基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化算法

王钊¹, 张洁琳^{1,3}, 罗钟铤^{1,2*}

1. 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024

2. 大连理工大学软件学院, 大连 116620

3. 吉林大学数学学院, 长春 130012

* 通信作者. E-mail: zxlue@dlut.edu.cn

收稿日期: 2016-07-14; 接受日期: 2016-11-28; 网络出版日期: 2017-02-22

国家自然科学基金 (批准号: 61432003, 61572105, 11171052, 61328206) 资助项目

摘要 本文针对零亏格的模型提出了基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化算法, 它是对平面局部/全局参数化方法的深入研究. 该算法主要分为局部优化和全局求解两个步骤, 在局部优化过程中, 采用平面 ARAP++ 方法优化 Spring 能量, 计算出平面上中心点在其一环域的位移, 然后把移动后的平面中心点通过凸组合权值投影到空间一环域的相对位置; 在全局求解过程中, 首先为平面 ARAP++ 方法添加球面约束, 然后利用 Newton 法进行迭代求解, 收敛迅速. 最后将本文方法与其他经典参数化方法进行比较, 数值实验表明, 本文方法在度量扭曲 (角度、面积、刚性) 和运行时间等方面均有一定优势, 并且在纹理映射等应用中也得到较好的视觉效果.

关键词 网格处理, 球面参数化, 共形, 等距, 保面积

1 引言

近年来, 球面参数化是数字几何处理领域备受关注的研究热点, 它在计算机辅助设计和图形学等方向有着广泛的应用. 在已有的经典球面参数化方法中, 球面凸组方法^[1]快速稳定, 通常情况下, 可以得到有效的参数化结果, 但有时会产生很大的扭曲. 球面共形方法^[2,3]可以得到较好的保角效果, 但是计算复杂度非常高, 并且所得到的参数化结果常常会产生翻转和重叠. 球面 ARAP 方法^[4]在处理平滑网格时保刚性的效果较好, 但是当处理高曲率 (有较大凸起) 的网格时, 往往也会产生重叠, 而且在优化求解过程中耗时较长. 本文提出了基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化算法, 这是一种新的局部/全局方法. 主要受到平面参数化方法^[5~7]和球面参数化方法^[1,4]的启发, 首先通过平面 ARAP++ 方法优化原始网格的 Spring 能量^[8], 然后添加球面约束进行求解, 最后将所有网格点精确投影到单位球面上. 数值实验表明, 本文算法与其他经典参数化算法相比, 在度量扭曲和运行时间等方面均具有一定的优势, 并且得到了较好的纹理映射效果, 如图 1 所示.

引用格式: 王钊, 张洁琳, 罗钟铤. 基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化算法. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 428–441, doi: 10.1360/N112016-00172
Wang Z, Zhang J L, Luo Z X. Spherical parameterization based on planar ARAP++ method (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 428–441, doi: 10.1360/N112016-00172

图 1 (网络版彩图) 5 种球面参数化方法

Figure 1 (Color online) The five types of spherical parameterization. (a) Convex; (b) ARAP^[4]; (c) BLD^[9]; (d) our conformal; (e) our isometric

本文的创新点如下, 首先采用平面 ARAP++ 方法局部优化 Spring 能量, 建立平面一环域与空间一环域的对应关系. 然后通过平面一环域中局部中心点的优化和移动, 计算其凸组合权值, 并将中心点按照该权值投影到空间一环域中. 最后为每个顶点都添加球面约束, 利用 Newton 法将所有网格顶点投影到空间球面上, 从而得到一类新的局部/全局球面参数化方法 (共形、等距、保面积).

2 相关工作

网格参数化一直是图形学中的热点问题, 并取得了一系列研究成果. Hormann 等^[10] 给出了关于网格参数化方法的综述, 其中经典球面参数化方法主要包含以下几类.

基于累进网格的方法^[11,12]: 基本思想是将原始网格逐渐简化成为四面体 (边折叠), 并得到一系列带有局部几何信息的累进网格, 然后通过删除顶点的逆序依次添加新的顶点 (点分裂) 来得到球面参数化, 最后通过全局优化来减小参数化结果的扭曲. 这类方法关键在于从粗糙网格到精细网格的过程中如何依次附加那些被删除的顶点. 虽然该方法可以得到有效的参数化结果, 但是它产生了较大的扭曲.

基于凸组合的方法: Gotsman 等^[1] 把平面凸组合方法推广到球面参数化中, 并将平面上的 Laplace 算子推广到空间 Laplace-Beltrami 算子^[13], 通过求解高维非线性方程组得到球面坐标, 该方法计算复杂度很高. Saba 等^[14] 提出在球面极坐标下计算残差的凸组合方法, 减少了未知数的个数, 显著提高计算效率. Gu 等^[3] 通过最小化原始网格的调和能量得到了球面共形参数化方法, 并将结果应用到人体核磁共振的医学分析中. Zayer 等^[15] 通过求解矩形域上极坐标定义的 Laplace 方程, 将平面极坐标直接投影到空间球面上. Athanasiadis 等^[16] 提出了基于几何约束优化的球面参数化方法, 并且较好地保持了原始网格的几何特征.

基于度量优化的方法: Sheffer 等^[2] 将平面 ABF 方法推广到球面上, 它直接优化了球面角度度量, 由于该方法计算复杂度非常高, 所以它并不实用. Friedel 等^[17] 通过优化一个混合角度和面积度量的目标函数来控制球面三角形的角度和面积扭曲. Chen 等^[18] 提出了基于优化 Ricci 能量的共形球面嵌入方法. Wang 等^[4] 提出了一种两步迭代算法来优化空间 ARAP 能量^[19], 通过添加一个球心点, 可以将球面三角形拼接投影到球面上, 从而得到保刚性的球面参数化结果. Wang 等^[9] 在球面约束下优化了 AMIPS 能量, 给出了一种简单、高效和低扭曲的双射球面参数化算法. 本文采用平面 ARAP++ 方法来优化网格 Spring 能量, 通过添加球面约束, 将平面上的顶点投影到空间球面, 给出一类局部/全局参数化方法, 并且提高了计算效率.

其他方法: Kent 等^[20]通过模拟气球膨胀的方式将原始网格粘附到球面上, 该方法可以得到有效的球面结果, 但是它并不能保持原始网格几何性质. Alexa^[21]提出了基于球面松弛的方法, 基本思想是首先将原始网格的所有顶点投影到模型的最小包围球面上, 然后保持若干顶点的位置不改变, 并使用 Laplace 平均算子来不断松弛球面上其他顶点的位置, 直到重叠消失为止. Isenburg 等^[22]将原始网格进行切割得到开网格, 借助从平面到球面的立体投影, 将平面方法推广至球面. Zou 等^[23]通过引入 Lie advection 理论, 提出了保面积球面参数化方法. Zhao 等^[24]基于 Monge-Brenier 定理和最优传输理论提出了另一种保面积的参数化方法.

3 基础知识

本节中, 主要介绍与本文球面算法紧密相关的平面参数化方法和相关知识, 以便在随后的章节中更好地阐述本文算法和推导.

3.1 平面 ARAP 和 ARAP++ 方法

设 S 是 3D 网格, x_i 是 S 的网格点, x_j 是 x_i 的一环点; S^* 是对应的 2D 网格, u_i 是 S^* 的网格点, u_j 是 u_i 的一环点; 根据 Intrinsic 方法^[25]中的局部 Dirichlet 能量^[26]表达式

$$E(i)_{\text{Dirichlet}} = \sum_{j \in N(i)} \cot(\theta_{i,j}) \|u_i - u_j\|^2,$$

通过优化整个网格的 Dirichlet 能量, 可以得到平面 ARAP 方法^[5]的表达式

$$\sum_{j \in N(i)} (\cot(\theta_{i,j}) + \cot(\theta_{j,i})) (u_i - u_j) = \sum_{j \in N(i)} (\cot(\theta_{i,j}) L_{(i,j)} + \cot(\theta_{j,i}) L_{(j,i)}) (x_i - x_j), \quad (1)$$

其中 $\theta_{i,j}$ 是一环域中边 (i, j) 左边的对角, $L_{(i,j)}$ 是 2×2 的拟合矩阵.

根据局部 Spring 能量^[8]表达式

$$E(i)_{\text{Spring}} = \sum_{j \in N(i)} \omega_{i,j} \|u_i - u_j\|^2,$$

通过优化整个网格的 Spring 能量, 可以得到平面 ARAP++ 方法^[7]的表达式

$$\sum_{j \in N(i)} \omega_{i,j} (u_i - u_j) = \sum_{j \in N(i)} \frac{\omega_{i,j}}{2} (L_{(i,j)} + L_{(j,i)}) (x_i - x_j), \quad (2)$$

其中 $\omega_{i,j}$ 可以选择 5 种经典权值, 如 Uniform 权值、Shape-preserving 权值、Mean-value 权值、Cotan 权值、Intrinsic 权值. 特别地, 由于 Dirichlet 能量可以看作特殊的 Spring 能量, 所以平面 ARAP 方法是平面 ARAP++ 方法的特例. 本文对平面 ARAP++ 方法做了球面推广, $\omega_{i,j}$ 为 Mean-value 权值^[27].

3.2 平面拟合矩阵的相关性质

在平面 ARAP++ 方法中, 拟合矩阵 L 的奇异值 δ_1, δ_2 具有如下 3 个性质^[5, 7]:

- (1) 共形: 当 $\delta_1 = \delta_2 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ 时, 拟合矩阵 L 是共形矩阵.
- (2) 等距: 当 $\delta_1 = \delta_2 = 1$ 时, 拟合矩阵 L 是等距矩阵, 即共形和保面积.
- (3) 保面积: 当 $\delta_1 = \delta, \delta_2 = 1/\delta$ 时, 拟合矩阵 L 是保面积矩阵, 其中 δ 是如下非线性方程的实根,

$$\delta^4 - \sigma_1 \cdot \delta^3 + \sigma_2 \cdot \delta + 1 = 0.$$

图 2 (网络版彩图) 原始网格和初始参数化

Figure 2 (Color online) Original mesh and initial parameterization

3.3 球面参数化的扭曲度量

为了衡量参数化结果的扭曲, 在本节介绍 3 种扭曲度量^[4,5] (角度、面积、刚性), 将原始网格 S 中的三角形 t 以及球面网格 S^* 中对应的三角形 t^* 展平到相同的参数平面上, 然后计算两个平面三角形之间的 Jacobian 矩阵 J_t 的奇异值 $\sigma_{1,t}$ 和 $\sigma_{2,t}$, 可以定义 3 种度量的表达式如下:

$$D_{\text{Angle}} = \sum_t \rho_t (\sigma_{1,t}/\sigma_{2,t} + \sigma_{2,t}/\sigma_{1,t}),$$

$$D_{\text{Area}} = \sum_t \rho_t (\sigma_{1,t}\sigma_{2,t} + 1/(\sigma_{1,t}\sigma_{2,t})),$$

$$D_{\text{Rigidity}} = \sum_t \rho_t (\sigma_{1,t} - 1)^2 + (\sigma_{2,t} - 1)^2,$$

其中权值 $\rho_t = A_t / \sum_t A_t$, A_t 表示三角形 t 的面积.

4 本文方法

本节提出了基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化算法, 这是一种新的局部/全局球面参数化方法, 将平面 ARAP++ 方法推广至球面. 首先通过局部优化 Spring 能量, 得到每个中心点在其一环域的位移, 然后利用凸组合权值计算中心点在球面一环域的投影, 最后添加球面约束, 采用 Newton 法将所有网格顶点投影到单位球面. 如图 2 所示, 由于该方法采用迭代方式求解, 所以需要将原始网格初始化到球面上. 每次迭代主要分为两个阶段: (1) 局部优化; (2) 整体求解. 作为局部/整体方法的基础, 读者可以阅读相关文献 [1, 4~7].

4.1 球面参数化算法

本小节利用平面和球面相结合的方法, 详细描述了本文提出的球面参数化算法. 算法的大体框架为: 首先建立平面一环域与球面一环域间的对应关系, 然后计算每个中心点在其一环域的位移和投影, 最后添加球面约束, 将平面 ARAP++ 方法投影至单位球面. 如图 3 所示, 具体步骤如下:

Step1. 采用球面凸组合参数化方法^[1] 将原始网格 S 初始化到球面 S_0^* .

Step2. 在图 2 中, 将 S 中 p_i 点及其一环域 $N(p_i)$ 和 S_0^* 中对应的 q_i 点及其一环域 $N(q_i)$ 通过离散指数映射^[28] 局部展平到平面上, 可以得到 p'_i 点及其一环域 $N(p'_i)$ 和 q'_i 点及其一环域 $N(q'_i)$, 如

图 3 (网络版彩图) 局部一环域的处理

Figure 3 The processing of the local 1-ring neighborhood. (a) Local flattening of original mesh; (b) local optimization; (c) local flattening of initial mesh; (d) global solution; (e) spherical projection; (f) spherical parameterization

图 3(a) 和 (c) 所示. 根据平面 ARAP++ 方法 (2), 可得

$$q_i' = \tilde{q}_i' + \sum_{j \in N(i)} \frac{\omega_{i,j}}{2} (L_{(i,j,j+1)} + L_{(i,j,j-1)}) (p_i' - p_j'), \quad (3)$$

其中 $\tilde{q}_i' = \sum_{j \in N(i)} \omega_{i,j} q_j'$, $\omega_{i,j}$ 为原始网格 S 中顶点 p_i 所对应一环域的凸组合权值, L 是 2×2 的拟合矩阵.

Step3. 如图 3(b), 在平面上计算中心点 q_i' 在其一环域中的相对位置, 本文选择计算中心点 q_i' 关于其一环点 q_j' 的 Mean-value 权值 $\tilde{\omega}_{i,j}$.

Step4. 如图 3(d), 利用上述权值 $\tilde{\omega}_{i,j}$, 以及 $q_i'' = \sum_{j \in N(i)} \tilde{\omega}_{i,j} q_j$, 将平面上的顶点 q_i' 投影到三维空间得到点 q_i'' , 然后在 q_i'' 的一环域中找到一个辅助点 $\tilde{q}_i = \omega_{i,j} q_j$. 如图 3(e), 最后再将顶点 q_i'' 投影到球面上得到 q_i , 其中 $\|oq_i''\| = \alpha_i \|oq_i\|$, α_i 是比例系数, 它的作用是使每个顶点都能精确投影到单位球面上.

Step5. 如图 3(f), 对平面 ARAP++ 方法 (2) 加入球面约束, 并且令 $\vec{B}_i = q_i'' - \tilde{q}_i$, 通过求解如下非线性方程组, 可以得到球面 q_i 点坐标,

$$\begin{cases} \|q_i\| = 1, & (i = 1, \dots, n), \\ \sum_{j \in N(i)} \omega_{i,j} (\alpha_i \cdot q_i - q_j) = \vec{B}_i. \end{cases} \quad (4)$$

图 4 (网络版彩图) 本文方法的迭代结果

Figure 4 (Color online) The iterative results produced by our method. (a) Original mesh; (b) 1 iteration; (c) 2 iterations; (d) 3 iterations

图 5 (网络版彩图) 后处理效果

Figure 5 (Color online) The post-processing result. (a) Original mesh; (b) before processing; (c) after processing

设 $q_i = (x_i, y_i, z_i)^T$, $\vec{B}_i = (a_i, b_i, c_i)^T$, 将等式 (4) 展开为

$$\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1, & (i = 1, \dots, n), \\ \sum_{j \in N(i)} \omega_{i,j} (\alpha_i x_i - x_j) = a_i, \\ \sum_{j \in N(i)} \omega_{i,j} (\alpha_i y_i - y_j) = b_i, \\ \sum_{j \in N(i)} \omega_{i,j} (\alpha_i z_i - z_j) = c_i. \end{cases} \quad (5)$$

本文采用 Newton 法迭代求解式 (5), 初始值为 $q_i^{(0)} = (x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)})$, $\alpha_i^{(0)} = 1$. 图 4 所示为本文等距方法经过 1~3 次迭代的结果.

特别地, 如果 $\vec{B}_i = (0, 0, 0)^T$, 则等式 (5) 与球面凸组合参数化方法^[1]的表达式相同. 如图 3(b) 和 (d), 由于将平面上的顶点 q'_i 通过凸组合权值映射到空间中的顶点 q''_i 的过程中, 两个中心点相对于其一环点的位置变化会存在微小误差, 所以就有可能使最后的结果产生重叠, 尤其在高曲率 (有较大凸起) 网格的球面参数化过程中. 如图 5 所示, 本文采用如下的后处理方法来消除重叠, 得到有效的参数化结果. 如果 $\|q''_i - \tilde{q}_i\| < 10^{-3}$, 则 $\vec{B}_i = (0, 0, 0)^T$.

在本文方法中, 当等式 (3) 对应 3 种不同的拟合矩阵 L 时, 可以得到不同性质的结果, 其中权值 $\omega_{i,j}$ 为 Mean-value 权值. 图 6 所示为 Gargoyle 模型经过 3 次迭代所得到共形、等距和保面积的球面参数化结果以及所对应的纹理映射效果图.

数值实验结果表明, 本文的 3 种球面参数化算法 (共形、等距、保面积) 可以使得总体 Spring 能量

$$W(S^*) = \sum_{i=1}^n E(i)$$

图 6 (网络版彩图) 球面参数化和纹理映射

Figure 6 (Color online) The spherical parameterization and texture mapping. (a) Our conformal; (b) our isometric; (c) our authalic

图 7 (网络版彩图) 数值收敛性

Figure 7 (Color online) The numerical convergence. (a) Our conformal; (b) our isometric; (c) our authalic

在不超过 5 次迭代后收敛到局部最小值. 图 7 展示了对本文大部分模型进行数值实验时, 3 种方法优化 Spring 能量的收敛结果.

4.2 多边界模型的纹理映射

对多边界网格模型进行纹理映射时, 通常首先将原始网格进行切割, 然后进行平面参数化. 但是该方法得到的纹理映射结果会出现一条长长的切割线, 而且其两端的纹理格不能自然衔接, 不太美观, 如图 8(c) 所示. 本文通过 Delaunay 三角剖分^[29] 对多边界的网格模型进行“补洞”预处理, 将多边界的网格变为零亏格, 然后对它进行球面参数化. 最后, 删除“补洞”时所添加的点, 并将球面网格投影到正方体上进行纹理映射. 这种方法得到的纹理格间的过渡连贯, 比较美观, 如图 8(f) 所示. 特别地, 当处理多亏格的模型时, 首先沿着亏格的内沿将网格切开, 使它具有多边界网格的拓扑结构, 然后采用上述方式将其转变成零亏格的模型, 最后按照上述方法进行球面纹理映射.

4.3 算法流程

由于本文算法涉及的琐碎细节较多, 为了便于编程实现, 在算法 1 中给出了详细的算法流程.

5 数值实验

本文实验均采用 MATLAB 编程实现, 在 i7 3.6 GHz CPU, 32 GB 内存的 PC 机上运行. 为了验

图 8 (网络版彩图) 多边界模型的纹理映射

Figure 8 (Color online) Texture mapping of the multi-boundary model. (a) Original mesh; (b) planar parameterization; (c) planar texture mapping; (d) spherical parameterization; (e) cube; (f) spherical texture mapping

算法 1 基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化算法

Input: A 3D mesh S ;

Output: A spherical mesh S^* ;

```

1:  $S^* = S_0^*$ ; // 初始化
2: loop
3:   for  $i = 1 : n$  do
4:     // 局部优化
5:      $\omega_{i,j} \leftarrow \text{ComputeWeights}(\text{RingNodes}(p_i))$ ;
6:      $\text{RingNodes}(p'_i) \leftarrow \text{ComputeWeights}(\text{RingNodes}(p_i))$ ;
7:      $\text{RingNodes}(q'_i) \leftarrow \text{ComputeWeights}(\text{RingNodes}(q_i))$ ;
8:      $L_{(i,j,j+1)} \leftarrow \text{FittingMatrix}(\Delta p'_i p'_j p'_{j+1}, \Delta q'_i q'_j q'_{j+1})$ ;
9:      $\text{New}(q'_i) \leftarrow \text{Relocate2D}(\Delta p'_i p'_j p'_{j+1}, \Delta q'_i q'_j q'_{j+1})$ ;
10:     $\tilde{\omega}_{i,j} \leftarrow \text{MeanValue}(\text{RingNodes}(\text{New}(q'_i)))$ ;
11:     $q''_i \leftarrow \text{Relocate3D}(\tilde{\omega}_{i,j}, \text{RingNodes}(q_i))$ ;
12:     $B_i \leftarrow \text{MotionVector}(q''_i, \tilde{q}_i)$ ;
13:    if  $\|B_i\| < 10^{-3}$ , then
14:       $B_i = (0, 0, 0)$ ; // 后处理
15:    end if
16:  end for
17:   $S_1^* \leftarrow \text{ComputePara}(\omega, B_i)$ ; // 全局求解
18:  if Iteration  $< 5$ , then
19:     $S_0^* = S_1^*$ ;
20:  else
21:     $S^* = S_0^*$ ;
22:    break;
23:  end if
24: end loop

```

表 1 平面 ARAP 与 ARAP++ 方法的扭曲度量和运行时间的比较
Table 1 Comparison of the distortion measures and running time between planar ARAP and ARAP++

Method	<i>n</i>	Child (V:6368, F:12732)				Skull (V:5007, F:10010)			
		Angle	Area	Rigidity	Time (s)	Angle	Area	Rigidity	Time (s)
ARAP	1	2.28	6.42	2.93	10.66	2.03	5.65	1.59	6.84
	2	2.52	6.23	2.85	21.69	2.11	4.89	1.58	13.85
	3	3.41	5.75	2.79	32.45	2.15	3.84	1.56	21.30
ARAP++	1	2.24	6.13	2.89	10.62	2.02	5.19	1.57	6.91
	2	2.45	5.69	2.82	21.59	2.05	4.52	1.55	13.95
	3	3.26	5.09	2.75	32.39	2.13	3.5	1.53	21.43

证算法的有效性, 选取若干个典型的网格模型进行数值实验, 并且比较了各种球面参数化算法的扭曲度量、运行时间以及纹理映射效果.

5.1 基于平面 ARAP 与 ARAP++ 方法的球面参数化比较

由于本文方法的核心思想是建立在平面局部/全局方法上的球面参数化方法, 因此它可以分别基于第 3.1 小节中所提到的两种平面方法而得到球面参数化结果, 即平面 ARAP 方法和 ARAP++ 方法. 本节采用了两个零亏格的网格模型 (Child, Skull), 利用基于上述两种方法的球面算法做对比. 实验中分别比较了它们经过 3 次迭代所得的球面参数化结果以及纹理映射效果, 其中等式 (1) 和 (2) 中的拟合矩阵 L 均为等距矩阵, $\omega_{i,j}$ 为 Mean-value 权值. 表 1 记录了两种方法的扭曲度量 (角度、面积、刚性) 以及运行时间. 通过分析实验数据, 可以得到如下结论: 基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化结果在 3 种扭曲度量 (角度、面积、刚性) 的比较中均要好于平面 ARAP 方法, 且这两种方法的运行时间差别不大. 如图 9 所示, 在纹理映射的比较中, 平面 ARAP++ 方法的整体效果与平面 ARAP 方法同样均匀美观. 综上所述, 虽然这两种方法得到的结果非常接近, 但是不难发现基于平面 ARAP++ 方法的球面参数化方法应该是较好的选择.

5.2 球面参数化方法和纹理映射的比较

本小节将第 4.1 小节中提出的球面参数化算法 (共形、等距、保面积) 与其他经典的参数化方法进行了比较, 这些方法包括 Convex 方法^[1]和球面 ARAP 方法^[4]. 在实验中使用了 4 个模型 (Bimba, Lion, Kitten, Canonical), 其中多亏格模型 (Kitten, Canonical) 都要按照第 4.2 小节中给出的方法进行预处理 (切割和补点). 在表 2 中, 比较了各种参数化方法的扭曲度量 (角度、面积、刚性) 以及运行时间. 通过分析实验数据, 可以得到如下结论: 本文共形方法虽然产生了较大的面积扭曲, 但是角度扭曲要好于其他 5 种方法. 而保面积方法虽然产生了较大的角度扭曲, 但是面积扭曲却是最小的. 等距方法较好地权衡了角度和面积扭曲, 得到了最好的保刚性效果. 在运行时间的比较中, 本文的 3 种方法略慢于 Convex 方法, 但是要优于 ARAP 方法. 综上所述, 本文方法与其他的经典球面参数化方法相比较, 在扭曲度量 (角度、面积、刚性) 和运行时间等方面均有一定的优势.

此外, 为了将参数化结果的扭曲度量可视化, 本节还比较了各种参数化方法所对应的纹理映射结果. 如图 10 所示, 在各种参数化方法的纹理映射对比中, 可以发现本文提出的 3 种方法各有特色. 在共形方法中, 虽然纹理映射的棋盘格大小不一, 但是每个小格都非常整齐, 从而证实该方法保角效果

图 9 (网络版彩图) ARAP 方法与 ARAP++ 方法的球面参数化 (ARAP: (a)~(c) 中的 1, 3 行; ARAP++: (a)~(c) 中的 2, 4 行) 和纹理映射的比较

Figure 9 (Color online) Comparison of spherical parameterization (ARAP: the first and third rows of (a)–(c); ARAP++: the second and fourth rows of (a)–(c)) and texture mapping of ARAP and ARAP++. (a) 1 iteration; (b) 2 iteration; (c) 3 iteration; (d) texture mapping of ARAP; (e) texture mapping of ARAP++

表 2 5 种参数化方法的扭曲度量和运行时间的比较

Table 2 The comparison of five methods on the distortion measures and running time

Method	Man (V:5785, F:11566)				Girl (V:6610, F:13216)			
	Angle	Area	Rigidity	Time (s)	Angle	Area	Rigidity	Time (s)
Convex	2.13	9.45	2.35	16.2	2.03	9.11	2.68	17.3
ARAP	2.31	3.63	1.73	20.4	2.34	4.04	2.15	22.4
Our conformal	2.07	9.61	2.16	17.4	2.01	7.65	2.73	19.1
Our isometric	2.29	3.54	1.63	17.1	2.15	3.71	1.93	18.6
Our authalic	2.94	3.46	4.04	19.6	2.81	3.41	4.55	21.5
Method	Kitten (V:10200, F:20396)				Canonical (V:2243, F:4482)			
	Angle	Area	Rigidity	Time (s)	Angle	Area	Rigidity	Time (s)
Convex	2.11	3.37	0.82	63.9	2.01	4.65	2.14	2.9
ARAP	2.15	2.62	0.58	72.1	2.11	3.35	1.65	4.8
Our conformal	2.03	3.65	0.86	67.7	1.98	4.59	2.12	3.4
Our isometric	2.12	2.56	0.54	66.4	2.09	3.32	1.61	3.2
Our authalic	2.54	2.51	1.47	70.2	3.34	3.29	2.51	4.3

非常好. 而等距方法由于较好地权衡了角度和面积扭曲, 所以它得到的纹理映射也比其他方法更均匀美观, 具有较好的保刚性效果. 由于保面积方法仅保持了棋盘格的面积, 却很难保持它们之间的夹角, 因此它所对应的纹理映射效果欠佳.

图 10 (网络版彩图) 球面参数化和纹理映射的比较

Figure 10 (Color online) Comparison of spherical parameterization and texture mapping. (a) Convex; (b) ARAP; (c) our conformal; (d) our isometric; (e) our authalic

6 结论和展望

球面参数化问题是数字几何处理中的一个基本问题, 经过十多年的研究, 已经发现了许多经典的球面参数化方法, 但是至今仍有许多复杂的问题值得进一步研究. 本文提出了基于平面 ARAP++ 方

图 11 (网络版彩图) 高曲率模型的处理

Figure 11 (Color online) The processing of high-curvature model. (a) Original mesh; (b) our conformal; (c) our isometric; (d) our authalic

法的球面参数化算法,它与以往一些经典算法相比,在度量扭曲和运行时间等方面均具有一定的优势,并且得到了较好的纹理映射结果.如图 11 所示,本文算法也存在着局限性,当处理高曲率(有较大凸起)网格时,3 种方法中的共形方法可以得到有效的参数化结果,而等距和保面积两种方法往往会产生不同程度的翻转和重叠,从而得到无效的结果.因此这些算法缺陷还需要在将来进一步完善.同时我们也会逐步将平面 ARAP++ 方法推广到三维体参数化中,尝试将 Spring 能量离散到三维空间,并将离散后的 Spring 能量引入到体参数化中,从而为三维空间中的网格处理方法提供坚实的理论依据.这些研究无论对工程领域,还是图形学领域都将是非常有意义的工作.

致谢 我们特别感谢辽宁师范大学的元万锋博士和大连理工大学的孟兆良老师在本文研究过程中提出的许多宝贵意见,同时还要衷心感谢以色列理工学院的 Emil Saucan 教授和纽约州立大学的顾险峰教授与我们保持密切的科研合作.

参考文献

- 1 Gotsman C, Gu X F, Sheffer A. Fundamentals of spherical parameterization for 3D meshes. *ACM Trans Graph*, 2003, 22: 358–363
- 2 Sheffer A, Gotsman C, Dyn N. Robust spherical parameterization of triangular meshes. In: *Proceedings of the 4th Israel-Korea Bi-National Conference on Geometric Modeling and Computer Graphics*, Tel Aviv, 2003. 94–99
- 3 Gu X F, Wang Y L, Chan T F, et al. Genus zero surface conformal mapping and its application to brain surface mapping. *IEEE Trans Med Imaging*, 2004, 23: 949–958
- 4 Wang C X, Liu Z, Liu L G. As-rigid-as-possible spherical parametrization. *Graph Models*, 2014, 76: 457–467
- 5 Liu L G, Zhang L, Xu Y, et al. A local/global approach to mesh parameterization. *Comput Graph Forum*, 2008, 27: 495–504
- 6 Sorkine O, Alexa M. As-rigid-as-possible surface modeling. In: *Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing*, Barcelona, 2007. 109–116
- 7 Wang Z, Luo Z X, Zhang J L, et al. ARAP++: an extension of the local/global approach to mesh parameterization. *Front Inf Tech Electron Eng*, 2016, 17: 501–515
- 8 Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, et al. Mesh optimization. In: *Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, Anaheim, 1993. 19–26
- 9 Wang C X, Hu X, Fu X M, et al. Bijective spherical parametrization with low distortion. *Comput Graph*, 2016, 58: 161–171

- 10 Hormann K, Lévy B, Sheffer A. Mesh parameterization: theory and practice. In: Proceedings of ACM Special Interest Group for Computer Graphics, San Diego, 2007. 12
- 11 Praun E, Hoppe H. Spherical parameterization and remeshing. ACM Trans Graph, 2003, 22: 340–349
- 12 Wan S H, Ye T F, Li M Q, et al. An efficient spherical mapping algorithm and its application on spherical harmonics. Sci China Inf Sci, 2013, 56: 092103
- 13 Fan D, Liu Y J, He Y. Recent progress in the Laplace-Beltrami operator and its applications to digital geometry processing. J Comput-Aided Design Comput Graph, 2015, 27: 559–569 [范典, 刘永进, 贺英. 数字几何处理中 Laplace-Beltrami 算子的离散化理论与应用研究综述. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27: 559–569]
- 14 Saba S, Yavneh I, Gotsman C, et al. Practical spherical embedding of manifold triangle meshes. In: Proceedings of the IEEE Conference on Shape Modeling and Applications, Boston, 2005. 256–265
- 15 Zayer R, Rössl C, Seidel H P. Curvilinear spherical parameterization. In: Proceedings of the IEEE Conference on Shape Modeling and Applications, Matsushima, 2006. 57–64
- 16 Athanasiadis T, Fudos I, Nikou C, et al. Feature-based 3D morphing based on geometrically constrained spherical parameterization. Comput Aided Geom Design, 2012, 29: 2–17
- 17 Friedel I, Schröder P, Desbrun M. Unconstrained spherical parameterization. In: Proceedings of ACM Special Interest Group for Computer Graphics, Technical Sketches, Los Angeles. 2005
- 18 Chen X, He H, Zou G, et al. Ricci flow-based spherical parameterization and surface registration. Comput Vision Image Und, 2013, 117: 1107–1118
- 19 Chao I, Pinkall U, Sanan P, et al. A simple geometric model for elastic deformations. ACM Trans Graph, 2010, 29: 38
- 20 Kent J R, Carlson W E, Parent R E. Shape transformation for polyhedral objects. In: Proceedings of ACM Special Interest Group for Computer Graphics, Chicago, 1992. 47–54
- 21 Alexa M. Merging polyhedral shapes with scattered features. Vis Comput, 2000, 16: 26–37
- 22 Isenburg M, Gumhold S, Gotsman C. Connectivity shapes. In: Proceedings of the IEEE Conference on Visualization, San Diego, 2001. 135–142
- 23 Zou G Y, Hu J X, Gu X F, et al. Authalic parameterization of general surfaces using Lie advection. IEEE Trans Visual Comput Graph, 2011, 17: 2005–2014
- 24 Zhao X, Su Z, Gu X D, et al. Area-preservation mapping using optimal mass transport. IEEE Trans Vis Comput Graph, 2013, 19: 2838–2847
- 25 Desbrun M, Meyer M, Alliez P. Intrinsic parameterization of surface meshes. Comput Graph Forum, 2002, 21: 209–218
- 26 Pinkall U, Polthier K. Computing discrete minimal surface and their conjugates. Exp Math, 1993, 2: 15–36
- 27 Floater M. Meanvalue coordinates. Comput Aided Geom Design, 2003, 20: 19–27
- 28 Floater M. Parameterization and smooth approximation of surface triangulations. Comput Aided Geom Design, 1997, 14: 231–250
- 29 Lawson L. Software for C1 surface interpolation. In: Mathematical Software III. New York: Academic Press, 1977

Spherical parameterization based on planar ARAP++ method

Zhao WANG¹, Jielin ZHANG^{1,3} & Zhongxuan LUO^{1,2*}

1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Software Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116620, China;

3. School of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China

* Corresponding author. E-mail: zxlue@dlut.edu.cn

Abstract This paper proposes a novel spherical parameterization to process the genus zero models. The method is based on the planar ARAP++ method and further research of the local/global parameterization. It consists of two main steps, local phase and global phase. In the local phase, we employ the planar ARAP++ method to optimize the Spring energy, and achieve the displacement of planar vertex around its 1-ring neighborhood, then map the new vertex to the 3D 1-ring neighborhood on the sphere. In the global phase, we add the spherical constraints to the planar ARAP++ method, and then obtain the final result iteratively according to the Newton method. Numerical results demonstrate that our method is efficient and convergent, and outperforms several popular methods in term of controlling the distortion measures (angle, area, rigidity). Furthermore, it achieves a better visualization performance in texture mapping.

Keywords mesh processing, spherical parameterization, conformal, isometric, authalic

Zhao WANG was born in 1982. He received a B.S. degree from Hebei Agricultural University, Baoding, in 2007, and received a M.S. degree from Hebei United University, Tangshan, in 2011. Currently, he is a Ph.D. candidate at the School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology. His research interests include computer graphics, computational geometry and computer vision.

Jieli ZHANG was born in 1976. She received a B.S. degree from Jilin University, Changchun, in 1998, and received a Ph.D. degree in computational mathematics from Jilin University, Changchun, in 2004. Currently, she is an associate professor at the School of Mathematics, Jilin University, Changchun. Her research interests include computer graphics, computational geometry and computer vision.

Zhongxuan LUO was born in 1966. He received the B.S. and M.S. degrees from Jilin University, Changchun, in 1985 and 1988, respectively, and the Ph.D. degree from the Dalian University of Technology, Dalian, in 1991, all in computational mathematics. He has been a full professor at the School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, since 1997. His research interests include computational geometry, computer vision and computer graphics.