微分方程公式的机器推导 (II)

刘尊全

秦朝斌

(中国科学院应用数学研究所)

(中国科学院力学研究所)

一、问题与结果

在文献[1]中我们开展了微分方程公式的机器推导,并在一个特例,即 Байтин 型^[2]的情形,计算了 V_3 、 V_5 、 V_7 。

在文献[1]中 V_3 为 2 项, V_5 为 17 项, V_7 为 74 项。在 $V_3 = 0$ 的条件下,加工出 $\tilde{V}_5$ 为 5 项,在 $V_3 = V_5 = 0$ 的条件下,加工出 $\tilde{V}_7$ 为 9 项。

这种多项式合并的计算量,随着计算问题的复杂化成指数的增加。例如, V_7 算出为 198 项,要验证它在 $V_3 = V_5 = V_7 = 0$ 的条件下是否为零,极为费工,并极易出错。因此,我们将这种合并过程交机器自动进行,这是本文比文献[1]前进的一个特点。

从机器推导公式的结果中,我们发现了 $\tilde{V}_i$ 的不唯一性,但它们却都是等价的,即对于中心与焦点的判定和对于稳定性与不稳定性的判定是相同的,不依赖于合并的次序而改变。

在作了这一处理上的前进之后,本文直接验证了在 $V_3 = V_5 = V_7 = 0$ 的条件下,有 $V_9 = 0$ 。

二、具体结果

$$\tilde{V}_3 = V_3 = -\frac{1}{3} L_3 L_5 + \frac{1}{3} L_5 L_6 = -\frac{1}{3} L_5 (L_3 - L_6). \quad (2 \text{ 项})$$

V_5 为 17 项,利用 $\tilde{V}_3 = 0$, 即 $L_3 L_5 = L_5 L_6$ 之后得到:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_5 &= \frac{1}{3} L_2 L_3^2 L_4 + \frac{1}{15} L_2 L_3 L_4^2 - \frac{1}{15} L_2 L_4^2 L_6 + \frac{1}{3} L_2 L_4 L_6^2 - \frac{2}{3} L_2 L_3 L_4 L_6 \\ &= \frac{1}{15} L_2 L_4 (L_3 - L_6) (L_4 + 5L_3 - 5L_6). \end{aligned} \quad (5 \text{ 项})$$

V_7 为 74 项,利用 $\tilde{V}_3 = 0$, 即 $L_3 L_5 = L_5 L_6$ 及 $\tilde{V}_5 = 0$, 即

$$L_2 L_3^2 L_4 = -3 \left(\frac{1}{15} L_2 L_3 L_4^2 - \frac{1}{15} L_2 L_4^2 L_6 + \frac{1}{3} L_2 L_4 L_6^2 - \frac{2}{3} L_2 L_3 L_4 L_6 \right)$$

之后,得到:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_7 &= -\frac{2}{35} L_2 L_3 L_4^2 L_6^2 - \frac{2}{175} L_2 L_3 L_4^3 L_6 - \frac{2}{35} L_2^3 L_3 L_4^2 + \frac{2}{35} L_2 L_4^2 L_6^3 + \frac{2}{175} L_2 L_4^3 L_6^2 \\ &\quad + \frac{2}{35} L_2^3 L_4^2 L_6 = -\frac{2}{175} L_2 L_4^2 (L_3 - L_6) (5L_6^2 + L_4 L_6 + 5L_4^2). \end{aligned} \quad (6 \text{ 项})$$

本文 1979 年 10 月 18 日收到。

这里的 $\tilde{V}_7$ 与上文^[1]用人工方法合并的 $\tilde{V}_7$ 形式不同,但实质是一样的,具体地说,当 $\tilde{V}_7^* = -V_7$, 即

$$\tilde{V}_7^* = -\frac{25\pi}{32} L_2 L_4 (L_3 - L_6)^2 (L_3 L_6 - 2L_6^2 - L_2^2) \text{ (Баутин 形式)}$$

与本文的 $\tilde{V}_7$ 有关系,

$$\tilde{V}_7^* = \left(\frac{75}{64\pi}\right) \cdot \tilde{V}_7 + \frac{45}{224\pi} (L_4 L_6 + 10L_6^2 + 5L_2^2 - 5L_3 L_6) \cdot \tilde{V}_5.$$

由此可见,当 $\tilde{V}_5 = 0$ 时, $\tilde{V}_7^*/\tilde{V}_7 = \frac{75}{64\pi} > 0$, 因此本文的 $\tilde{V}_7$ 虽与前文^[1]的 $\tilde{V}_7$ 形式不同,而所作出的 $\tilde{V}_7$ 应加负号的结论是相同的.

在微分方程机械化的实践中,用计算机来得到新的结果,发现新的现象,这是具有重要意义的.著名的数理逻辑学家王浩教授在 1957 年发表的文章中指出:所谓定理的机械化证明,乃是以量的复杂来换取质的困难^[3].我们从实践中体会到,这是数学机械化研究中关于计算机智能的一个非常重要的论述.

对于 Баутин 型^[2]的情形,在 $V_3 = V_5 = V_7 = 0$ 的条件下,机器严格地算出了 $\tilde{V}_7 = 0$. 即 V_7 可写成 $V_7 = A \cdot \tilde{V}_3 + B \cdot \tilde{V}_5 + C \cdot \tilde{V}_7$ 的形式.

总结有:

$$\tilde{V}_3 = -\frac{1}{3} L_5 (L_3 - L_6);$$

$$\tilde{V}_5 = \frac{1}{15} L_2 L_4 (L_3 - L_6) (L_4 + 5L_3 - 5L_6);$$

$$\tilde{V}_7 = -\frac{2}{175} L_2 L_4^2 (L_3 - L_6) (5L_6^2 + L_4 L_6 + 5L_2^2);$$

$$\tilde{V}_7 = V_7 |_{\tilde{V}_3=\tilde{V}_5=\tilde{V}_7=0} = 0.$$

致谢:本工作是在秦元勋教授指导下进行的,特此致谢.

参 考 文 献

- [1] 刘尊全、秦朝斌,中国科学,1980, 8: 812—820.
- [2] Баутин, Н. Н., Матем. сбор., 30 (1952), 72, 181—195.
- [3] Wang Hao (王浩), A Survey of Mathematical Logic, 科学出版社, 1957.