综 述

分片代数超曲面的构造与参系数分片多项式系统的研究进展

献给徐利治教授 95 华诞

赖义生*, 段德鑫, 方小珂, 杜伟平

浙江工商大学数学系, 杭州 310018

E-mail: lai yisheng67@163.com, duandexin0808@163.com, fangxk10@163.com, weipingdu@163.com

收稿日期: 2015-01-30; 接受日期: 2015-03-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271328) 资助项目

摘要 多元样条是具有一定光滑度的分片多项式, 具有一定光滑度的分片代数 (超) 曲面 (即多元样条的零点集) 是表示或逼近曲面的重要工具. 研究一种有效方法用于构造具有一定光滑度和预先给定拓扑的实分片代数超曲面是解决如何表示或逼近具有一定拓扑结构 (特别是复杂拓扑结构) 的几何物体问题的重要途径之一, 也是计算几何与代数几何研究中一个新的重要主题. 参系数分片多项式系统不仅与曲面相交、拼接和过渡曲面生成等一系列研究密切相关, 而且是参系数半代数系统的本质推广. 本文介绍分片代数超曲面的构造与参系数分片多项式系统的一些最近的研究进展.

关键词 分片代数超曲面 参系数分片多项式系统 Viro 方法 图 实零点数

MSC (2010) 主题分类 65D07, 65D10, 41A15, 41A46, 14G30, 14H99, 14M15, 14P25, 14Q10

1 引言

设 Δ 是 $\mathbb{R}^n$ 中区域 Ω 的一个多面体剖分. 假如 Δ 是一个有限的多面体集合, 使得 Δ 中每个元素的面和任两元素的交还是 Δ 的元素, 则称 Δ 为一个 n 维复形, 且每一个 Δ 的相对于包含关系的最大元素是一个 n 维多面体. 我们把 Δ 的 k 维元素称作 k 维胞腔 (参见文献 [1–6]).

若两个 n 维多面体在 Δ 中沿 $n-1$ 维公共面相交, 则称这两个 n 维多面体是相邻的. 假如对每个 $\tau \in \Delta$ (包括空集), 以及 Δ 的包含 τ 的任何两个 n 维多面体 σ 和 σ' , 可以被一个 Δ 中的多面体序列 $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m = \sigma'$ 连接起来; 每一个 σ_i 都是 n 维的; 每一个 σ_i 都包含 τ ; 并且对每一个 i , σ_i 和 σ_{i+1} 都是相邻的, 则称 Δ 是遗传复形 (参见文献 [3–6]).

众所周知 (参见文献 [4, 7, 8]), Δ 中的任意 n 维胞腔都可写成有限个仿射半空间的交, 即

$$\sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1^{[i]}(x) \geq 0, \dots, g_{\eta_i}^{[i]}(x) \geq 0\}, \quad (1.1)$$

其中 $g_1^{[i]}(x), \dots, g_{\eta_i}^{[i]}(x)$ 是 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 中的一次多项式, $g_1^{[i]}(x) = 0, \dots, g_{\eta_i}^{[i]}(x) = 0$ 是 σ_i 的各个面.

设 Δ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可遗传 n 维复形, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 是 Δ 中 m 个编了号的 n 维胞腔. 记 $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \sigma_i$. 下面给出 $C^r(\Delta)$ 和 $C_k^r(\Delta)$ [1-3] 的正式定义.

定义 1.1 [1-3] 假设 Δ 是一个 n 维复形, r 是一个非负整数. $C^r(\Delta)$ 是 Ω 上的 C^r 连续函数 f 的集合 (即 f 在 Ω 上 r 阶偏导存在且连续), 使得对于任给 $\delta \in \Delta$, f 在 δ 上的函数 $f|_\delta$ 是多项式函数 $f|_\delta \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

k 次 r 阶光滑的多元样条空间 $C_k^r(\Delta) := \{f \in C^r(\Delta) \mid \deg(f|_{\sigma_i}) \leq k, i = 1, \dots, m\}$. 由文献 [1, 2] 可知, $C^r(\Delta)$ 是一个 Noether 环, 称为 C^r 样条环, $C_k^r(\Delta)$ 是一个有限维的线性空间.

若存在 $f_1 \in C_{k_1}^{r_1}(\Delta), f_2 \in C_{k_2}^{r_2}(\Delta), \dots, f_s \in C_{k_s}^{r_s}(\Delta)$, 使得

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, s\},$$

则称 $\mathcal{Z}$ 是一个分片多项式系统 (或称为一个分片代数簇). 倘若一个点落在 Δ 的某个 n 维胞腔内, 则 $\mathcal{Z}$ 的这个点 (即分片多项式 $f_1, \dots, f_s$ 的一个公共零点) 被称为是无挠实零点.

若 $f \in C^r(\Delta)$, 则称 $\mathcal{Z}(f)$ 是一个 C^r 分片代数超曲面. 一维的分片代数超曲面称为 C^r 分片代数曲线, 二维的分片代数超曲面称为 C^r 分片代数曲面.

定义 1.2 [4, 6] 设 $f_\omega \in C_{k_\omega}^{r_\omega}(\Delta)$, $\omega = 1, \dots, n$, 且对 Δ 中的每个 n 维胞腔 σ_i , $f_\omega|_{\sigma_i}$ 的系数都在 $\mathbb{R}[V]$ 中, 即 $f_\omega|_{\sigma_i} \in \mathbb{R}[V][x_1, \dots, x_n]$, 其中 $V = (v_1, v_2, \dots, v_\tau)$ 和 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 分别是参数和变元, 则称 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s)$ 为参数分片多项式系统. 倘若对于几乎所有的参数 V 的值, 集

$$\Upsilon_i := \{X \in \mathbb{C}^n \mid f_\omega|_{\sigma_i}(V, X) = 0, \dots, f_\omega|_{\sigma_i}(V, X) = 0\}, \quad i = 1, \dots, m$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中是零维的, 则称 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s)$ 是零维参数分片多项式系统.

鉴于分片多项式既有一定的整体光滑性又有局部性的特性, 使得其在应用上有很大的自由度、灵活性和方便性, 因此, 为了应用方便, 具有一定光滑度的分片代数 (超) 曲面与分片多项式系统已成为表示或逼近几何物体 (如曲面、曲线) 的重要方法之一 (参见文献 [1, 2, 9]). 众所周知, 如何较好地表示或逼近具有一定拓扑结构 (特别是复杂拓扑结构) 的几何物体一直是计算几何、几何设计等许多应用领域必须面对的问题. 解决这个问题的重要途径之一在于, 研究一种有效方法用于构造具有预先给定拓扑 (特别是具有复杂拓扑结构) 的实分片代数超曲面. 这也是计算几何与代数几何研究中一个新的主题.

30 年以来, 在实代数几何中一个重要的方向是, 构造具有给定次数与给定拓扑的实代数超曲面. 这一方向发展的核心是 Viro 黏合理论及其产生的 Viro 黏合方法 (特别是组合拼合方法) (参见文献 [10-12]). Viro 黏合理论是代数几何中 (关于实代数簇拓扑) 最重要的理论之一, 目前为止, Viro 方法是构造具有预先给定拓扑 (特别是具有复杂拓扑结构) 的实代数簇的一种最有效的方法 (参见文献 [10-17]). 该理论解决了 Hilbert 第 16 问题. Viro 方法粗略地讲, 先有一多胞形 P 的一个凸多面体子剖分 $\{P_i, i \in I\}$, 然后有以 P_i 为 Newton 多胞形的实的非退化多项式集 $\{f_i, i \in I\}$, 这些多项式 f_i 在它们的 Newton 多胞形的公共面上的截断是一致的. 由此, 定义了以 P 为 Newton 多胞形的 Viro 多项式 f , Viro 定理断言, 由 f 定义的实超曲面 $\mathcal{Z}(f)$ 的拓扑可以通过将实超曲面 $\mathcal{Z}(f_i)$ 的片黏合在一起所覆盖 (参见文献 [10-17]).

众所周知, 在 CAGD 和几何造型中, 超曲面一般具有复杂的拓扑或者几何结构, 而且, 由于曲面通常定义在单纯形上, 所以, 通常表示为 Bernstein-Bézier 形式. 多项式写成 Bernstein-Bézier 表示式具有显著的优点, 这是因为它的系数反应了多项式曲面形状的几何信息, 相应单纯形的重心坐标是仿射不变的, 而且 Bernstein-Bézier 基多项式显示了许多重要性质 (参见文献 [2, 9]). 不幸的是, 已有的 Viro

方法 (基于多项式的 Newton 多胞形) 仅适用于 Cartesius 坐标系, 当我们利用已有的 Viro 方法构造单纯形上具有给定拓扑 Bernstein-Bézier 代数超曲面时, Bernstein-Bézier 多项式必须转变为 Cartesius 坐标系下多项式. 而由于多项式的 Newton 多胞形在不同 Cartesius 坐标系下可能不同, 因此, 已有的 Viro 方法就有局限性^[18].

目前的研究还表明 (参见文献 [19]), 现有的 Viro 方法无法解决构造具有预先给定拓扑 (特别是具有复杂拓扑结构) 的实分片代数超曲面这一问题, 究其原因: 其一, 剖分 Δ 的胞腔通常是单纯形, 所以, 分片多项式在各个胞腔上通常表示为 Bernstein-Bézier 形式, 而 Viro 方法仅适用于 Cartesius 坐标系; 其二, 因为在某胞腔上对应的多项式零点未必仍落在该胞腔内, 而且按光滑余因子协调条件理论^[1, 2], 各个胞腔上所界定的多项式间又必须满足由协调条件决定的复杂的约束关系^[1, 2]. 因此, 开展实分片代数超曲面的 Viro 黏合理论及其组合拼接技术的研究具有理论价值和应用价值.

分片代数曲面相交、拼接和过渡曲面生成等一系列研究的数学模型可归结为研究求解参系数分片多项式系统 (也即参系数分片代数簇)^[4-6]. 正如上面所述: 因为在某胞腔上对应的多项式零点未必仍落在该胞腔内, 而且各个胞腔上所界定的多项式间又必须满足由协调条件决定的复杂的约束关系, 因此, 参系数分片多项式系统是参系数半代数系统的本质推广, 比参系数半代数系统具有更大的自由度和灵活性^[2, 4-6]. 这也使得它在机械制造、外形设计、自然仿真、科学可视化和图像识别等领域均有十分重要的意义和广泛应用.

本文的目的是介绍分片代数超曲面的构造与参系数分片多项式系统的一些最近的研究进展. 我们将在本文的第 2 节介绍构造具有预先给定次数和拓扑的 (单纯形上) 代数超曲面片以及实 C^r 分片代数超曲面的 Viro 黏合理论及其组合拼接方法, 介绍构造分片代数超曲面需进一步研究的问题; 第 3 节介绍求解零维参系数分片多项式系统的理论和方法及需进一步解决的问题.

2 构造代数超曲面片和 C^r 分片代数超曲面的 Viro 方法

2.1 构造代数超曲面片的 Viro 方法

本节依据文献 [18] 的工作, 介绍构造代数超曲面片的最近研究进展. 我们将在下面 2.1.1–2.1.3 小节介绍关于构造具有给定拓扑的 Bernstein-Bézier 代数超曲面片的 Viro 黏合理论及其组合拼接方法, 介绍 Viro Bernstein-Bézier 代数超曲面片的拓扑的描述方法.

2.1.1 Bernstein-Bézier 超曲面片的图

本小节介绍 Bernstein-Bézier 多项式在单纯形 S 上的图.

记 $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数集, $\mathbb{R}_+^*$ 表示正实数集, $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数的集合. 用 $S = [v_1, \dots, v_{k+1}]$ 表示以 $v_1, \dots, v_{k+1}$ 为顶点的 k 维单纯形.

众所周知 (参见文献 [2, 9]), 任意点 $p \in S$ 可唯一表示为

$$p = \sum_{j=1}^{k+1} \tau_j v_j, \quad (2.1)$$

其中 $\sum_{j=1}^{k+1} \tau_j = 1, \tau_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k+1$, 而 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{k+1})$ 是点 p 关于 S 的重心坐标 (为方便起见, 我们也记 $p = (\tau_1, \dots, \tau_{k+1})$).

记

$$\mathbb{Z}_{+(k,n)} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in (\mathbb{Z}_+)^{k+1} \mid |\lambda| = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = n \right\}, \quad (2.2)$$

若 $p = (\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_{k+1}}{n})$, 其中 $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{Z}_{+(k,n)}$, 则称 p 为域点. 关于单纯形 S 的多面体是指 S 中以域点作为其顶点的凸多面体.

众所周知 (参见文献 [2,9]), 对于 S 上的任一具有 k 个变量的次数不超过 n 的多项式 f 可以表示为如下的 Bernstein-Bézier 形式:

$$f(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_{\lambda,n}(\tau), \quad (2.3)$$

其中 $b_\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{Z}_{+(k,n)}$,

$$B_{\lambda,n}(\tau) = \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_{k+1}!} \tau_1^{\lambda_1} \cdots \tau_{k+1}^{\lambda_{k+1}}. \quad (2.4)$$

$B_{\lambda,n}(\tau)$ 称为 Bernstein 基. $f(\tau)$ 称为关于 S 的 Bernstein-Bézier 多项式, 简记为 BB- 多项式, 称它们的系数 b_λ 为 BB- 系数. BB- 多项式在单纯形 S 中的零点集称为 Bernstein-Bézier 代数超曲面片 (简称 BB- 代数超曲面片).

对于 (2.3) 中定义的 BB- 多项式 f , 设

$$\mu(f) := \left\{ \left(\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_{k+1}}{n} \right) \mid \lambda \in \mathbb{Z}_{+(k,n)}, b_\lambda \neq 0 \right\}. \quad (2.5)$$

$\mu(f)$ 的凸包 $\text{conv}(\mu(f))$, 记为 $N(f)$, 称为 BB- 多项式 f 的 (关于 S 的) Newton 多胞形 (参见文献 [18,19]).

对于集合 $\Gamma \subset S$ 以及 BB- 多项式 $f = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_{\lambda,n}(\tau)$, 称 BB- 多项式 $\sum_{|\lambda|=n, \frac{\lambda}{n} \in \Gamma} b_\lambda B_{\lambda,n}(\tau)$ 为 f 的 Γ 截断, 记为 f^Γ .

如果 BB- 多项式 f 及其在 $N(f)$ 的任一真面 δ 上的截断 f^δ 在 $(\mathbb{C}^*)^{k+1}$ 内的零点集是非奇异的, 则称 f 是非退化的.

设 $\mathcal{J}_S$ 是单纯形 S 中的域点集合的一个子集, $P_S = \text{conv}(\mathcal{J}_S)$. $\mathcal{J}_S$ 的矩映射 $\phi_{\mathcal{J}_S} : \text{Int}(S) \rightarrow \text{Int}(P_S)$ 定义为

$$\phi_{\mathcal{J}_S}(\tau) = \frac{\sum_{(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_{k+1}}{n}) \in \mathcal{J}_S} \tau_1^{i_1} \cdots \tau_{k+1}^{i_{k+1}} (\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_{k+1}}{n})}{\sum_{(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_{k+1}}{n}) \in \mathcal{J}_S} \tau_1^{i_1} \cdots \tau_{k+1}^{i_{k+1}}}, \quad (2.6)$$

其中 $\text{Int}(P_S)$ 是所有真面并在 P_S 中的补集.

下面依据文献 [18] 所述, 给出 BB- 多项式 f 在单纯形 S 上的图的定义.

定义 2.1 [18] 设 f 是以 P 为 Newton 多胞形的 BB- 多项式, $\phi_{\mu(f)} : \text{Int}(S) \rightarrow \text{Int}(P)$ 是关于 $\mu(f)$ 的矩映射. 称 $\phi_{\mu(f)}(\{\tau \in \text{Int}(S), f(\tau) = 0\})$ 在 P 中的闭包为 f 的图, 记为 $Ct_S(f)$.

2.1.2 Bernstein-Bézier 代数超曲面片的构造

本小节介绍构造具有预先给定拓扑的 Bernstein-Bézier 代数超曲面片的 Viro 黏合理论及其拼合方法.

假设 P 是 S 中以域点为顶点的一个 k 维单纯形, BB- 多项式 f 是实的 $k+1$ 单项 (即 f 中每一非零系数项对应于 P 中一个顶点). P 的各边的中点的集合记为 $M(P)$. 对于以 $(\frac{i_1}{n}, \dots, \frac{i_{k+1}}{n})$

和 $(\frac{j_1}{n}, \dots, \frac{j_{k+1}}{n})$ 为端点的边中任意一点 $v \in M(P)$, 我们令 $\delta(v) = \text{sgn}(b_{(i_1 \dots i_{k+1})} \cdot b_{(j_1 \dots j_{k+1})})$, 其中 $b_{(i_1 \dots i_{k+1})}$ 和 $b_{(j_1 \dots j_{k+1})}$ 是 f 中对应的 BB- 系数.

记

$$M_-(P) = \{v \in M(P) \mid \delta(v) = -1\}. \quad (2.7)$$

定理 2.1 ^[18] 设 BB- 多项式 f 是实 $k+1$ 单项, $P = N(f)$. 若 $M_-(P) = \emptyset$, 则 $Ct_S(f) \cap P = \emptyset$; 若 $M_-(P) \neq \emptyset$, 则 f 的图 $Ct_S(f)$, 在合痕意义下, 是 $P \cap H$, 其中 H 是唯一通过 $M_-(P)$ 的超平面.

设 $P, P_1, \dots, P_m \subset S$ 是多面体, $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$, 且 $i \neq j$ 时, $\text{Int}(P_i) \cap \text{Int}(P_j) = \emptyset$. 假设 $\nu: P \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的、分片线性的、非负凸函数, 且满足

- (1) ν 在各个 P_i 上的限制 $\nu|_{P_i}$ 都是线性的;
- (2) 若 ν 在某个开集上的限制是线性的, 则这一开集必包含在某个 P_i 中;
- (3) $\nu(P \cap L_{(k,n)}) \subset \mathbb{Z}$, 其中 $L_{(k,n)}$ 表示域点集.

则具有这些性质的函数 ν 称为 $\{P_1, \dots, P_m\}$ 的凸化.

设 $f_1, \dots, f_m$ 是 $\mathbb{R}$ 上有 $k+1$ 个变量的 BB- 多项式, $N(f_i) = P_i$. 若对于任意 i 和 j , 有 $f_i^{P_i \cap P_j} = f_j^{P_i \cap P_j}$, 那么存在唯一的 BB- 多项式 f , 使得 $N(f) = P = \bigcup_{i=1}^m P_i$, 且对于 $i = 1, \dots, m$, 有 $f^{P_i} = f_i$. 若 $f(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_{\lambda,n}(\tau)$, 并且 ν 是 $\{P_1, \dots, P_m\}$ 的凸化函数, 那么, 令

$$f_t(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_{\lambda,n}(\tau) t^{\nu(\frac{\lambda}{n})}. \quad (2.8)$$

我们称 BB- 多项式 f_t 由 BB- 多项式 $f_1, \dots, f_m$ 的拼合得到, 简称 f_t 是由 BB- 多项式 $f_1, \dots, f_m$ 通过 ν 拼合的.

设 $f_1, \dots, f_m$ 是有 $k+1$ 个变量的 BB- 多项式, $N(f_i) = P_i$, 且当 $i \neq j$ 时, $\text{Int}(P_i) \cap \text{Int}(P_j) = \emptyset$. 若 BB- 多项式 f 满足 $N(f) = P = \bigcup_{i=1}^m P_i$, 且在合痕意义下, f 的图 $Ct_S(f)$ 是 $\bigcup_{i=1}^m Ct_S(f_i)$, 则称 BB- 多项式 f 的图 $Ct_S(f)$ 可由 BB- 多项式 $f_1, \dots, f_m$ 的图拼合而成, 或称图 $Ct_S(f)$ 是 $f_1, \dots, f_m$ 的图的一个拼合.

关于单纯形上构造具有给定拓扑的 Bernstein-Bézier 代数超曲面片的 Viro 黏合理论及其组合拼合方法有下述定理.

定理 2.2 ^[18] 设 $P, P_1, \dots, P_m, \nu, f_1, \dots, f_m$ 与 f_t 同上 (f_t 是 BB- 多项式 $f_1, \dots, f_m$ 通过 ν 拼合的). 若 BB- 多项式 $f_1, \dots, f_m$ 是非退化的, 则存在 $t_0 > 0$, 使得对于任意的 $t \in (0, t_0]$, BB- 多项式 f_t 的图是由 BB- 多项式 $f_1, \dots, f_m$ 的图拼合而成的.

由定理 2.2 可得下面的定理.

定理 2.3 ^[18] 假设 $P, P_1, \dots, P_m, \nu, f_1, \dots, f_m, f_t$ 满足定理 2.2 中条件. 若 $f_1, \dots, f_m$ 是实的 $k+1$ 单项, 且 k 维的 $P_1, \dots, P_m$ 形成 P 的三角剖分, 则存在常数 $t_0 > 0$, 使得对于任意 $t \in (0, t_0]$, 在合痕意义下, f 的图 $Ct_S(f)$ 是 $\bigcup_{i=1}^m \text{conv}(M_-(P_i))$, 其中 $M_-(P_i)$ 如 (2.7) 所定义.

根据定理 2.2 和 2.3, 如果我们要构造一个具有给定拓扑与次数的 BB- 代数超曲面片 $f(\tau) = 0$, 我们只要构造某些在 S 上具有简单拓扑的 BB- 代数超曲面片 $f_1(\tau) = 0, \dots, f_m(\tau) = 0$, 以及构造一个凸函数 ν , 其中 $f_1, \dots, f_m$ 与 ν 满足定理 2.2 的条件, 则 BB- 多项式 $f(\tau)$ 可以由 BB- 多项式 $f_1, \dots, f_m$ 通过 ν 拼合得到.

注 2.1 在几何造型中, 通常需要在某单纯形上构造具有给定拓扑的曲线和曲面. 文献 [18, 例 4.5 和 4.6] 说明这种方法是方便而有效的. 如果我们在 Cartesius 坐标系应用 Viro 方法, 所构造的曲线曲面与单纯形的交不一定具有给定的拓扑, 因为构造的曲线曲面不一定都在单纯形中.

2.1.3 关于 Viro Bernstein-Bézier 代数超曲面片的 Viro 定理

本节介绍描述 Viro Bernstein-Bézier 代数超曲面片拓扑的方法.

设 $\mathcal{P} = \{\frac{\lambda^{(1)}}{n}, \dots, \frac{\lambda^{(k+1)}}{n}\}$ 是单纯形 S 域点集的一个子集, 现在考虑 BB- 多项式

$$f_t(\tau) = \sum_{\frac{\lambda}{n} \in \mathcal{P}} b_{\lambda} B_{\lambda,n}(\tau) t^{\nu(\frac{\lambda}{n})}, \quad (2.9)$$

其中 b_{λ} 是实数, t 是实参数, ν 在 $\mathcal{P}$ 上的值是整数. 这样的多项式称为 Viro Bernstein-Bézier 多项式 (简称为 Viro BB- 多项式). Viro BB- 多项式在单纯形上的零点集称为 Bernstein-Bézier 代数超曲面片 (简称为 Viro BB- 代数超曲面片). 本节假设其 Newton 多胞形 $P = \text{conv}(\mathcal{P})$ 是 k 维的. 下面将描述对于充分小的 $t > 0$, Viro BB- 代数超曲面片的拓扑.

定义映射 $\psi: S \rightarrow T_{(k,n)} = \{(x_2, \dots, x_{k+1}) \in (\mathbb{R}_+)^k \mid x_2 + \dots + x_{k+1} \leq n\}$ 为

$$\psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}) = (n\tau_2, \dots, n\tau_{k+1}), \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}) \in S. \quad (2.10)$$

由文献 [18, 引理 3.2], ψ 是一个微分同胚映射.

设 $\widehat{P} \subset (\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}$ 是 $\widehat{\mathcal{P}} = \{(\psi(\frac{\lambda}{n}), \nu(\frac{\lambda}{n})), \frac{\lambda}{n} \in \mathcal{P}\}$ 的凸包, G 是 $\widehat{P}$ 的边界的底部, 也即 $\{0\} \times \mathbb{R}_+ + \widehat{P}$ 的紧致面的并 (其中 0 表示 $\mathbb{R}^k$ 的原点). 通过投影 $\pi: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ 取 G 中面的像, 我们得到 $\psi(P)$ 的顶点在 $\psi(\mathcal{P})$ 中的多面体子分割 Δ . G 是一个连续凸函数 $g_{\nu}: \psi(P) \rightarrow \mathbb{R}$ 的图, 函数在 Δ 的任一多面体上是仿射的, 但在 Δ 的任意两个不同的 k 维多面体的并上不是仿射的 (参见文献 [12, 15]).

根据文献 [18, 引理 3.2 和 4.2], $\psi^-(\Delta)$ 形成了 P 的一个多面体子分割, 其剖分顶点在 $\mathcal{P}$ 中. 进一步, 由此方法得到的多面体的多面体子分割是凸的 (这个剖分也称为正规的).

记 f 表示 Viro BB- 多项式 f_t 当 $t = 1$ 时的 BB- 多项式, 我们假设对于 $\psi^-(\Delta)$ 的每一多面体 F , f 在 F 上的截断 f^F 是非退化的.

文献 [18] 证明了下列定理.

定理 2.4 ^[18] 设 Viro BB- 多项式 f_t 与 $\psi^-(\Delta)$ 定义如上, 则存在常数 $t_0 > 0$, 使得对于任意 $t \in (0, t_0]$, 在合痕意义下, f_t 的图 $Ct_S(f_t)$ 是 $\bigcup_{F \in \psi^-(\Delta)} Ct_S(f^F)$.

根据定理 2.4, 我们可以将所有的图 $Ct_S(f^F)$, $F \in \psi^-(\Delta)$ 黏合在一起而得到 Viro BB- 多项式 f_t 的图 $Ct_S(f_t)$.

2.2 构造 C^r 分片代数超曲面的 Viro 方法

2.2.1 分片多项式的图

本小节介绍分片多项式的图、Bernstein-Bézier 多项式的图与分片多项式图的一些性质.

定理 2.5 ^[19] 设 f 是以 P 为 Newton 多胞形的 BB- 多项式, Γ 是 P 的一个面, 则

(1) $Ct_S(f) \cap \Gamma = Ct_S(f^{\Gamma})$;

(2) 若 f^{Γ} 关于 Γ 是非退化 (正如 f 关于 P 是非退化的), 则 $Ct_S(f)$ 与 Γ 横截相交.

下面结果是 Farin 定理在高维空间的推广 (参见文献 [2, 9]).

命题 2.1 ^[2, 9] 设 $p^{(1)}(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_{\lambda}^{(1)} B_{\lambda,n}(\tau)$ 和 $p^{(2)}(\bar{\tau}) = \sum_{|\lambda|=n} b_{\lambda}^{(2)} B_{\lambda,n}(\bar{\tau})$ 分别是定义在两个相邻的 k 维单纯形 $S_1 = [v_1, v_2, \dots, v_{k+1}]$ 和 $S_2 = [v'_1, v_2, \dots, v_{k+1}]$ 上的次数为 n 的 BB- 多项式, 则 $p^{(1)}(\tau)$ 和 $p^{(2)}(\bar{\tau})$ 在 $[v_2 \cdots v_{k+1}]$ 上是 C^r 光滑连接的充分必要条件是对所有满足 $\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j = n - \rho$ 的

$\rho \in \{0, 1, \dots, r\}$ 和 $\lambda_2, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{Z}_+$, 有

$$b_{\lambda^\rho}^{(2)} = \sum_{|\epsilon|=\rho} b_{\epsilon+\lambda^0}^{(1)} B_{\epsilon,\rho}(\tau'), \quad (2.11)$$

其中 $\lambda^0 = (0, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$, $\lambda^\rho = (\rho, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{k+1})$, 这里的 τ' 表示 v'_1 的关于单纯形 S_1 的重心坐标.

定理 2.6 ^[19] 假设 $p^{(1)}(\tau)$ 和 $p^{(2)}(\bar{\tau})$ 在 $S_1 \cap S_2 = [v_2 \cdots v_{k+1}]$ 上是 C^r 光滑连接的, 则

(1) 若 $N(p^{(1)}) \cap (S_1 \cap S_2)$ 是非空的, 则有 $N(p^{(1)}) \cap (S_1 \cap S_2) = N(p^{(2)}) \cap (S_1 \cap S_2)$, 且 $\Gamma := N(p^{(1)}) \cap (S_1 \cap S_2)$ 是 $N(p^{(1)})$ 和 $N(p^{(2)})$ 的面, 其中 $N(p^{(1)})$ 和 $N(p^{(2)})$ 分别是 BB- 多项式 $p^{(1)}$ 和 $p^{(2)}$ 的 Newton 多胞形;

(2) 对于上述 Γ 有 $Ct_{S_1}(p^{(1)}) \cap \Gamma = Ct_{S_2}(p^{(2)}) \cap \Gamma$.

在本小节和第 2.2 小节, 我们假设 Δ 是 $\mathbb{R}^k$ 中区域 Ω 的一个多面体剖分, 且 Δ 是由 q 个 k 维胞腔 $S_1, \dots, S_q$ 组成的一个可遗传复形, 每个 k 维胞腔 S_α 是 k 维单纯形, $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \sigma_i$.

设 $f \in C_n^r(\Delta)$, 并且每一个多项式 $f|_{S_\alpha}$ 表示为

$$f|_{S_\alpha}(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda^{[\alpha]} B_{\lambda,n}(\tau), \quad \alpha = 1, 2, \dots, q. \quad (2.12)$$

上述定义的分片多项式 f 称为 C^r 分片 BB- 多项式.

定理 2.7 ^[19] 设 $f \in C_n^r(\Delta)$ 是 (2.12) 中定义的分片 BB- 多项式, 则对于 Δ 中每一对相邻的 k 维胞腔 S_α 和 S_β , 有

(1) 若 $N(f|_{S_\alpha}) \cap (S_\alpha \cap S_\beta)$ 是非空的, 则有 $N(f|_{S_\alpha}) \cap (S_\alpha \cap S_\beta) = N(f|_{S_\beta}) \cap (S_\alpha \cap S_\beta)$, 且 $\Gamma_{\alpha\beta} := N(f|_{S_\alpha}) \cap (S_\alpha \cap S_\beta)$ 是 $N(f|_{S_\alpha})$ 与 $N(f|_{S_\beta})$ 的一个面, 其中 $N(f|_{S_\alpha})$ 和 $N(f|_{S_\beta})$ 分别是 BB- 多项式 $f|_{S_\alpha}$ 和 $f|_{S_\beta}$ 的 Newton 多胞形;

(2) 对于上述 $\Gamma_{\alpha\beta}$ 有 $Ct_{S_\alpha}(f|_{S_\alpha}) \cap \Gamma_{\alpha\beta} = Ct_{S_\beta}(f|_{S_\beta}) \cap \Gamma_{\alpha\beta}$.

根据定理 2.5–2.7, 定义分片 BB- 多项式的图.

定义 2.2 ^[19] 设 $f \in C_n^r(\Delta)$ 是 (2.12) 中定义的分片 BB- 多项式, $N(f|_{S_\alpha})$ 是 BB- 多项式 $f|_{S_\alpha}$ 的 Newton 多胞形. $\mu(f|_{S_\alpha}) = \{(\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_{k+1}}{n}) \mid \lambda \in \mathbb{Z}_{+(k,n)}, b_\lambda^{[\alpha]} \neq 0\}$. 设

$$\phi_{\mu(f|_{S_\alpha})} : \text{Int}(S_\alpha) \rightarrow \text{Int}(N(f|_{S_\alpha}))$$

是关于 $\mu(f|_{S_\alpha})$ 的矩映射. 称 $\bigcup_{\alpha=1}^q \phi_{\mu(f|_{S_\alpha})}(\{\tau \in \text{Int}(S_\alpha), f|_{S_\alpha}(\tau) = 0\})$ 的闭包是 f 的图, 记为 $Ct(f)$.

显然, 由定理 2.5–2.7 及上述定义, 可得到下面的结论.

定理 2.8 ^[19] 设 $f \in C_n^r(\Delta)$ 是 (2.12) 中定义的分片 BB- 多项式, 则 f 的图 $Ct(f)$ 为

$$\bigcup_{\alpha=1}^q Ct_{S_\alpha}(f|_{S_\alpha}).$$

2.2.2 实 C^r 分片代数超曲面的构造

本小节介绍构造具有一定光滑度与给定拓扑的实分片代数超曲面的 Viro 方法.

对于 Δ 中每一对相邻的 k 维胞腔 $S_\alpha = [v_{(\alpha,1)}, v_{(\alpha,2)}, \dots, v_{(\alpha,k+1)}]$, $S_\beta = [v_{(\beta,1)}, v_{(\beta,2)}, \dots, v_{(\beta,k+1)}]$, 假设

$$S_\alpha \cap S_\beta = [v_{(\alpha,1)}, \dots, v_{(\alpha,i-1)}, \widehat{v_{(\alpha,i)}}, v_{(\alpha,i+1)}, \dots, v_{(\alpha,k+1)}]$$

$$= [v_{(\beta,1)}, \dots, v_{(\beta,j-1)}, \widehat{v_{(\beta,j)}}, v_{(\beta,j+1)}, \dots, v_{(\beta,k+1)}],$$

其中 $\widehat{}$ 是指缺省相应的顶点. 显然, 存在数 $1, 2, \dots, k+1$ 的两个排列 $l_1, l_2, \dots, l_{k+1}$ 和 $d_1, d_2, \dots, d_{k+1}$ 使得 $v_{(\alpha,l_1)} = v_{(\alpha,i)}, v_{(\beta,d_1)} = v_{(\beta,j)}$, 并且对于 $w = 2, \dots, k+1$ 有 $v_{(\alpha,l_w)} = v_{(\beta,d_w)}$.

现在定义两个一一变换 $\eta_{\alpha\beta}, \eta_{\beta\alpha}: (\mathbb{R}_+)^{k+1} \rightarrow (\mathbb{R}_+)^{k+1}$, 分别为 $\eta_{\alpha\beta}(\lambda) = (\lambda_{l_1}, \lambda_{l_2}, \dots, \lambda_{l_{k+1}})$ 与 $\eta_{\beta\alpha}(\lambda) = (\lambda_{d_1}, \lambda_{d_2}, \dots, \lambda_{d_{k+1}})$, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{k+1}$.

对于任意给定的 $\alpha \in \{1, \dots, q\}$, 设 $f^{(\alpha,1)}, \dots, f^{(\alpha,m_\alpha)}$ 是单纯形 $S_\alpha = [v_{(\alpha,1)}, v_{(\alpha,2)}, \dots, v_{(\alpha,k+1)}]$ 上的 BB- 多项式, 满足 $N(f^{(\alpha,\zeta)}) = P_{(\alpha,\zeta)}$, 其中 $\zeta = 1, \dots, m_\alpha$. 设

$$f_t^{[\alpha]}(\tau) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda^{[\alpha]} B_{\lambda,n}(\tau) t^{\nu^{[\alpha]}(\frac{\lambda}{n})} \quad (2.13)$$

是 BB- 多项式 $f^{(\alpha,1)}, \dots, f^{(\alpha,m_\alpha)}$ 通过 $\nu^{[\alpha]}$ 的拼合.

域 Ω 上的分片 BB- 多项式 f_t 定义为

$$f_t|_{S_\alpha}(\tau) = f_t^{[\alpha]}(\tau), \quad \alpha = 1, 2, \dots, q. \quad (2.14)$$

关于构造具有一定光滑度与给定拓扑的实分片代数超曲面的 Viro 黏合理论及其组合拼合方法有下面定理.

定理 2.9 ^[19] 假设 $f^{(1,1)}, \dots, f^{(1,m_1)}, f^{(2,1)}, \dots, f^{(q,m_q)}$ 是非奇异的, $f_t^{[\alpha]}$ 是 BB- 多项式 $f^{(\alpha,1)}, \dots, f^{(\alpha,m_\alpha)}$ 通过 $\nu^{[\alpha]}$ 拼合的, $\alpha = 1, \dots, q$. 假设 $S_\alpha, S_\beta, v_{(\alpha,i)}, v_{(\beta,j)}, \eta_{\alpha\beta}, \eta_{\beta\alpha}, P_{(\alpha,\zeta)}, f_t^{[\alpha]}$ 与 f_t 定义如上, 且对于 $\zeta \neq \varsigma$ 有 $\text{Int}(P_{(\alpha,\zeta)}) \cap \text{Int}(P_{(\alpha,\varsigma)}) = \emptyset$. 若对于 Δ 中每一对相邻 k 维胞腔 S_α 和 S_β , 对所有满足 $\sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i = n - \rho$ 的 $\rho \in \{0, 1, \dots, r\}$ 与 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{Z}_{+(k,n)}$, 有

$$b_{(\eta_{\beta\alpha}^{-1}(\lambda^\rho))}^{[\beta]} t^{\nu^{[\beta]}(\frac{\eta_{\beta\alpha}^{-1}(\lambda^\rho)}{n})} = \sum_{|\epsilon|=\rho} b_{(\eta_{\alpha\beta}^{-1}(\epsilon+\lambda^0))}^{[\alpha]} B_{\epsilon,\rho}(\tau'_{\beta\alpha}) t^{\nu^{[\alpha]}(\frac{\eta_{\alpha\beta}^{-1}(\epsilon+\lambda^0)}{n})}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (2.15)$$

其中 $\lambda^\rho = (\rho, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$, $\tau'_{\beta\alpha}$ 表示 $v_{(\beta,j)}$ 的关于单纯形 $S_\alpha = [v_{(\alpha,l_1)}, v_{(\alpha,l_2)}, \dots, v_{(\alpha,l_{k+1})}]$ 的重心坐标, 则

(1) $f_t \in C_n^r(\Delta)$;

(2) 若对满足 $N(f^{(\alpha,i)}) \cap (S_\alpha \cap S_\beta) \neq \emptyset$ 的任意 BB- 多项式 $f^{(\alpha,i)}, i \in \{1, \dots, m_\alpha\}$, 存在一个 BB- 多项式 $f^{(\beta,j)} \in \{f^{(\beta,1)}, \dots, f^{(\beta,m_\beta)}\}$, 使得 $N(f^{(\beta,j)}) \cap (S_\alpha \cap S_\beta) = N(f^{(\alpha,i)}) \cap (S_\alpha \cap S_\beta)$, 则存在 $t_0 > 0$, 使得对于任意 $t \in (0, t_0]$, 在合痕意义下, 分片多项式 f_t 的图是 $\bigcup_{\alpha=1}^q \bigcup_{i=1}^{m_\alpha} Ct_{S_\alpha}(f^{(\alpha,i)})$.

定理 2.10 ^[19] 假设 $f^{(1,1)}, \dots, f^{(1,m_1)}, \dots, f^{(q,1)}, \dots, f^{(q,m_q)}, P_{(1,1)}, \dots, P_{(1,m_1)}, \dots, P_{(q,1)}, \dots, P_{(q,m_q)}, f_t^{[\alpha]}, f_t$ 满足定理 2.9 中条件. 若对于每一 $\alpha \in \{1, 2, \dots, q\}$, $f^{(\alpha,1)}, \dots, f^{(\alpha,m_\alpha)}$ 是实的 $k+1$ 单项, 且 k 维的 $P_{(\alpha,1)}, \dots, P_{(\alpha,m_\alpha)}$ 形成 $N(f_t^{[\alpha]})$ 的三角剖分, 则 $f_t \in C_n^r(\Delta)$, 并且存在常数 $t_0 > 0$, 使得对于任意 $t \in (0, t_0]$, 在合痕意义下, f 的图 $Ct(f)$ 是 $\bigcup_{\alpha=1}^q \bigcup_{i=1}^{m_\alpha} \text{conv}(M_-(P_{(\alpha,i)}))$, 其中 $M_-(P_{(\alpha,i)})$ 如 (2.7) 所定义.

根据定理 2.9 和 2.10, 如果我们要构造一个具有给定拓扑与次数的 C^r 分片代数超曲面 $f(\tau) = 0$, 我们只要构造某些具有简单拓扑的 BB- 代数超曲面片 $f^{(\alpha,1)}(\tau) = 0, \dots, f^{(\alpha,m_\alpha)}(\tau) = 0$, 以及在每一 k 维胞腔 S_α 上构造一个凸函数 $\nu^{[\alpha]}$, 其中 $f^{(\alpha,1)}, \dots, f^{(\alpha,m_\alpha)}$ 与 $\nu^{[\alpha]}$ 满足定理 2.9 的条件, 则 BB- 多项式 $f^{[\alpha]}(\tau)$ 可以由 BB- 多项式 $f^{(\alpha,1)}, \dots, f^{(\alpha,m_\alpha)}$ 通过 $\nu^{[\alpha]}$ 拼合得到. 这样我们就可以通过定义 $f|_{S_\alpha}(\tau) := f^{[\alpha]}(\tau)$ 得到 $f(\tau)$.

2.3 进一步研究的问题

如何在每个单纯形 S_α 上构造凸函数 $\nu^{[\alpha]}$ 使得它满足等式 (2.15), 这是使用 Viro 方法构造实 C^r 分片代数超曲面的关键之一. 研究分片代数超曲面的构造还必须进一步研究下列问题: (1) 建立分片多项式的临界点和奇点的黏合理论; (2) 确立分片多项式的 Betti 数、指数为 i 的临界点数与剖分的胞腔数、内顶点数、内公共面数、分片多项式的次数以及光滑度之间的约束关系; (3) 确定低次分片多项式的临界点指数分布的分类, 以及各类中分片多项式的系数约束条件.

3 解参系数分片多项式系统

本节将介绍解参系数分片多项式系统的最近研究进展, 我们将在第 3.1–3.4 小节介绍解下列形式的参系数分片多项式系统的理论和方法,

$$\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n) = \{X \in \Omega \mid f_1(V, X) = 0, \dots, f_n(V, X) = 0\},$$

其中 $f_\omega \in C_{k_\omega}^r(\Delta)$, $\omega = 1, \dots, n$; 对于 Δ 中的所有 n 维胞腔 σ_i , $f_\omega|_{\sigma_i} \in \mathbb{Q}[V][X]$; $V = (u_1, u_2, \dots, u_\tau)$ 是参数集, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是变元集; $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 是 Δ 中的所有 n 维胞腔, $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \sigma_i$; $\sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1^{[i]}(x) \geq 0, \dots, g_{n_i}^{[i]}(x) \geq 0\}$, $g_1^{[i]}(x), \dots, g_{n_i}^{[i]}(x)$ 是 $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 中的一次多项式.

3.1 参系数分片多项式系统及其基本理论

文献 [4–6] 证明了分片多项式函数是 C^r 的充要条件是, 它在各个 n 维胞腔上的多项式系数满足一个线性方程组, 给出了这个线性方程组, 也证明了解参系数分片多项式系统问题可转化为解有限个包含严格不等式的参系数多项式系统.

设 σ_i 和 σ_j 是 Δ 中相邻 n 维胞腔, 则它们沿 $n-1$ 维胞腔 $\sigma_{ij} \in \Delta$ 相交, σ_{ij} 是一个仿射超平面 $\mathbf{V}(\ell_{ij})$ 中的多面体, 其中

$$\ell_{ij} = a_0^{[i,j]} + a_1^{[i,j]}x_1 + \dots + a_{n-1}^{[i,j]}x_{s_{ij}-1} + a_{s_{ij}}^{[i,j]}x_{s_{ij}} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \quad (3.1)$$

是 $a_{s_{ij}}^{[i,j]} \neq 0$ 的一次多项式. 基于文献 [1, 2] 的工作, Lai 等人 [4–6] 证明了下列定理.

定理 3.1 [4–6] 设 Δ 是由 m 个 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 组成的一个可遗传复形. 对 Δ 中相邻的 n 维胞腔 σ_i 和 σ_j , 设 $\mathbf{V}(\ell_{ij})$ 为包含 $n-1$ 维胞腔 $\sigma_{ij} = \sigma_i \cap \sigma_j \in \Delta$ 且定义如 (1.1) 的仿射超平面. 那么, $f \in C_k^r(\Delta)$ (记 $f^{[i]} = f|_{\sigma_i}$) 的充分必要条件是对 Δ 中每一组相邻 n 维胞腔 σ_i 和 σ_j , 多项式 $\text{rem}(f^{[i]} - f^{[j]}, \ell_{ij}^{r+1}, x_{s_{ij}})$ (即 $f^{[i]} - f^{[j]}$ 对 ℓ_{ij}^{r+1} 关于 $x_{s_{ij}}$ 的 Euclid 余式或伪余式) 的所有系数等于 0. 这些系数是关于多项式 $f^{[i]}$ 和 $f^{[j]}$ 的系数的齐次线性函数.

令 $P(\Delta) := \{f \mid f|_{\sigma_i} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], i = 1, \dots, m\}$ 表示定义在 Δ 上的分片多项式集. 众所周知, 对于任意给定的 $f_\omega \in P(\Delta)$ ($1 \leq \omega \leq n$), f_ω 在 σ_i 上的限制 $f_\omega|_{\sigma_i}$ 可写成下面形式:

$$f_\omega|_{\sigma_i} = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq k_\omega} a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{[\omega][i]} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} = f_\omega^{[i]}(a^{[\omega][i]}, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.2)$$

其中 $\deg(f_\omega) = k_\omega$; $a^{[\omega][i]}$ 表示一个 d_ω 维行向量, 其分量由多项式 $f_\omega|_{\sigma_i}$ 的所有系数 $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{[\omega][i]}$ 组成, 并通过某个固定顺序排列而成.

由定理 3.1 可得下面的定理.

定理 3.2 ^[4-6] $f_\omega \in C_{k_\omega}^{r_\omega}(\Delta)$ 的充分必要条件是对 Δ 中每一组相邻 n 维胞腔 σ_i 和 σ_j , 多项式 $f_\omega | \sigma_i$ 和 $f_\omega | \sigma_j$ 的系数满足: 对任何 $\alpha \in \{0, 1, \dots, r_\omega\}$ 和任何满足 $\tau_1 + \dots + \tau_{s_{ij}-1} + \lambda_{s_{ij}+1} + \dots + \lambda_n \leq k_\omega - \alpha$ 的非负整数 $\tau_1, \dots, \tau_{s_{ij}-1}, \lambda_{s_{ij}+1}, \dots, \lambda_n$ 都有

$$\sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{s_{ij}}) \in \Lambda(\tau, \lambda)} \left[(a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{[\omega][i]} - a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{[\omega][j]}) \frac{\lambda_{s_{ij}}! \{ (a_0^{[i,j]})^{\sum_{k=1}^{s_{ij}-1} (\tau_k - \lambda_k) - \alpha - \lambda_{s_{ij}}} \}}{(\sum_{k=1}^{s_{ij}-1} (\tau_k - \lambda_k) - \alpha - \lambda_{s_{ij}})!} \right. \\ \left. \times \frac{(a_1^{[i,j]})^{\tau_1 - \lambda_1} \dots (a_{s_{ij}-1}^{[i,j]})^{\tau_{s_{ij}-1} - \lambda_{s_{ij}-1}}}{(\tau_1 - \lambda_1)! \dots (\tau_{s_{ij}-1} - \lambda_{s_{ij}-1})! (-a_{s_{ij}}^{[i,j]})^{\lambda_{s_{ij}} - \alpha}} \right] = 0, \quad (3.3)$$

其中 $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{[\omega][i]}$ 和 $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{[\omega][j]}$ 定义如 (3.2), 且

$$[Z(\tau, \alpha)]^{s_{ij}} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{s_{ij}}) \in Z^{s_{ij}} \mid 0 \leq \lambda_1 \leq \tau_1, \dots, 0 \leq \lambda_{s_{ij}-1} \leq \tau_{s_{ij}-1}, \lambda_{s_{ij}} \geq \alpha\}, \\ \Lambda(\tau, \lambda) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{s_{ij}}) \in [Z(\tau, \alpha)]^{s_{ij}} \mid \sum_{l=1}^{s_{ij}-1} \tau_l + \alpha \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_{s_{ij}} \leq k_\omega - \sum_{l=s_{ij}+1}^n \lambda_l \right\}.$$

令

$$E\Gamma_\omega^{[\sigma_i, \sigma_j]} = \{(3.3) \mid \alpha \in \{0, 1, \dots, r_\omega\}, \tau_1 + \dots + \tau_{s_{ij}-1} + \lambda_{s_{ij}+1} + \dots + \lambda_n \leq k_\omega - \alpha\}, \quad (3.4)$$

其中上式中的 (3.3) 是前面等式 (3.3), 而 $\tau_1, \dots, \tau_{s_{ij}-1}, \lambda_{s_{ij}+1}, \dots, \lambda_n$ 是非负整数. 记 $\Upsilon := \{[\sigma_i, \sigma_j] \mid \sigma_i \text{ 和 } \sigma_j \text{ 是 } \Delta \text{ 中相邻的 } n \text{ 维胞腔}\}$.

根据定理 3.2 可得, $f_\omega \in C_{k_\omega}^{r_\omega}(\Delta)$ 当且仅当多项式 $f_\omega | \sigma_1, \dots, f_\omega | \sigma_m$ 的系数满足集合

$$\Gamma_\omega := \bigcup_{[\sigma_i, \sigma_j] \in \Upsilon} E\Gamma_\omega^{[\sigma_i, \sigma_j]} \quad (3.5)$$

中的所有等式. 记 $Q_\omega = (a^{[\omega][1]}, a^{[\omega][2]}, \dots, a^{[\omega][m]})^T$. 依定理 3.1 和 3.2, 那么,

$$\bigwedge_{P \in \Gamma_\omega} P = 0 \quad (3.6)$$

是关于变元 Q_ω 的齐次线性方程组. 因此, 有下面的定理.

定理 3.3 ^[4] 设 $f_\omega \in C_{k_\omega}^{r_\omega}(\Delta)$, $\omega = 1, \dots, n$, 且对 Δ 中的每个 n 维胞腔 σ_i , $f_\omega | \sigma_i \in \mathbb{R}[V][x_1, \dots, x_n]$, $1 \leq i \leq m$, $V = (u_1, u_2, \dots, u_\tau)$ 和 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 分别为参数和变元, 那么对任何给定的参数 V 的值, 下面参系数分片多项式系统 PPS 和参系数分片多项式系统 $Z(f_1, \dots, f_n)$ 有相同的实零点集,

$$\text{PPS: } \begin{cases} f_1(V, X) = 0, \\ \vdots \\ f_n(V, X) = 0, \\ \bigwedge_{P \in \Gamma_\omega} P = 0, \quad \omega = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.7)$$

而且下面系统 BQ 是关于变元 $V = (u_1, u_2, \dots, u_\tau)$ 的一个方程组,

$$\text{BQ} : \begin{cases} \bigwedge_{P \in \Gamma_1} P = 0, \\ \vdots \\ \bigwedge_{P \in \Gamma_n} P = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

假设 $\Theta_{\text{BQ}} = \{(u_1, u_2, \dots, u_\tau) \in \mathbb{R}^\tau \mid \bigwedge_{P \in \Gamma_\omega} P = 0, \omega = 1, \dots, n\}$ 是方程组 BQ 的解集. 设 $d \leq \tau$. 定义映像 $\Pi_d: \mathbb{R}^\tau \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得

$$\Pi_d(u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_\tau) := (u_1, u_2, \dots, u_d), \quad (u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_\tau) \in \mathbb{R}^\tau. \quad (3.9)$$

注 3.1 通常情形下, 参系数分片多项式系统 PPS 和线性方程组 BQ 含有太多的参数, 如果直接解 PPS 和 BQ 是相当复杂的. 因此需要约化系统 BQ 到它的简单形式 G_{BQ} , 然后用 G_{BQ} 消去 $f_1(V, X), \dots, f_n(V, X)$ 中尽量多的参数, 从而简化 PPS, 并且保持 PPS 系统的实解不变.

文献 [4] 给出了算法 SimPPS 来处理上面问题.

算法: SimPPS

输入: n 个参系数分片多项式 $f_1, \dots, f_n$, 其中 $f_1|_{\sigma_i}, \dots, f_n|_{\sigma_i} \in \mathbb{R}[V][X]$, $i = 1, \dots, m$; 非负整数 $r_1, \dots, r_n$ (即 $f_1, \dots, f_n$ 的光滑度).

输出: $G_{\text{BQ}}, \{\varphi_1(U, X), \dots, \varphi_n(U, X)\}$, 其中 G_{BQ} 是带变元 V 的多项式集, $\varphi_1(U, X), \dots, \varphi_n(U, X)$ 是以 $U = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ 作为参数的参系数分片多项式, 每一对 ω 和 i , $\varphi_\omega|_{\sigma_i} \in \mathbb{R}[U][X]$; G_{BQ} 和 φ_ω 也满足下列条件:

- (1) G_{BQ} 是 BQ 的约化集, 并且集 Θ_{BQ} 等于集 $\Theta_{G_{\text{BQ}}} = \{(u_1, u_2, \dots, u_\tau) \in \mathbb{R}^\tau \mid \bigwedge_{P \in G_{\text{BQ}}} P = 0\}$;
- (2) $\varphi_1(U, X), \dots, \varphi_n(U, X)$ 是 $f_1, \dots, f_n$ 通过 G_{BQ} 约化参系数 (即消去 $f_i(V, X)$ 中尽量多的参数) 所得的分片多项式, 并且对于每一个给定的参数值 $V \in \Theta_{\text{BQ}}$, 系统 PPS 和下列参系数分片多项式系统具有相同的实解集,

$$\text{RPPS} : \begin{cases} \varphi_1(U, X) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_n(U, X) = 0, \\ \bigwedge_{P \in G_{\text{BQ}}} P = 0, \end{cases}$$

其中 $U = \Pi_d(V)$.

定义下列参系数分片多项式系统

$$\overline{\text{PPS}} : \begin{cases} \varphi_1(U, X) = 0, \\ \varphi_2(U, X) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_n(U, X) = 0, \end{cases}$$

其中 $U = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d \cap \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 是参数.

对每个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 定义

$$\text{SASS}_i: \begin{cases} \varphi_1|_{\sigma_i}(U, X) = 0, \dots, \varphi_n|_{\sigma_i}(U, X) = 0, \\ g_1^{[i]}(X) > 0, \dots, g_{\gamma_i}^{[i]}(X) > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

其中 $U = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ 和 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 分别为参数和变元, $g_1^{[i]}(X), \dots, g_{\gamma_i}^{[i]}(X)$ 相同于 (1.1).

记 $\text{TRzero}(\cdot)$ 和 $\text{Rzero}(\cdot)$ 分别表示一个给定系统的无挠实零点集和实零点集, $\text{TRzero}(\cdot)|_{\sigma_i}$ 表示 $\text{TRzero}(\cdot) \cap \sigma_i$.

根据文献 [4–6], 当在 $\mathbb{R}^d \cap \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 中取定参数 U 的值, 系统 $\overline{\text{PPS}}$ 的解集相同于参数 V 取值于 $\Pi_d^{-1}(U) \cap \Theta_{\text{BQ}}$ 中时系统 PPS 的解集. 反之, 当在 Θ_{BQ} 中取定参数 V 的值, 系统 PPS 的解集相同于参数 U 取值于 $\Pi_d(V)$ 中时系统 $\overline{\text{PPS}}$ 的解集. 因此, 根据 (1.1) 和定理 3.3, 可得下面结果.

定理 3.4 [4–6] 对于任何取定的 $U \in \mathbb{R}^d \cap \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 和 $V \in \Theta_{\text{BQ}}$, 且 $U = \Pi_d(V)$, 参数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 、系统 PPS 、系统 $\overline{\text{PPS}}$ 和这些 SASS_i 有下面关系: (1)

$$\text{TRzero}(\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)) = \text{TRzero}(\text{PPS}) = \text{TRzero}(\overline{\text{PPS}}) = \bigcup_{i=1}^m \text{Rzero}(\text{SASS}_i), \quad (3.11)$$

$$\text{TRzero}(\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n))|_{\sigma_i} = \text{TRzero}(\overline{\text{PPS}})|_{\sigma_i} = \text{Rzero}(\text{SASS}_i), \quad (3.12)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$;

(2) 若参数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 是零维的, 那么, 对每个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$\text{NTRzero}(\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n))|_{\sigma_i} = \text{NTRzero}(\overline{\text{PPS}})|_{\sigma_i} = \text{NRzero}(\text{SASS}_i), \quad (3.13)$$

其中 $\text{NTRzero}(\cdot)|_{\sigma_i}$ 和 $\text{NRzero}(\cdot)$ 分别表示一个给定系统在胞腔 σ_i 内的无挠实零点数和实零点数.

由定理 3.4 可知, 当需要刻画参数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 关于参数 V 的实零点 (如实零点数、参数的存在性等) 时, 只要研究参数分片系统 $\overline{\text{PPS}}$ 关于 U 值的实零点. 定理 3.4 也表明, 解 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 等同于解 m 个以 $U = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ 作为参数的参数半代数系统 $\text{SASS}_1, \dots, \text{SASS}_m$.

注 3.2 由于在 $\text{SASS}_1, \dots, \text{SASS}_m$ 中参数值 U 是一样的, 因此必须把这 m 个参数半代数系统作为一个整体来求解, 而不能各自单独求解.

3.2 参数分片多项式系统的判别簇

本小节根据 Lai 等人 [4] 介绍参数分片多项式系统的判别簇 $W_{\mathcal{Z}}$ 及其性质, 计算判别簇 $W_{\mathcal{Z}}$ 的算法. Lai 等人 [4] 证明了, 只要能描述 $(\mathbb{R}^d \cap \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})) \setminus W_{\mathcal{Z}}$, 那么, 判别簇 $W_{\mathcal{Z}}$ 就能用来解参数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$.

Lazard 和 Rouillier [20] 提出了一种新的方法用于研究基本构造集

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{C}^n, p_1(x) = 0, \dots, p_s(x) = 0, f_1(x) \neq 0, \dots, f_l(x) \neq 0\}$$

和基本半代数集

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, p_1(x) = 0, \dots, p_s(x) = 0, f_1(x) > 0, \dots, f_l(x) > 0\},$$

其中 $p_i, f_i \in \mathbb{Q}[U, X]$, $x = [U, X]$, $U = [u_1, \dots, u_d]$ 是参数, $X = [x_1, \dots, x_n]$ 是变元.

设 Π_U 表示到参数空间的典范投影, $\bar{C}$ 表示构造集 C 的 Zariski 闭包. 这个 Zariski 闭包 C 等于 C 在 $\mathbb{C}^n$ 中通常拓扑意义下的闭包. 假设 $\overline{\Pi_U(C)}$ 的维数等于 δ .

定义 3.1 ^[20] 代数簇 W 是一个 C 关于 Π_U 的判别簇当且仅当:

- (1) $\overline{\Pi_U(C)}$ 包含 W , 且 $W = \overline{\Pi_U(C)}$ 当且仅当对几乎所有的 $u \in \overline{\Pi_U(C)}$, $\Pi_U^{-1}(u) \cap C$ 是无穷集;
- (2) $\overline{\Pi_U(C)} \setminus W$ 的联通分支 $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ 是 δ 维的解析子流形, 并且对每一个 $i = 1, \dots, k$, $(\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}_i) \cap C, \Pi_U)$ 是 $\mathcal{U}_i$ 的一个解析覆盖 (这保证: 在 u 的邻域里, $\Pi_U^{-1}(u) \cap C$ 的基数不变; $\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}_i) \cap C$ 仅有有限个叶; Π_U 是一个从每个叶到 $\mathcal{U}$ 上的局部微分同胚).

在 2007 年, Lazard 和 Rouillier ^[20] 给出了一个计算构造集 C 关于 Π_U 的判别簇 W 和极小判别簇 W_D 的算法.

对每一个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 定义

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{SASS}_i} &:= \{x \in \mathbb{C}^{d+n}, \varphi_1 \mid \sigma_i(U, X) = 0, \dots, \varphi_n \mid \sigma_i(U, X) = 0, g_1^{[i]}(X) \neq 0, \dots, g_{\gamma_i}^{[i]}(X) \neq 0\}, \\ \mathcal{S}_{\text{SASS}_i} &:= \{x \in \mathbb{R}^{d+n}, \varphi_1 \mid \sigma_i(U, X) = 0, \dots, \varphi_n \mid \sigma_i(U, X) = 0, g_1^{[i]}(X) > 0, \dots, g_{\gamma_i}^{[i]}(X) > 0\}, \end{aligned}$$

其中 $U = [u_1, \dots, u_d]$ 是参数, $X = [x_1, \dots, x_n]$ 是变元.

定义 3.2 ^[4] 假设 $f_\omega \in C_{k_\omega}^{\omega}(\Delta)$, $\omega = 1, \dots, n$, 且对每个 Δ 中的 n 维胞腔 σ_i , $f_\omega \mid_{\sigma_i} \in \mathbb{Q}[V][X]$. 对每一个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 设 $W_{\text{SASS}_i} \subset \mathbb{C}^d$ 是 $\mathcal{C}_{\text{SASS}_i}$ 关于 Π_U 的判别簇, 那么称 $W_Z := \bigcup_{i=1}^m W_{\text{SASS}_i}$ 是参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 关于 Π_U 的一个判别簇, 这个 W_Z 也称为参系数分片多项式系统 $\overline{\text{PPS}}$ 关于 Π_U 的一个判别簇.

用 Lazard 和 Rouillier ^[20] 的方法, Lai 等人 ^[4] 证明了下列定理.

定理 3.5 ^[4] 假设 $f_\omega \in C_{k_\omega}^{\omega}(\Delta)$, $\omega = 1, \dots, n$, 且对每个 Δ 中的 n 维胞腔 σ_i , $f_\omega \mid_{\sigma_i} \in \mathbb{Q}[V][X]$. 设 $W_Z \subset \mathbb{C}^d$ 是参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 关于 Π_U 的一个判别簇. 若 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 是零维的, 那么,

(i) $(\mathbb{R}^d \cap \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})) \setminus W_Z$ 有有限数目的联通分支, 且每个分支是实解析流形; 若 $\mathcal{U}$ 是这样的一个联通分支, 那么在 $\mathcal{U}$ 上, $\mathcal{S}_{\text{SASS}_i}$ 中的点的个数不变, 并且若 $\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{S}_{\text{SASS}_i}$ 不空, 那么 $(\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{S}_{\text{SASS}_i}, \Pi_U)$ 是 $\mathcal{S}_{\text{SASS}_i}$ 的一个实解析覆盖.

(ii) 对每个 Δ 中的 n 维胞腔 σ_i , 在 $\mathcal{U}$ 上, 参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 在 σ_i 内的无挠零点个数不变. 进而在 $\mathcal{U}$ 上, 参系数 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 的无挠零点个数不变, 且若对每一个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{S}_{\text{SASS}_i}$ 不空, 则 $(\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}) \cap \text{Tzero}(\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)), \Pi_U)$ 是 $\text{Tzero}(\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n))$ 的一个实解析覆盖.

定理 3.5 表明, 解参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 简化为计算 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 关于 Π_U 的一个判别簇 W_Z .

基于 Lazard 和 Rouillier ^[20] 的算法、Wang ^[21, 22] 的方法、Moroz 的 DV 程序包、Liang 等人 ^[23] 的 Rootfinding [Parametric] 程序包, 文献 [4] 给出了算法 DISCRVAR OF PPAV 来计算 W_Z .

算法: DISCRVAR OF PPAV

输入: 参系数分片多项式 $f_1, \dots, f_n$, 其中 $f_1 \mid \sigma_i, \dots, f_n \mid \sigma_i \in \mathbb{Q}[V][X]$ ($i = 1, \dots, m$); 非负整数 $r_1, \dots, r_n$.

输出: $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$, W_Z , $\{\text{SASS}_1, \dots, \text{SASS}_m\}$ 和参系数分片多项式系统 $\overline{\text{PPS}}$.

定理 3.5 也表明, 只要能描述 $(\mathbb{R}^d \cap \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})) \setminus W_Z$, 那么, 判别簇 W_Z 就能用来解参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$. 这个描述能通过使用临界点方法 ^[24] 与柱形代数分解 ^[25–27] 来做, 或者通过开柱形代数分解 ^[28–30] 来描述.

3.3 参系数分片多项式系统解的分类

假设参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 是零维的, 我们想回答以下问题: 给定一个参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 和整数 $N_1, \dots, N_m$, 在参系数空间 Θ_{BQ} 内是否存在一个开集 $\mathcal{O}$ 使得对所有的点 $p_0 \in \mathcal{O}$, 这个零维非参系数分片多项式系统 $\mathcal{Z}_{p_0}(f_1, \dots, f_n)$ 在 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 内各自恰好有 $N_1, \dots, N_m$ 个不同的无挠零点? 这里 $\mathcal{Z}_{p_0}(f_1, \dots, f_n)$ 是由参系数系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 中的参系数赋值 p_0 而得. 假如存在, 显式地给出一组 $a \in \mathcal{O}$.

上述问题等价于: 对于参系数分片多项式系统 $\overline{\text{PPS}}$, 在参系数空间 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 里是否存在一个开集 $\mathcal{O}$, 使得对于所有的 $p_0 \in \mathcal{O}$, 这个零维非参系数分片多项式系统 $\overline{\text{PPS}}_{p_0}$ 在 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 内各自恰好有 $N_1, \dots, N_m$ 个不同的无挠零点? 这里 $\overline{\text{PPS}}_{p_0}$ 是由参系数系统 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 中的参系数赋值 p_0 而得. 如果存在, 显式地给出一组 $a \in \mathcal{O}$.

为了回答上述问题, Lai 等人^[4] 根据 $\overline{\text{PPS}}_{p_0}$ 在剖分 Δ 中的每个 n 维胞腔内的无挠零点个数, 提出了一种对 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 的一个稠密开集的参数值 p_0 进行分类的方法. 这个方法可有效地计算 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 的一个关于 $\overline{\text{PPS}}$ 的开分类.

定义 3.3 ^[4] (开分类) 设 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$ 是一个零维参系数分片多项式系统 (那么参系数系统 $\overline{\text{PPS}}$ 也是零维的). 假设 $\mathcal{J}$ 是 $\mathbb{Z}_+^m$ ($\mathbb{Z}_+$ 表示非零整数集) 的一个含有有限个元素的子集, $[N_1, \dots, N_m] \in \mathcal{J}$, $\mathcal{O}_{[N_1, \dots, N_m]}$ 是参系数空间 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 的一个开集 (Euclid 拓扑) 且使得

(1) $\forall p_0 \in \mathcal{O}_{[N_1, \dots, N_m]}$, $\overline{\text{PPS}}_{p_0}$ (或者 $\mathcal{Z}_{p_0}(f_1, \dots, f_n)$) 在 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 中各自恰好有 $N_1, \dots, N_m$ 个不同的无挠零点;

(2) $\bigcup_{[N_1, \dots, N_m] \in \mathcal{J}} \mathcal{O}_{[N_1, \dots, N_m]}$ 在参系数空间 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 内是稠密的.

那么, 我们称族 $\{\mathcal{O}_{[N_1, \dots, N_m]}\}_{[N_1, \dots, N_m] \in \mathcal{J}}$ 是 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 的一个关于 $\overline{\text{PPS}}$ (或关于 $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_n)$) 的开分类.

注 3.3 特别地, $\overline{\text{PPS}}$ 的一个判别簇在 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 中补定义了 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 关于 $\overline{\text{PPS}}$ 的一个开分类. 文献 [4] 证明了, $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$ 关于 $\overline{\text{PPS}}$ 的一个开分类能用 (q, F, ϕ) 表示, 其中 (q, F, ϕ) 定义如下:

- (1) q 是一个多项式, 也是 $\overline{\text{PPS}}$ 的一个判别簇;
- (2) F 是由在 $q \neq 0$ 的每个联通分支中各取一个有理点组成的点集, 并且 $F \subset \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}})$;
- (3) ϕ 是一张表, 这张表使 F 中的每一点 p_0 与 $\overline{\text{PPS}}_{p_0}$ 在各个 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 中的无挠零点个数相对应.

在这个表示里, 每个 $\mathcal{O}_{[N_1, \dots, N_m]}$ 用 q 表示, 而 F 的子集 $\phi^{-1}([N_1, \dots, N_m])$ 使得

$$\mathcal{O}_{[N_1, \dots, N_m]} = \{x \in \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}}) \mid \text{存在一点 } p \in \phi^{-1}([N_1, \dots, N_m]) \text{ 和 } \Pi_d(\Theta_{\text{BQ}}) \text{ 中一条从 } p \text{ 到 } x \text{ 的连续路径, 该路径包含在 } q \neq 0 \text{ 内}\}.$$

基于文献 [8, 28–30] 的算法、Wang^[21, 22] 的方法、Safey 的 RAGlib (Release 2.32) 程序包和 Xia^[31, 32] 的 DISCOVERER 程序包, 文献 [4] 给出了下列算法用于计算开分类的一个表示.

算法: Algo-Clas-Rep OF PPAV

输入: 参系数分片多项式 $f_1, \dots, f_n$, 其中 $f_1|_{\sigma_i}, \dots, f_n|_{\sigma_i} \in \mathbb{Q}[V][X]$ ($i = 1, \dots, m$); 非负整数 $r_1, \dots, r_n$.

输出: 3 元组 (q, F, ϕ) .

3.4 参系数分片多项式系统有指定数目的实零点的充要条件

本小节介绍零维参系数分片多项式系统有指定数目的实零点的充分必要条件及其算法.

3.4.1 半代数系统的正则分解

依据文献 [31–33] 的研究工作, 本小节介绍半代数系统 (简记 SAS) 的正则分解及相关结果.

半代数系统是由有限个多项式方程、多项式不等方程和多项式不等式组成的一个系统, 其中所有多项式是整系数的. 我们称多项式构成的有序集合 $\{f_i(x_1, \dots, x_i), f_{i+1}(x_1, \dots, x_{i+1}), \dots, f_s(x_1, \dots, x_s)\}$ 为三角列, 其中 f_i 的导元为 x_i . 众所周知, 假若多项式 $p_1, \dots, p_n$ 生成的理想是零维的, 那么可以用吴方法、Gröbner 基方法或结式方法将其转化为一个或多个等价的三角型方程组 (参见文献 [31–38]). 所以, 一个零维的参系数系统 SAS 能转化为一个或多个等价的下列形式的方程组:

$$\text{TSA} : \begin{cases} f_1(u, x_1) = 0, \\ f_2(u, x_1, x_2) = 0, \\ \vdots \\ f_n(u, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ g_1(u, X) \geq 0, \quad g_2(u, X) \geq 0, \quad \dots, \quad g_t(u, X) \geq 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

其中 $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ 和 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 分别是参数和变元; $f_i \in \mathbb{Z}(u)[x_1, \dots, x_i], 1 \leq i \leq n$, $g_j \in \mathbb{Z}(u)[x_1, \dots, x_n], 1 \leq j \leq t$; 且 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 为正常升列 (参见文献 [31, 33–35, 37]). (3.14) 中的某些不等式可以是严格的. 将这种形式的系统称为参系数 TSA 系统^[33].

给定多项式 $g(x)$, 称 g 与 g'_x 关于 x 的 Sylvester 结式 (即 $\text{resultant}(g, g'_x, x)$) 为 $g(x)$ 关于 x 的判别式. 记为 $\text{Discrim}(g, x)$.

定义 3.4 ^[33] 给定多项式 g 及三角列 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, 令

$$r_n := g, \quad r_{n-i} := \text{resultant}(r_{n-i+1}, f_{n-i+1}, x_{n-i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

用 $\text{res}(g, f_n, \dots, f_i)$ 记 r_{i-1} ($1 \leq i \leq n$), 并称为 g 关于三角列 $\{f_i, f_{i+1}, \dots, f_n\}$ 的结式.

定义 3.5 ^[33] 给定一个参系数 TSA 系统 T , 用 I_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 记三角列 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 中 f_i 关于 x_i 的导系数. 对每个 f_i , 令

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{Discrim}(f_1, x_1), \quad IR_1 = I_1, \\ R_i &= \text{res}(\text{Discrim}(f_i, x_i), f_{i-1}, f_{i-2}, \dots, f_1), \quad i \geq 2, \\ IR_i &= \text{res}(I_i, f_{i-1}, \dots, f_1), \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

对每个 g_j , 令 $Rg_j = \text{res}(g_j, f_n, f_{n-1}, \dots, f_1)$. 定义

$$\text{BP}_S := \{R_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{Rg_j \mid 1 \leq j \leq t\} \cup \{IR_i \mid 1 \leq i \leq n\}, \quad \text{BP}_T(u) := \prod_{p \in \text{BP}_S} p, \quad (3.15)$$

并分别称 BP_S 和 $\text{BP}_T(u)$ 为系统 T 的临界多项式集和边界多项式. $\text{BP}_T(u)$ 简记为 BP.

令

$$IR_S := \{IR_i \mid 1 \leq i \leq n\}; \quad IR_T(u) := \prod_{p \in IR_S} p. \quad (3.16)$$

定义 3.6 ^[33] 给定一个如 (3.14) 的系统 TSA, 若它的临界多项式集中不包含 0, 即 $0 \notin \text{BP}_S$, 则称 TSA 是一个正则系统, 或称 TSA 是正则的.

定理 3.6 ^[33] 对非正则参系数 TSA 系统 T , 有一个构造性的算法能将其分解为有限个正则参系数 TSA 系统 T_i , 以 $\text{Rzero}(\cdot)$ 记一个给定系统的相异实解数, 使得 $\text{Rzero}(T) = \cup \text{Rzero}(T_i)$.

3.4.2 零维参系数分片多项式系统有指定数目的实零点的充分必要条件

由定理 3.6 和第 3 节开头所述, 每个 SASS_i 都可分解成有限个正则系统 $\text{TSAT}_1^{[i]}, \dots, \text{TSAT}_{\beta_i}^{[i]}$. 我们称集 $\text{RTSet}^{[i]} := \{\text{TSAT}_1^{[i]}, \dots, \text{TSAT}_{\beta_i}^{[i]}\}$ 为 SASS_i 的一个正则分解, 而集 $\text{RTSet} := \bigcup_{i=1}^m \text{RTSet}^{[i]}$ 称为 $\overline{\text{PPS}}$ 一个正则分解.

Lai 等人 ^[4,5] 给出了一算法 RegularDec-PPS Algo 用于计算 $\overline{\text{PPS}}$ 一个正则分解. 主要思想是, 利用吴消元法 ^[34,35]、Gröbner 基方法 ^[36] 或结式方法 ^[37] 将参系数半代数系统 SASS_i 转化成一个或多个参系数 TSA 系统 ^[31-35,37,38]. 然后, 检验各个分系统是否为正则的参系数 TSA, 如果不是, 则通过 WR 算法 ^[37,38] 和文献 ^[33, 定理 5.3] 所描述的方法或者 Wang ^[21] 的算法转化为正则 TSA.

设 $\text{RTSet} = \bigcup_{i=1}^m \text{RTSet}^{[i]}$ 是 $\overline{\text{PPS}}$ 的一个正则分解, 其中 $\text{RTSet}^{[i]} = \{\text{TSAT}_1^{[i]}, \dots, \text{TSAT}_{\beta_i}^{[i]}\}$. 定义

$$\text{BP}_{S(\overline{\text{PPS}})} := \bigcup_{1 \leq i \leq m} \bigcup_{1 \leq k \leq \beta_i} (\text{BP}_S)_k^{[i]}, \quad (3.17)$$

其中 $(\text{BP}_S)_k^{[i]}$ 是系统 $\text{TSAT}_k^{[i]}T$ 的临界多项式集.

利用 Yang 等人 ^[33] 提出的方法, 文献 ^[4,5] 证明了定理 3.7 和 3.8.

定理 3.7 ^[4,5] 给定参系数 $\overline{\text{PPS}}$, 假设 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}}) = \mathbb{R}^d$. 如果 PolySet 是参数 U 的多项式的有限集, 如 $\text{PolySet} = \{q_i(U) \in Z[u_1, \dots, u_d] \mid 1 \leq i \leq k\}$, 那么, 我们可以用柱形代数分解 (PCAD) 算法得到参数空间 $\mathbb{R}^d$ 的一个 PolySet- 符号不变的柱形代数分解 D (为了区分, 它的胞腔称为 cad- 胞腔) 及其柱形代数样本. 假如 PolySet 满足

(1) 在同一个 cad- 胞腔上系统 SASS_i 的相异实解数不变;

(2) 对任意 $q_i(U) \in \text{PolySet}$, 如果 $q_i(U)$ 在 cad- 胞腔 C_1 和 C_2 上有相同的符号, 则系统 SASS_i 在 C_1 和 C_2 上的相异实解数相同.

那么参系数 $\overline{\text{PPS}}$ 在 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 内分别恰有 $N_1, \dots, N_m$ 个相异无挠实零点的充分必要条件可以由 PolySet 中诸多项式的符号表示. 如果 PolySet 仅满足条件 (1), 那么, 参系数 $\overline{\text{PPS}}$ 在 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 内分别恰有 $N_1, \dots, N_m$ 个相异无挠实零点的必要条件可以由 PolySet 中诸多项式的符号表示. 进一步, 参系数 $\overline{\text{PPS}}$ 恰有 N 个相异无挠实零点的某个必要条件可以由 PolySet 中诸多项式的符号表示.

定理 3.8 ^[4,5] 给定参系数 $\overline{\text{PPS}}$, 假设 $\Pi_d(\Theta_{\text{BQ}}) = \mathbb{R}^d$. 当使用 PCAD 算法时, 只考虑同胚于 $\mathbb{R}^d$ 的 cad- 胞腔而不考虑同胚于 $\mathbb{R}^\tau$ ($\tau < d$) 的那些, 那么, $\text{BP}_{S(\overline{\text{PPS}})}$ 满足定理 3.7(1); 如果不考虑同胚于 $\mathbb{R}^\tau$ ($\tau < d$) 的 cad- 胞腔上的参数点, 那么, 参系数 $\overline{\text{PPS}}$ 在 n 维胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 内分别恰有 $N_1, \dots, N_m$ 个相异无挠实零点的某个必要条件可以由 $\text{BP}_{S(\overline{\text{PPS}})}$ 中诸多项式的符号表示. 进一步, 参系数 $\overline{\text{PPS}}$ 恰有 N 个相异无挠实零点的某个必要条件可以由 $\text{BP}_{S(\overline{\text{PPS}})}$ 中诸多项式的符号表示.

基于定理 3.7 和 3.8, 利用 Yang 等人 ^[33] 提出的方法和 Collins 等人提出的柱形代数分解方法 (参见文献 ^[25-27]), Lai 等人 ^[4,5] 提出了一个算法 Condition-GivenNumberInCell Algo, 用于产生零维参系数分片多项式系统 $Z(f_1, \dots, f_n)$ 在胞腔 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ 内分别恰有 $N_1, \dots, N_m$ 个相异无挠实零点的关于参数 V 的充要条件 $\Psi[N_1, \dots, N_m]$.

3.5 进一步研究问题

寻找比算法 SimPPS 更有效的算法, 以便更好地将解参数分片系统转化为解 m 个以 $U = (u_1, \dots, u_d)$ 作为参数的参数半代数系统.

致谢 作者真诚地感谢审稿人对本文给予的宝贵改进建议.

参考文献

- 1 Wang R H. The structural characterization and interpolation for multivariate spline. *Acta Math Sinica*, 1975, 18: 91–106
- 2 Wang R H, Shi X Q, Luo Z X, et al. *Multivariate Spline Functions and Their Applications*. Beijing: Science Press; New York: Kluwer Publisher, 2001
- 3 Cox D, Little J, O'Shea D. *Using Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998
- 4 Lai Y S, Wang R H, Wu J M. Solving parametric piecewise polynomial systems. *J Comput Appl Math*, 2011, 236: 924–936
- 5 Lai Y S, Wang R H, Wu J M. Real zeros of zero-dimensional parametric piecewise algebraic variety. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 817–832
- 6 赖义生, 王仁宏, 吴金明. 参数零维分片代数簇的实零点. *中国科学 A 辑*, 2008, 38: 1153–1167
- 7 Bochnak J, Coste M, Roy M F. *Real Algebraic Geometry*. Berlin: Springer, 1998
- 8 Basu S, Pollack R, Roy M F. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 2006
- 9 Farin G. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide*. New York: Academic Press, 1997
- 10 Viro O Y. Gluing of algebraic hypersurfaces, smoothing of singularities and construction of curves. In: *Proceedings of the Leningrad International Topological Conference*, Leningrad. Leningrad: Nauka, 1983, 149–197
- 11 Viro O Y. Gluing of plane real algebraic curves and construction of curves of degrees 6 and 7. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1060. Berlin: Springer, 1984, 187–200
- 12 Viro O Y. Patchworking real algebraic varieties. *ArXiv:0611382*, 2006
- 13 Shustin E. Critical points of real polynomials, subdivisions of Newton polyhedra and topology of real algebraic hypersurfaces. *Amer Math Soc Trans*, 1996, 173: 203–223
- 14 Shustin E. Gluing of singular and critical points. *Topology*, 1998, 37: 195–217
- 15 Bihan F. Viro method for the construction of real complete intersections. *Adv Math*, 2002, 169: 177–186
- 16 Itenberg I, Shustin E. Viro theorem and topology of real and complex combinatorial hypersurfaces. *Israel J Math*, 2003, 133: 189–238
- 17 Sturmfels B. Viro's theorem for complete intersections. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5)*, 1994, 21: 377–386
- 18 Lai Y S, Du W P, Wang R H. The viro method for construction of Bernstein-Bézier algebraic hypersurface piece. *Sci China Math*, 2012, 55: 1269–1279
- 19 Lai Y S, Du W P, Wang R H. The Viro method for construction of piecewise algebraic hypersurfaces. *Abstr Appl Anal*, doi: 10.1155/2013/690341, 2013
- 20 Lazard D, Rouillier F. Solving parametric polynomial systems. *J Symbolic Comput*, 2007, 42: 636–667
- 21 Wang D M. Computing triangular systems and regular systems. *J Symbolic Comput*, 2000, 30: 221–236
- 22 Wang D M. Decomposing polynomial systems into simple systems. *J Symbolic Comput*, 1998, 25: 295–314
- 23 Liang S, Gerhard J, Jeffrey D, et al. A package for solving parametric polynomial systems. *ACM Commun Comput Algebra*, 2009, 43: 61–72
- 24 Faugere J C, Moroz G, Rouillier F, et al. Classification of the perspective-three-point problem, discriminant variety and real solving polynomial systems of inequalities. In: *Proceedings of the Twenty-First International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. New York: ACM, 2008, 79–86
- 25 Collins G E. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. In: *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer, 1975, 134–183
- 26 Collins G E, Hong H. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. *J Symbolic Comput*, 1991, 12: 299–328
- 27 Brown C W. Simple CAD construction and its applications. *J Symbolic Comput*, 2001, 31: 521–547
- 28 Corvez S, Rouillier F. Using computer algebraic tools to classify serial manipulators. In: *Automated Deduction in*

- Geometry. Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 2930. Berlin: Springer, 2003, 31–43
- 29 Safey E I, Din M, Schost E. Polar varieties and computation of one point in each connected component of a smooth real algebraic set. In: International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2003. Philadelphia: Amer Math Soc, 2003, 224–231
- 30 Safey E I, Din M, Schost E. Properness defects of projection functions and computation of at least one point in each connected component of a real algebraic set. J Discrete Comput Geom, 2004, 32: 417–430
- 31 Xia B C, Yang L. An algorithm for isolating the real solutions of semi-algebraic systems. J Symbolic Comput, 2002, 34: 461–477
- 32 Xia B C. DISCOVERER: A tool for solving semi-algebraic systems. ACM Commun Comput Algebra, 2007, 41: 102–103
- 33 Yang L, Hou X R, Xia B C. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems. Sci China Ser F-Inf Sci, 2001, 44: 33–49
- 34 Wu W T. On zeros of algebraic equation — an application of Ritt principle. Sci Bull, 1986, 31: 1–5
- 35 Wu W T. Mechanical Theorem Proving in Geometries: Basic Principle. Berlin: Springer-Verlag, 1994
- 36 Buchberger B. Gröbner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory. In: Multidimensional Systems Theory. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1985, 184–232
- 37 Yang L, Zhang J Z, Hou X R. Nonlinear Algebraic Equation System and Automated Theorem Proving. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1996
- 38 Yang L, Zhang J Z, Hou X R. An efficient decomposition algorithm for geometry theorem proving without factorization. In: Proceedings of Asian Symposium on Computer Mathematics 1995. Tokyo: Scientists Incorporated, 1995, 33–41
- 39 Lai Y S, Wang R H. The Nöther and Riemann-Roch type theorems for piecewise algebraic curve. Sci China Ser A, 2007, 2: 165–182

Progress in construction of piecewise algebraic hypersurfaces and solving parametric piecewise polynomial systems

LAI YiSheng, DUAN DeXin, FANG XiaoKe & DU WeiPing

Abstract The multivariate spline is a piecewise polynomial with certain smoothness, and the piecewise algebraic hypersurfaces with certain smoothness (i.e. the set of all common zeros of multivariate splines) have become useful tools for representing or approximating surfaces. Studying an effective method for the construction of real piecewise algebraic hypersurfaces of a given degree with certain smoothness and prescribed topology is one of the important ways to solve the problem of how to represent or approximate geometric objects with certain topological structure (especially the complex topology structure), and also a new and important topic of computational geometry and algebraic geometry. Parametric piecewise polynomial systems are not only closely related to a series of research, such as intersection of surfaces; blending curves and surfaces; generation of transition surfaces, but also essential generalization of the parametric semi-algebraic systems. The purpose of this paper is to introduce some recent research progress on the construction of real piecewise algebraic hypersurfaces, and parametric piecewise polynomial systems.

Keywords piecewise algebraic hypersurfaces, parametric polynomial systems, Viro method, chart, number of real zeros

MSC(2010) 65D07, 65D10, 41A15, 41A46, 14G30, 14H99, 14M15, 14P25, 14Q10

doi: 10.1360/N012015-00063