斜环上酉 Lie 代数的 Fermion 表示

献给万哲先教授 90 华诞

陈福林, 谭绍滨*

厦门大学数学科学学院, 厦门 361005

E-mail: chenfl@xmu.edu.cn, tans@xmu.edu.cn

收稿日期: 2016-11-29; 接受日期: 2017-04-17; 网络出版日期: 2017-06-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11501478, 11471268 和 11531004) 和中央高校基本科研业务费基金 (批准号: 20720150003) 资助项目

摘要 假设 σ 为一个任意 Abel 群上的特征, 以及 $\mathcal{R}_\sigma$ 为对应于特征 σ 的斜 Laurent 多项式环. 本文构造了坐标代数为 $\mathcal{R}_\sigma$ 的 Allison-Faulkner 型酉 Lie 代数的 Fermion 表示, 并确定了该表示的不可约分支.

关键词 酉 Lie 代数 Fermion 表示 不可约表示

MSC (2010) 主题分类 17B65, 17B67, 17B70

1 引言

有限维酉 Lie 代数是典型 Lie 代数中的重要一类. 它由在共轭转置下反变的复矩阵组成. Lie 代数的这种定义方法可以被推广到一般的环上的矩阵代数. 简单而言, 对环上的任一个反对合, 通过矩阵的转置作用可以诱导出矩阵代数的一个反对合. 从而在该反对合下反变的全体矩阵就构成一个 Lie 代数. 这类环上的矩阵 Lie 子代数通常也称为酉 Lie 代数, 其最早的定义由 Allison 和 Faulkner^[1] 给出. 从一个酉 Lie 代数的生成元和生成关系出发, 可以去抽象定义一个新的 Lie 代数: Steinberg 酉 Lie 代数. Steinberg Lie 代数是 Steinberg 群的 Lie 代数类比, 其在研究高维仿射 Lie 代数和根分次 Lie 代数的结构理论中有着重要的作用 (参见文献 [2, 3]). 之前, Chen 等^[4] 给出了一类具有非平凡中心扩张的酉 Lie 代数的顶点算子表示. 本文继续研究这类酉 Lie 代数的表示理论. 具体地, 我们给出了这类酉 Lie 代数的 Fermion 表示, 并完全确定了该表示的不可约分支.

正交仿射 Lie 代数的 Fermion 表示最早是由 Frenkel^[5, 6] 及 Kac 和 Peterson^[7] 分别独立给出. 随后, Feingold 和 Frenkel^[8] 对所有的典型仿射代数都给出了此类表示. 仿射 Lie 代数的 Fermion 实现现在已经被推广到各种无穷维 Lie 代数上, 如环面 Lie 代数^[9]、A 型高维仿射 Lie 代数^[10] 和根分次 Lie 代数^[11, 12] 等. 此外, Lau^[13] 给出了一种 Fermion 表示的一般性构造.

本文余下部分的结构如下. 第 2 节回顾文献 [4] 中引进的一类坐标代数为斜 Laurent 多项式环的酉 Lie 代数的定义. 第 3 节给出这类酉 Lie 代数的 Fermion 表示构造. 我们定义了一个无穷维 Clifford 代数上的诱导模, 然后在该诱导模上构造了一些与非零参数相关的生成函数. 利用这些生成函数得到

英文引用格式: Chen F L, Tan S B. Fermionic representations of unitary Lie algebras coordinated by skew rings (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1515–1524, doi: 10.1360/N012016-00219

了酉 Lie 代数的 Fermion 表示. 最后, 第 4 节给出该 Fermion 表示的不可约分解. 我们的方法来源于文献 [8]. 利用文献 [8] 中的技巧可以证明, 该酉 Lie 代数的表示的不可约分支与其作为无穷维 Clifford 代数偶部的表示时的不可约分支是一致的. 但与文献 [8] 中不同的是, 在作为无穷维 Clifford 代数偶部的表示时, 该 Fermion 表示的不可约分解不是显然的. 这是因为我们定义的诱导模不像文献 [8] 中定义的那样是从一个平凡模诱导得到的. 我们构造的 Fermion 表示是从一个有限维 Clifford 代数诱导上去的, 而有限维 Clifford 代数在作为其自身偶部的表示时不是不可约的. 但我们知道有限维 Clifford 代数的偶部是一个半单的结合代数. 因此, 该表示是完全可约的且其不可约分解在同构意义下是唯一存在的. Chen 等^[4]中有具体给过一个这样的分解. 基于此分解, 我们最终确定了酉 Lie 代数的 Fermion 表示的不可约分支.

2 酉 Lie 代数

本节给出一类具有非平凡中心扩张的坐标代数斜 Laurent 多项式环的酉 Lie 代数的具体定义.

设 G 是一个任意的 Abel 群, $\sigma : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ 是一个任意的群特征. 记 $\mathcal{R} = \bigoplus_{\alpha \in G} \mathbb{C}e^\alpha$ 为对应于 G 的群代数, 则特征 σ 诱导出该群代数上的一个自然同构

$$\sigma : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, \quad e^\alpha \mapsto \sigma(\alpha)e^\alpha.$$

记对应于 σ 的斜 Laurent 多项式环为 $\mathcal{R}_\sigma = \mathcal{R}[t^{\pm 1}, \sigma]$. 由定义知, 它有一组基元

$$t^m e^\alpha, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in G,$$

并且满足乘法关系 $e^\alpha t^m = (\sigma(\alpha))^m t^m e^\alpha$. 为方便起见, 接下来总是将元素 $\sigma(\alpha)$ ($\alpha \in G$) 记为 $\tilde{\alpha}$.

记 “ $-$ ” 为由如下条件决定的斜 Laurent 多项式环 $\mathcal{R}_\sigma$ 上的反对合:

$$\bar{t} = -t, \quad \overline{e^\alpha} = e^{-\alpha}.$$

注意到, 对任意的 $\alpha \in G$ 和 $m \in \mathbb{Z}$, 有 $\overline{t^m e^\alpha} = (-\tilde{\alpha})^{-m} t^m e^{-\alpha}$.

设 ν 是一个正整数. 定义 $\nu \times \nu$ 阶矩阵代数 $M_\nu(\mathcal{R}_\sigma)$ 上的一个线性变换

$$* : M_\nu(\mathcal{R}_\sigma) \rightarrow M_\nu(\mathcal{R}_\sigma), \quad X \mapsto \overline{X}^T,$$

这里记号 X^T 表示矩阵 X 的转置. 接下来将矩阵代数 $M_\nu(\mathcal{R}_\sigma)$ 看成一个 Lie 代数并记为 $\mathfrak{gl}_\nu(\mathcal{R}_\sigma)$. 容易验证映射

$$\theta : \mathfrak{gl}_\nu(\mathcal{R}_\sigma) \rightarrow \mathfrak{gl}_\nu(\mathcal{R}_\sigma), \quad X \mapsto -X^*$$

是 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_\nu(\mathcal{R}_\sigma)$ 上的一个对合. 矩阵 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_\nu(\mathcal{R}_\sigma)$ 中对应于对合 θ 的不动点子代数

$$\mathfrak{u}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -) = \{X \in M_\nu(\mathcal{R}_\sigma) \mid X^* = -X\}$$

通常称为坐标代数为 $\mathcal{R}_\sigma$ 的酉 Lie 代数 (参见文献 [1, 3]).

对任意的 $1 \leq i, j \leq \nu$, $\alpha \in G$ 和 $m \in \mathbb{Z}$, 记 $e_{ij}(\alpha, m) = E_{ij} t^m e^\alpha - E_{ji} \overline{t^m e^\alpha}$, 则酉 Lie 代数 $\mathfrak{u}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ 是由这些元素线性张成的. 注意到这些元素之间满足如下的关系式:

$$e_{ij}(\alpha, m) = -(-\tilde{\alpha})^{-m} e_{ji}(-\alpha, m). \quad (2.1)$$

定义 $\widehat{\mathfrak{gl}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma) = \mathfrak{gl}_\nu(\mathcal{R}_\sigma) \oplus \mathbb{C}c$ 为矩阵 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_\nu(\mathcal{R}_\sigma)$ 的一个一维中心扩张. 其具体的 Lie 关系如下:

$$[E_{ij}t^m e^\alpha, E_{kl}t^n e^\beta] = \delta_{jk}\tilde{\alpha}^n E_{il}t^{m+n} e^{\alpha+\beta} - \delta_{il}\tilde{\beta}^m E_{kj}t^{m+n} e^{\alpha+\beta} + \frac{m}{2}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{m+n,0}\delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta},1}\tilde{\alpha}^n c, \quad (2.2)$$

这里 $1 \leq i, j, k, l \leq \nu$, $m, n \in \mathbb{Z}$ 和 $\alpha, \beta \in G$.

类似地, 可以定义酉 Lie 代数 $\mathfrak{u}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ 上的一个一维中心扩张 $\widehat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -) = \mathfrak{u}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -) \oplus \mathbb{C}c$ 使得其 Lie 关系由 (2.2) 给定. 在本文中, 符号 z 和 w 总是代表可交换的形式变量. 对任意的 $1 \leq i, j \leq \nu$ 和 $\alpha \in G$, 定义形式级数 $e_{ij}(\alpha, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_{ij}(\alpha, n)z^{-n}$, 则由 (2.1) 知, 对 $1 \leq i, j \leq \nu$ 和 $\alpha \in G$, 有

$$e_{ij}(\alpha, z) = -e_{ji}(\alpha^{-1}, -\alpha z). \quad (2.3)$$

记 $\delta(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} z^i$ 和 $(D\delta)(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} iz^i$ 为通常意义下的 δ -函数和 $D\delta$ -函数. 利用上面定义的形式级数, Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ 中的 Lie 关系可改写成如下的形式.

命题 2.1 对任意的 $1 \leq i, j, k, l \leq \nu$ 和 $\alpha, \beta \in G$, 有

$$\begin{aligned} [e_{ij}(\alpha, z), e_{kl}(\beta, w)] &= \delta_{jk}e_{il}(\alpha + \beta, z)\delta\left(\frac{w}{\tilde{\alpha}z}\right) - \delta_{il}e_{kj}(\alpha + \beta, \tilde{\beta}^{-1}z)\delta\left(\frac{\tilde{\beta}w}{z}\right) \\ &\quad + \delta_{ik}e_{lj}(\alpha - \beta, \tilde{\beta}z)\delta\left(-\frac{w}{z}\right) - \delta_{jl}e_{ik}(\alpha - \beta, z)\delta\left(-\frac{\tilde{\beta}w}{\tilde{\alpha}z}\right) \\ &\quad + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta},1}c(D\delta)\left(\frac{w}{\tilde{\alpha}z}\right) - \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}c(D\delta)\left(-\frac{w}{z}\right). \end{aligned}$$

3 Fermion 表示

本节给出无限维酉 Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ 的 Fermion 表示构造.

首先引进一个 Clifford 代数 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)$. 由定义, 它是一个由元素 $a_i(m)$ ($1 \leq i \leq \nu$, $m \in \mathbb{Z}$) 生成并满足如下生成关系的结合代数:

$$a_i(m)a_j(n) + a_j(n)a_i(m) = (-1)^m \delta_{i,j} \delta_{m+n,0}, \quad 1 \leq i, j \leq \nu, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

我们在生成元集合 $\{a_i(m) \mid 1 \leq i \leq \nu, m \in \mathbb{Z}\}$ 上引进如下的正规序:

$$: a_i(m)a_j(n) := \begin{cases} a_i(m)a_j(n), & \text{若 } m < n, \\ \frac{1}{2}(a_i(m)a_j(n) - a_j(n)a_i(m)), & \text{若 } m = n, \\ -a_j(n)a_i(m), & \text{若 } m > n, \end{cases} \quad (3.1)$$

则由定义知, $: a_i(m)a_j(n) := - : a_j(n)a_i(m) :$.

定义 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{\geq}$ 、 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{<}$ 和 $\text{Cl}(\nu)$ 为 Clifford 代数 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)$ 中分别由集合

$$\{a_i(m) \mid 1 \leq i \leq \nu, m \geq 0\}, \quad \{a_i(m) \mid 1 \leq i \leq \nu, m < 0\} \quad \text{和} \quad \{a_i(0) \mid 1 \leq i \leq \nu\}$$

生成的子代数. 通过左乘作用, $\text{Cl}(\nu)$ 可以看成自身的一个表示. 将该表示扩充成子代数 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{\geq}$ 的一个表示使得元素 $a_i(m)$ ($1 \leq i \leq \nu$, $m > 0$) 的作用均是平凡的. 定义 Clifford 代数 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)$ 的诱导表示为

$$V(\nu) = \widehat{\text{Cl}}(\nu) \otimes_{\widehat{\text{Cl}}_{\geq}} \text{Cl}(\nu) = \widehat{\text{Cl}}(\nu)_{<} \otimes \text{Cl}(\nu).$$

对任意的 $1 \leq i \leq \nu$, 引进作用在空间 $V(\nu)$ 上的生成函数

$$a_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_i(n) z^{-n}, \quad a_i(z)_+ = \frac{1}{2} a_i(0) + \sum_{n > 0} a_i(n) z^{-n},$$

以及 $a_i(z)_- = a_i(z) - a_i(z)_+$. 同时, 对 $1 \leq i, j \leq \nu$, 引进正规序

$$: a_i(z) a_j(w) : = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} : a_i(m) a_j(n) : z^{-m} w^{-n},$$

以及收缩 (contraction)

$$\underbrace{a_i(z) a_j(w)} = a_i(z) a_j(w) - : a_i(z) a_j(w) :,$$

则由定义知,

$$\underbrace{a_i(z) a_j(w)} = a_i(z)_+ a_j(w) + a_j(w) a_i(z)_+ = a_i(z) a_j(w)_- + a_j(w)_- a_i(z). \quad (3.2)$$

进一步, 我们可以得到下面的定理.

引理 3.1 对 $1 \leq i, j \leq \nu$, 有

$$\underbrace{a_i(z) a_j(w)} = \delta_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{1 - w/z}{1 + w/z} \right). \quad (3.3)$$

证明 由 (3.2) 可以推出

$$\begin{aligned} \underbrace{a_i(z) a_j(w)} &= \sum_{m > 0, n \in \mathbb{Z}} \left(\left(\frac{1}{2} a_i(0) + a_i(m) \right) a_j(n) + a_j(n) \left(\frac{1}{2} a_i(0) + a_i(m) \right) \right) z^{-m} w^{-n} \\ &= \delta_{ij} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m > 0} \left(-\frac{w}{z} \right)^m \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - w/z}{1 + w/z} \right). \end{aligned}$$

证毕. □

下面结论中叙述的关于 δ -函数的替代性质是大家所熟知的 (参见文献 [14]).

引理 3.2 设 $Y(z, w)$ 是一个系数在某个向量空间中的形式级数. 若极限 $\lim_{w \rightarrow z} Y(z, w)$ 存在, 则

$$Y(z, w) \delta \left(\frac{w}{z} \right) = Y(z, z) \delta \left(\frac{w}{z} \right), \quad (3.4)$$

$$Y(z, w) (D\delta) \left(\frac{w}{z} \right) = Y(z, z) (D\delta) \left(\frac{w}{z} \right) + \left(w \frac{\partial}{\partial w} Y(z, w) \right) \delta \left(\frac{w}{z} \right). \quad (3.5)$$

对任意的非零复数 $c \in \mathbb{C}^*$, 定义常数

$$\zeta_c = \begin{cases} 0, & \text{若 } c = 1, \\ \frac{1}{2} \frac{1+c}{1-c}, & \text{若 } c \neq 1. \end{cases}$$

注意到 $\zeta_c = -\zeta_{c^{-1}}$. 利用引理 3.1, 我们可以得到如下结论.

引理 3.3 对 $1 \leq i, j, k, l \leq \nu$ 和 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$, 有

$$\underbrace{a_i(c_1 z) a_j(c_2 w)} + \underbrace{a_j(c_2 w) a_i(c_1 z)} = \delta_{ij} \delta \left(-\frac{c_2 w}{c_1 z} \right), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_i(z) a_l(-c_2 w)} \underbrace{a_j(-c_1 z) a_k(w)} + \underbrace{a_l(-c_2 w) a_i(z)} \underbrace{a_k(w) a_j(-c_1 z)} \\ &= \delta_{jk} \delta_{il} \left(\zeta_{c_1 c_2} \delta \left(\frac{w}{c_1 z} \right) + \zeta_{(c_1 c_2)^{-1}} \delta \left(\frac{c_2 w}{z} \right) + \delta_{c_1 c_2, 1} (D\delta) \left(\frac{w}{c_1 z} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

以及

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_i(z) a_k(w)} \underbrace{a_j(-c_1 z) a_l(-c_2 w)} + \underbrace{a_k(w) a_i(z)} \underbrace{a_l(-c_2 w) a_j(-c_1 z)} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl} \left(\zeta_{c_1^{-1} c_2} \delta \left(-\frac{w}{z} \right) + \zeta_{c_1 c_2^{-1}} \delta \left(-\frac{c_2 w}{c_1 z} \right) + \delta_{c_1, c_2} (D\delta) \left(-\frac{w}{z} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

证明 首先, 利用 (3.3) 可以直接推出 (3.6). 其次, 对于 (3.7), 同样由 (3.3) 知其左边部分等于 $\delta_{ij} \delta_{kl} \cdot A$, 其中

$$A := \frac{1}{4} \frac{1 + w/(c_1 z)}{1 - w/(c_1 z)} \frac{1 + c_2 w/z}{1 - c_2 w/z} + \frac{1}{4} \frac{1 + c_1 z/w}{1 - c_1 z/w} \frac{1 + z/(c_2 w)}{1 - z/(c_2 w)}.$$

利用文献 [4, 命题 2.7] 可得

$$A = \frac{1 + w/(c_1 z)}{2} \frac{1 + c_2 w/z}{2} \begin{cases} \frac{\delta(w/(c_1 z))}{1 - c_1 c_2} + \frac{\delta(c_2 w/z)}{1 - c_1^{-1} c_2^{-1}}, & \text{若 } c_1 c_2 \neq 1, \\ (D\delta) \left(\frac{w}{c_1 z} \right) + \delta \left(\frac{w}{c_1 z} \right), & \text{若 } c_1 c_2 = 1. \end{cases}$$

利用 δ -函数的替代性质 (3.4) 和 (3.5), 上述式子可简化成

$$\zeta_{c_1 c_2} \delta \left(\frac{w}{c_1 z} \right) + \zeta_{(c_1 c_2)^{-1}} \delta \left(\frac{c_2 w}{z} \right) + \delta_{c_1 c_2, 1} (D\delta) \left(\frac{w}{c_1 z} \right).$$

这就完成了 (3.7) 的证明. 最后, 在 (3.7) 中令 $k \mapsto l$ 和 $w \mapsto -c_2^{-1} w$ 即可得到 (3.8). $\square$

对 $1 \leq i, j \leq \nu$ 和 $c \in \mathbb{C}^*$, 定义形式级数

$$a_{ij}(c, z) =: a_i(z) a_j(-cz) : + \delta_{ij} \zeta_c. \quad (3.9)$$

同时, 记 $a_{ij}(c, n)$ 为级数 $a_{ij}(c, z)$ 的 n -次齐次元, 即

$$a_{ij}(c, n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-c)^{-m} : a_i(n-m) a_j(m) : + \delta_{n,0} \delta_{ij} \zeta_c.$$

下面是本节的主要结果.

定理 3.4 在作用 $e_{ij}(\alpha, n) \mapsto a_{ij}(\tilde{\alpha}, n)$, $c \mapsto 1$, $\alpha \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ 下, 向量空间 $V(\nu)$ 构成酉 Lie 代数 $\hat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ 的一个表示.

证明 设 $1 \leq i, j, k, l \leq \nu$ 和 $c_1, c_2 \in \sigma(G)$ (G 在同态 σ 下的像). 注意到

$$a_{ij}(c_1, z) =: a_i(z) a_j(-c_1 z) : + \delta_{ij} \zeta_{c_1} = - : a_j(-c_1 z) a_i(-c_1^{-1} z) : - \delta_{ij} \zeta_{c_1^{-1}} = -a_{ji}(c_1^{-1}, -c_1 z).$$

由此和 (2.3) 知定理中给出的作用是有意义的. 接下来验证算子 $a_{ij}(c_1, z)$ 和 $a_{kl}(c_2, w)$ 满足命题 2.1 中的 Lie 关系.

利用 Wick 定理 (参见文献 [8, 定理 5]), 有

$$\begin{aligned}
 [a_{ij}(c_1, z), a_{kl}(c_2, w)] &= [: a_i(z) a_j(-c_1 z) :, : a_k(w) a_l(-c_2 w) :] \\
 &= \underbrace{(a_j(-c_1 z) a_k(w) + a_k(w) a_j(-c_1 z))}_{=: a_i(z) a_l(-c_2 w) :} : \\
 &\quad + \underbrace{(a_i(z) a_l(-c_2 w) + a_l(-c_2 w) a_i(z))}_{=: a_j(-c_1 z) a_k(w) :} : \\
 &\quad - \underbrace{(a_i(z) a_k(w) + a_k(w) a_i(z))}_{=: a_j(-c_1 z) a_l(-c_2 w) :} : \\
 &\quad - \underbrace{(a_j(-c_1 z) a_l(-c_2 w) + a_l(-c_2 w) a_j(-c_1 z))}_{=: a_i(z) a_k(w) :} : \\
 &\quad + \underbrace{a_j(-c_1 z) a_k(w) a_i(z) a_l(-c_2 w)}_{=: a_k(w) a_j(-c_1 z) a_l(-c_2 w) a_i(z)} \\
 &\quad - \underbrace{a_i(z) a_k(w) a_j(-c_1 z) a_l(-c_2 w)}_{=: a_k(w) a_i(z) a_l(-c_2 w) a_j(-c_1 z)}.
 \end{aligned}$$

由 (3.4)–(3.6) 和 (3.9), 上述等式可化成

$$\begin{aligned}
 &\delta_{jk} : a_i(z) a_l(-c_1 c_2 z) : \delta\left(\frac{w}{c_1 z}\right) + \delta_{il} : a_j(-c_1 z) a_k(c_2^{-1} z) : \delta\left(\frac{c_2 w}{z}\right) \\
 &\quad - \delta_{ik} : a_j(-c_1 z) a_l(c_2 z) : \delta\left(-\frac{w}{z}\right) + \delta_{jl} : a_i(z) a_k(-c_1 c_2^{-1} z) : \delta\left(-\frac{c_2 w}{c_1 z}\right) \\
 &\quad + \delta_{jk} \delta_{il} \left(\zeta_{c_1 c_2} \delta\left(\frac{w}{c_1 z}\right) + \zeta_{(c_1 c_2)^{-1}} \delta\left(\frac{c_2 w}{z}\right) + \delta_{c_1 c_2, 1} (D\delta)\left(\frac{w}{c_1 z}\right) \right) \\
 &\quad - \delta_{ik} \delta_{jl} \left(\zeta_{c_1^{-1} c_2} \delta\left(-\frac{w}{z}\right) + \zeta_{c_1 c_2^{-1}} \delta\left(-\frac{c_2 w}{c_1 z}\right) + \delta_{c_1, c_2} (D\delta)\left(-\frac{w}{z}\right) \right) \\
 &= \delta_{jk} (: a_i(z) a_l(-c_1 c_2 z) : + \delta_{il} \zeta_{c_1 c_2}) \delta\left(\frac{w}{c_1 z}\right) - \delta_{il} (: a_k(c_2^{-1} z) a_j(-c_1 z) : + \delta_{kj} \zeta_{c_1 c_2}) \delta\left(\frac{c_2 w}{z}\right) \\
 &\quad + \delta_{ik} (: a_l(c_2 z) a_j(-c_1 z) : + \delta_{jl} \zeta_{c_1 c_2^{-1}}) \delta\left(-\frac{w}{z}\right) - \delta_{jl} (: a_i(z) a_k(-c_1 c_2^{-1} z) : \\
 &\quad + \delta_{ik} \zeta_{c_1 c_2^{-1}}) \delta\left(-\frac{c_2 w}{c_1 z}\right) + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{c_1 c_2, 1} (D\delta)\left(\frac{w}{c_1 z}\right) - \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{c_1, c_2} (D\delta)\left(-\frac{w}{z}\right) \\
 &= \delta_{jk} a_{il}(c_1 c_2, z) \delta\left(\frac{w}{c_1 z}\right) - \delta_{il} a_{kj}(c_1 c_2, c_2^{-1} z) \delta\left(\frac{c_2 w}{z}\right) \\
 &\quad + \delta_{ik} a_{lj}(c_1 c_2^{-1}, c_2 z) \delta\left(-\frac{w}{z}\right) - \delta_{jl} a_{ik}(c_1 c_2^{-1}, z) \delta\left(-\frac{c_2 w}{c_1 z}\right) \\
 &\quad + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{c_1 c_2, 1} (D\delta)\left(\frac{w}{c_1 z}\right) - \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{c_1, c_2} (D\delta)\left(-\frac{w}{z}\right).
 \end{aligned}$$

这样我们就完成了定理的证明. □

4 Fermion 表示的不可约分解

本节将证明定理 3.4 中得到的 $\widehat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ -模 $V(\nu)$ 是完全可约的. 同时, 我们还将完全确定该模的不可约分支.

首先引进一些新的记号:

$$\widehat{\text{Cl}}(\nu)^+ = \text{span}_{\mathbb{C}} \{ a_{i_1}(n_1) a_{i_2}(n_2) \cdots a_{i_k}(n_k) \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq \nu, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}, k \in 2\mathbb{Z} \},$$

$$\widehat{\text{Cl}}(\nu)^- = \text{span}_{\mathbb{C}}\{a_{i_1}(n_1)a_{i_2}(n_2)\cdots a_{i_k}(n_k) \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq \nu, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}, k \in 2\mathbb{Z} + 1\},$$

$$\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{\leq}^{\pm} = \widehat{\text{Cl}}(\nu)^{\pm} \cap \widehat{\text{Cl}}(\nu)_{<}, \quad \text{Cl}(\nu)^{\pm} = \text{Cl}(\nu) \cap \widehat{\text{Cl}}(\nu)^{\pm}.$$

由定义知, $\widehat{\text{Cl}}(\nu)^+$ 是 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)$ 的一个子代数且 $\widehat{\text{Cl}}(\nu) = \widehat{\text{Cl}}(\nu)^+ \oplus \widehat{\text{Cl}}(\nu)^-$.

注意到 $\text{Cl}(\nu)$ 是一个维数为 2^ν 的 Clifford 代数. 通过左乘作用, 我们可以将 $\text{Cl}(\nu)$ 看成 $\text{Cl}(\nu)$ 和它的偶部 $\text{Cl}(\nu)^+$ 的表示. 由于有限维代数 $\text{Cl}(\nu)$ 和 $\text{Cl}(\nu)^+$ 都是半单的, 该表示有一个在同构意义下唯一的不可约分解. 下面将简单回顾一下该不可约分解, 细节参见文献 [4, 第 3 节].

对 $\rho = \pm 1$, 记 $w_{2j-1}(\rho) = 1 + \sqrt{-1}\rho a_{2j-1}(0)$, $w_{2j}(\rho) = 1 + \rho a_{2j}(0)$. 进一步, 对 $\rho_1, \dots, \rho_\nu \in \{\pm 1\}$, 记

$$w(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu) := \prod_{j=1}^{\nu} w_j(\rho_j).$$

可以证明这些元素 $\{w(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu) : \rho_1, \dots, \rho_\nu = \pm 1\}$ 构成 Clifford 代数 $\text{Cl}(\nu)$ 的一组基.

记 $\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor$ 为小于或等于 $\frac{\nu}{2}$ 的最大整数. 对任意的 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}) \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, 定义 $\text{Cl}(\nu)$ 的一个子空间 $\text{Cl}(\nu, \gamma)$ 如下: 当 ν 是奇数时,

$$\text{Cl}(\nu, \gamma) = \text{span}_{\mathbb{C}}\left\{w(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu) \mid \rho_{2j}\rho_{2j+1} = \gamma_j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor\right\};$$

当 ν 是偶数时,

$$\text{Cl}(\nu, \gamma) = \text{span}_{\mathbb{C}}\left\{w(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu) \mid \rho_{2j}\rho_{2j+1} = \gamma_j, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{\nu-1}{2} \right\rfloor, \rho_\nu = \gamma_{\frac{\nu}{2}}\right\}.$$

同时, 不论 ν 是奇数还是偶数, 均定义

$$\text{Cl}(\nu, \gamma)^{\pm} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{w(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu) \in \text{Cl}(\nu, \gamma) \mid \rho_1 = \pm 1\},$$

那么有如下的结论.

命题 4.1 (i) 对任意的 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, $\text{Cl}(\nu, \gamma)$ 是代数 $\text{Cl}(\nu)$ 的一个不可约模. 从而作为 $\text{Cl}(\nu)$ -模, $\text{Cl}(\nu)$ 有如下的不可约分解: $\text{Cl}(\nu) = \bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} \text{Cl}(\nu, \gamma)$.

(ii) 对任意的 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, $\text{Cl}(\nu, \gamma)^{\pm}$ 均是代数 $\text{Cl}(\nu)^+$ 的不可约模. 从而作为 $\text{Cl}(\nu)^+$ -模, $\text{Cl}(\nu)$ 有如下的不可约分解: $\text{Cl}(\nu) = (\bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} \text{Cl}(\nu, \gamma)^+) \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} \text{Cl}(\nu, \gamma)^-)$.

(iii) 对任意的 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, 有 $\text{Cl}(\nu)^- \text{Cl}(\nu, \gamma)^{\pm} = \text{Cl}(\nu, \gamma)^{\mp}$.

对每一个 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, 记

$$V(\nu, \gamma) = \widehat{\text{Cl}}(\nu)_{<} \otimes \text{Cl}(\nu, \gamma),$$

$$V(\nu, \gamma)^+ = (\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{\leq}^+ \otimes \text{Cl}(\nu, \gamma)^+) \oplus (\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{\leq}^- \otimes \text{Cl}(\nu, \gamma)^-),$$

$$V(\nu, \gamma)^- = (\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{\leq}^+ \otimes \text{Cl}(\nu, \gamma)^-) \oplus (\widehat{\text{Cl}}(\nu)_{\leq}^- \otimes \text{Cl}(\nu, \gamma)^+),$$

则由命题 4.1, 我们不难得出下面的结论.

命题 4.2 (i) 对任意的 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, $V(\nu, \gamma)$ 是 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)$ 的一个不可约子模. 从而作为 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)$ -模, $V(\nu)$ 有如下的不可约分解: $V(\nu) = \bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} V(\nu, \gamma)$.

(ii) 对任意的 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, $V(\nu, \gamma)^{\pm}$ 均是 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)^+$ 的不可约子模. 从而作为 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)^+$ -模, $V(\nu)$ 有如下的不可约分解: $V(\nu) = (\bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} V(\nu, \gamma)^+) \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} V(\nu, \gamma)^-)$.

由算子 $a_{ij}(c, n)$ 的定义可知, $V(\nu)$ 的每一个 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)^+$ -子模也是酉 Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ 的子模. 特别地, 对任意的 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, $V(\nu, \gamma)^\pm$ 均是 $\widehat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ -子模. 接下来将要证明它们作为 $\widehat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ -模也是不可约的. 我们的方法来源于文献 [8].

为此, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, \nu$, 引入算子

$$D_i = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n n : a_i(n) a_i(-n) : .$$

该算子具有如下的性质.

引理 4.3 对 $1 \leq i, j \leq \nu$ 和 $m \in \mathbb{Z}$, 有 $[D_i, a_j(m)] = m \delta_{ij} a_j(m)$.

证明 利用正规序 (3.1) 和算子 D_i 的定义, 有

$$\begin{aligned} [D_i, a_j(m)] &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n (-1)^n [a_i(n) a_i(-n), a_j(m)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n (-1)^n (a_i(n) (a_i(-n) a_j(m) + a_j(m) a_i(-n)) - (a_i(n) a_j(m) + a_j(m) a_i(n)) a_i(-n)) \\ &= m \delta_{ij} a_j(m). \end{aligned}$$

证毕. □

我们接下来指出算子 D_i 可以由级数 $a_{ii}(z) := a_{ii}(1, z)$ 中的齐次分量 $a_{ii}(n) := a_{ii}(1, n)$, $n \in \mathbb{Z}$ 得到. 确切来讲, 是指算子 D_i 落在由这些齐次分量生成的算子子代数中. 为此, 对这些齐次分量, 我们引进一个新的 boson 型正规序

$$: a_{ii}(m) a_{ii}(n) : = \begin{cases} a_{ii}(m) a_{ii}(n), & \text{若 } m \leq n, \\ a_{ii}(n) a_{ii}(m), & \text{若 } m > n. \end{cases} \quad (4.1)$$

类似 Fermion 型正规序的情形, 定义级数

$$: a_{ii}(z) a_{ii}(w) : = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} : a_{ii}(m) a_{ii}(n) : z^{-m} w^{-n}.$$

同时, 原本在这些级数上有 Fermion 型正规序

$$: a_{ii}(z) a_{ii}(w) : = : a_i(z) a_i(-z) a_i(w) a_i(-w) : .$$

由 $a_{ii}(z)$ 与 $a_{ii}(w)$ 之间的 Lie 关系 (见定理 3.4 的证明) 可知,

$$: a_{ii}(z) a_{ii}(w) : - a_{ii}(z) a_{ii}(w) = \sum_{m < n \in \mathbb{Z}} [a_{ii}(n), a_{ii}(m)] z^{-n} w^{-m} = \sum_{0 < n \in 2\mathbb{Z}+1} 2n \left(\frac{w}{z} \right)^n. \quad (4.2)$$

另一方面, 由 Wick 定理和等式 (3.3) 知,

$$\begin{aligned} a_{ii}(z) a_{ii}(w) - : a_{ii}(z) a_{ii}(w) : &= : a_i(z) a_i(-z) : : a_i(w) a_i(-w) : - : a_i(z) a_i(-z) a_i(w) a_i(-w) : \\ &= \underbrace{a_i(z) a_i(-w)} : a_i(-z) a_i(w) : + \underbrace{a_i(-z) a_i(w)} : a_i(z) a_i(-w) : \\ &\quad - \underbrace{a_i(-z) a_i(-w)} : a_i(z) a_i(w) : - \underbrace{a_i(z) a_i(w)} : a_i(-z) a_i(-w) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{a_i(z)a_i(-w)} : \underbrace{a_i(-z)a_i(w)} - \underbrace{a_i(-z)a_i(-w)} : \underbrace{a_i(z)a_i(w)} \\
& = \left(\frac{1}{2} \frac{1+w/z}{1-w/z} \right) (: a_i(-z)a_i(w) : + : a_i(z)a_i(-w) :) \\
& \quad - \left(\frac{1}{2} \frac{1-w/z}{1+w/z} \right) (: a_i(z)a_i(w) : + : a_i(-z)a_i(-w) :) \\
& \quad + \frac{1}{4} \frac{1+w/z}{1-w/z} \frac{1+w/z}{1-w/z} - \frac{1}{4} \frac{1-w/z}{1+w/z} \frac{1-w/z}{1+w/z}. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \frac{1+w/z}{1-w/z} \frac{1+w/z}{1-w/z} - \frac{1}{4} \frac{1-w/z}{1+w/z} \frac{1-w/z}{1+w/z} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{(1-w/z)^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+w/z)^2} \\
&= - \sum_{0 < n \in 2\mathbb{Z}+1} 2n \left(\frac{w}{z} \right)^n.
\end{aligned}$$

因此, 由 (4.2)、(4.3) 和上式知,

$$\begin{aligned}
:a_{ii}(z)a_{ii}(w): - :a_{ii}(z)a_{ii}(w): &= (:a_{ii}(z)a_{ii}(w): - a_{ii}(z)a_{ii}(w)) + (a_{ii}(z)a_{ii}(w) - :a_{ii}(z)a_{ii}(w):) \\
&= \left(\frac{1}{2} \frac{1+w/z}{1-w/z} \right) (: a_i(-z)a_i(w) : + : a_i(z)a_i(-w) :) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} \frac{1-w/z}{1+w/z} \right) (: a_i(z)a_i(w) : + : a_i(-z)a_i(-w) :). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

注意到 $:a_{ii}(w)a_{ii}(w): = 0 = :a_i(w)a_i(w): = :a_i(-w)a_i(-w):$, 以及

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow w} \left(\frac{1}{2} \frac{1+w/z}{1-w/z} \right) (: a_i(-z)a_i(w) : + : a_i(z)a_i(-w) :) \\
&= \lim_{z \rightarrow w} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-w/z} \right) (: a_i(z)a_i(-w) : - : a_i(w)a_i(-z) :) \\
&= \left(: \left(z \frac{\partial}{\partial z} a_i(z) \right) a_i(-z) : - : a_i(z) \left(z \frac{\partial}{\partial z} a_i(-z) \right) : \right) \Big|_{z=w} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (k-2m)(-1)^m : a_i(k-m)a_i(m) : \right) w^{-m}.
\end{aligned}$$

因此, 通过对 (4.4) 取极限 $\lim_{z \rightarrow w}$, 我们得到下面的推论.

推论 4.4 级数 $:a_{ii}(z)a_{ii}(z):$ ($1 \leq i \leq \nu$) 的 0-次部分正好是 $4D_i$.

现在可以证明本文的主要结果.

定理 4.5 酉 Lie 代数 $\hat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ 的 Fermion 表示 $V(\nu)$ 是完全可约的, 且有如下的不可约分解:

$$V(\nu) = \left(\bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} V(\nu, \gamma)^+ \right) \oplus \left(\bigoplus_{\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}} V(\nu, \gamma)^- \right).$$

证明 对任意 $\gamma \in \{\pm 1\}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor}$, 我们已经说明了 $V(\nu, \gamma)^\pm$ 均是 $V(\nu)$ 的 $\hat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ -子模. 固定 $V(\nu, \gamma)^\pm$ 中的一个非零向量 $v^\pm$, 则只需证明由 $v^\pm$ 生成的 $\hat{\mathfrak{u}}_\nu(\mathcal{R}_\sigma, -)$ -子模 $U(\nu, \gamma)^\pm$ 等于 $V(\nu, \gamma)^\pm$.

注意到, 由推论 4.4 知, 算子 D_i ($1 \leq i \leq \nu$) 保持空间 $U(\nu, \gamma)^\pm$ 不变. 从而, 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}$, 算子 $e^{2\pi\sqrt{-1}\tau D_i}$ 仍保持空间 $U(\nu, \gamma)^\pm$ 不变. 利用引理 4.3, 对任意的 $1 \leq i, j \leq \nu$, 有

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\tau D_i} a_j(m) e^{-2\pi\sqrt{-1}\tau D_i} = \delta_{ij} e^{2\pi\sqrt{-1}m\tau} a_j(m).$$

因此, 当 $i \neq j$ 时, 有

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\tau D_i} a_{ij}(1, k) e^{-2\pi\sqrt{-1}\tau D_i} = e^{-2\pi\sqrt{-1}k\tau} a_{ij}(1, k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

利用上式和文献 [8] 中的定理 C 的证明, 可以推出算子 $a_i(m)a_j(k-m)$ ($1 \leq i \neq j \leq \nu, m, k \in \mathbb{Z}$) 仍保持空间 $U(\nu, \gamma)^\pm$ 不变. 注意到这些算子生成代数 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)^+$. 从而由 $V(\nu, \gamma)^\pm$ 作为 $\widehat{\text{Cl}}(\nu)^+$ -模是不可约的. 知 $U(\nu, \gamma)^\pm = V(\nu, \gamma)^\pm$. 这就完成了定理的证明. $\square$

参考文献

- 1 Allison B N, Faulkner J R. Nonassociative coefficient algebras for Steinberg unitary Lie algebras. *J Algebra*, 1993, 161: 1–19
- 2 Gao Y. Steinberg unitary Lie algebras and skew-dihedral homology. *J Algebra*, 1996, 179: 261–304
- 3 Gao Y. Involutive Lie algebras graded by finite root systems and compact forms of IM algebras. *Math Z*, 1996, 223: 651–672
- 4 Chen F, Gao Y, Jing N, et al. Twisted vertex operators and unitary Lie algebras. *Canad J Math*, 2015, 67: 573–596
- 5 Frenkel I B. Spinor representation of affine Lie algebras. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1980, 77: 6303–6306
- 6 Frenkel I B. Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory. *J Funct Anal*, 1981, 44: 259–327
- 7 Kac V G, Peterson D H. Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1981, 78: 3308–3312
- 8 Feingold A J, Frenkel I B. Classical affine Lie algebras. *Adv Math*, 1985, 56: 117–172
- 9 Jing N, Misra K C. Fermionic realization of toroidal Lie algebras of classical types. *J Algebra*, 2010, 324: 183–194
- 10 Gao Y. Fermionic and bosonic representations of the extended affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{gl}}_N(\mathbb{C}_q)$. *Canad Math Bull*, 2002, 45: 623–633
- 11 Chen H, Gao Y. BC_N -graded Lie algebras arising from fermionic representations. *J Algebra*, 2007, 308: 545–566
- 12 Chen F, Tan S. Twisted fermionic and bosonic representations for a class of BC -graded Lie algebras. *Front Math China*, 2011, 6: 607–628
- 13 Lau M. Bosonic and fermionic representations of Lie algebra central extensions. *Adv Math*, 2005, 194: 225–245
- 14 Frenkel I B, Lepowsky J, Meurman A. *Vertex Operator Algebras and the Monster*. Boston: Academic Press, 1989

Fermionic representations of unitary Lie algebras coordinated by skew rings

CHEN FuLin & TAN ShaoBin

Abstract Let σ be a character from an abelian group to $\mathbb{C}^*$, and let $\mathcal{R}_\sigma$ be the skew Laurent polynomial ring associated to it. In this paper, the fermionic representation of Allison-Faulkner type unitary Lie algebra coordinated by $\mathcal{R}_\sigma$ is constructed and its irreducible components are determined explicitly.

Keywords unitary Lie algebra, Fermionic representation, irreducible representation

MSC(2010) 17B65, 17B67, 17B70

doi: 10.1360/N012016-00219