system errors. In addition, the solution Pwls-b is extended into a scenario in which multiple targets are present. Finally, a location scenario with AOA/TDOA/GROA measurements is used as an example to describe the application of the pseudo-linearization method. Simulation experiments are conducted to show the effectiveness of the theoretical analysis and the advantages of the location solutions in this paper.

Keywords passive localization, measurement errors, system errors, pseudo-linear, least square, closed-form solution, Cramér-Rao bound

WANG Ding was born in 1982. He received his Ph.D. degree from PLA Information Engineering University in 2011. Currently, he is a lecturer at the Information System Engineering Institute of the PLA Information Engineering University. His main research interests include array signal processing and passive location.