基于区域分解的柔性多体系统高效并行算法

刘铖*, 叶子晟, 胡海岩

北京理工大学宇航学院力学系, 深空自主导航与控制工信部重点实验室, 北京 100081

* 联系人, E-mail: liucheng_bit@aliyun.com

收稿日期: 2017-04-06; 接受日期: 2017-05-18; 网络出版日期: 2017-09-08

国家自然科学基金(编号: 11290151, 11672034)和上海航天科技创新项目资助

摘要 近年来, 大量轻质柔性结构成功应用于航空航天、智能机器人以及3D打印等领域, 使得这些机械系统呈现出典型的刚柔耦合动力学特性. 已有研究表明, 基于小变形、小转动假设的传统柔性多体系统建模方法, 如浮动坐标系方法, 已无法精确描述上述大变形柔性构件的动力学特性. 本文在等几何分析体系下, 采用非均匀有理B样条(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)插值函数离散平面柔性结构位移场, 基于连续介质力学大变形理论, 建立了能够精确描述大转动与大变形耦合的平面单元. 为了提高大变形柔性多体系统仿真效率, 本文首先采用不变矩阵法, 推导了大变形柔性体的非线性弹性力与切向刚度矩阵的高效计算公式. 其次, 基于有限元撕裂对接(Finite Element Tearing and Interconnecting, FETI)区域分解技术, 提出了一种大变形柔性多体系统动力学方程高效求解算法. 该算法中, 首先通过空间离散与时间离散将多体系统动力学方程转化为一组非线性代数方程, 然后采用含预条件的共轭梯度(Preconditioned Conjugate Gradients, PCG)迭代算法并行求解线性化后的线性方程组. 较以往多体系统常用的并行直接算法, 能够显著地提高计算效率. 最后, 通过若干数值算例验证了所提出并行算法的有效性, 并分析了该算法的复杂度、加速比以及可扩展性.

关键词 大变形柔性多体系统, 区域分解, 并行计算, 有限元撕裂对接方法

PACS: 02.70.Dh, 45.70.Hg, 46.70.De, 46.15.-x

1 引言

随着航空航天、智能机器人、武器、车辆等机械系统向着轻质化、复杂化以及高精度方向发展, 促使了柔性多体系统动力学学科的蓬勃发展. 以航天科技为例, 现代航天器迫切需求在轨运行服役的大型/巨型可展开空间结构, 包括通信侦察卫星所需要的大型桁架式索网天线、空间站所需要的大型太阳能电

池阵列等. 此类可展开空间结构通常由杆、梁、薄壳以及薄膜等柔性构件通过铰链连接方式组成, 是一个典型的柔性多体系统. 由于存在大量轻质柔性结构, 上述机械系统在展开过程中会呈现出大转动、大变形刚柔耦合的动力学特性. 这种耦合动力学特性可能引起柔性构件或整个系统的振动, 降低可展开空间结构的型面精度或给航天器本体姿态控制带来困难, 甚至可能导致航天器的失稳. 因此, 为了精确预测并

引用格式: 刘铖, 叶子晟, 胡海岩. 基于区域分解的柔性多体系统高效并行算法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 104603
Liu C, Ye Z S, Hu H Y. An efficient parallel algorithm for flexible multibody systems based on domain decomposition method (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 104603, doi: 10.1360/SSPMA2017-00099

改善此类大型空间结构的展开动力学特性, 需要建立高维非线性模型来精确刻画其动力学响应, 这给大变形柔性多体系统建模方法与求解算法带来了严重的挑战.

早期研究柔性多体系统通常采用浮动坐标系方法, 但该方法仅局限于分析小变形系统, 不能精确地描述柔性构件的几何非线性特性. 近年来, 绝对节点坐标(Absolute Nodal Coordinate, ANC)^[1]与等几何分析(IGA)^[2]两类非线性有限元方法受到了多体动力学领域众多学者的关注. 这两类建模方法均不区分柔性体的刚体转动与弹性变形, 摒弃了柔性体的小变形假设, 采用连续介质力学理论在全局坐标系下统一描述柔性体运动. 已有研究表明, 对于Euler-Bernoulli梁与Kirchhoff-Love板/壳, 等几何中的单变量三阶Bezier样条、张量积形式Bezier样条插值函数与绝对节点坐标方法缩减梁、板/壳单元插值函数是完全等价的^[3], 均未采用节点转角作为广义坐标, 避免了有限转动参数化与插值^[4]的难题. 值得指出的是, 绝对节点坐标方法插值函数形式较为单一, 大部分由三阶Hermite插值函数演化而来. 而等几何分析可直接采用计算机辅助设计(Computer Aided Design, CAD)中丰富的插值函数, 使得该方法在对复杂几何构型建模、hp自适应有限元分析等方面具有不可比拟的优势^[5]. 同时, 等几何分析还搭建了CAD与计算机辅助工程(Computer Aided Engineering, CAE)间的桥梁, 可进一步促进CAD建模与CAE数值分析的融合.

基于连续介质力学理论, 平面柔性多体系统可抽象为一类受约束的二阶偏微分方程. 针对此类问题, 通常可采用有限元方法与差分方法分别在空间与时间域内进行离散, 在每个时间步长内得到一组非线性代数方程, 再采用牛顿-拉普森迭代算法求解系统未知数. 在大规模柔性多体系统仿真过程中, 最耗时的任务主要集中于计算大变形柔性体的切线刚度与求解牛顿迭代中的稀疏矩阵线性方程组. 针对绝对节点坐标方法, García-Vallejo等人^[6]提出不变矩阵法计算ANCF全参数单元弹性力及切向刚度矩阵, 该方法将弹性力分解为若干不变矩阵与系统广义坐标向量的乘积. 然而, 该方法需消耗较多内存存储不变矩阵, 单元弹性力以及切向刚度矩阵的计算效率仍较低. 在上述研究基础上, 刘铨等人^[7]基于张量分量表示方法, 推导出单元弹性力与切向刚度阵的高效计算公式, 其计算效率

较以往方法计算效率能够提高一个数量级. 值得指出的是, 该计算弹性力与切线刚度矩阵算法能够直接用于等几何分析方法中.

除计算单元弹性力与切线刚度外, 求解大规模稀疏线性代数方程组也是制约柔性多体系统动力学方程计算效率的关键因素. 随着计算机技术的发展, 并行计算策略成为有限元仿真领域提高稀疏线性代数方程组计算效率的最有效的手段之一. 基于并行稀疏线性方程组求解器PARDISO, 任革学课题组^[8]开发的软件THUSolver实现了柔性多体系统动力学的并行计算. 上述求解器中并行算法属于线性代数方程组的直接解法, 具有算法稳定性好、精度高等特点. 然而, 随着线性方程组阶数与机群线程数的增加, 直接解法所需计算机内存急剧增加, 同时并行计算效率也将下降. 基于静力缩聚与多层区域分解算法, Li等人^[9]将柔性多体系统有限元网格分解为若干层自由度逐渐减少的粗网格, 通过凝聚每层网格的内部自由度与Lagrange乘子得到规模较小的界面问题, 从而实现了大规模柔性多体系统的递归并行算法.

但该算法粗网格的生成需要进行大量数据通信, 得到的界面问题带宽性较差, 也难以并行求解, 导致算法加速比未达到理想数值, 可扩展性较差. 解决该问题的一个有效途径是利用稀疏线性方程组的迭代算法求解界面问题. 针对结构线性静力学问题, Farhat等人^[10]提出了有限元撕裂对接(Finite Element Tearing and Interconnecting, FETI)方法, 依次开发了FETI-1, FETI-2与FETI-DP算法以解决子区域刚度矩阵奇异的问题, 并同时给出了界面问题的集中预条件算子和分布预条件算子. 上述前期研究工作将为大规模柔性多体系统动力学的并行求解提供一定的借鉴作用.

本文在等几何分析体系下, 采用非均匀有理B样条(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)基函数离散大变形柔性体位移场, 在全局坐标下统一描述柔性体的大转动与大变形的刚柔耦合非线性力学行为, 建立大变形柔性多体系统精确的动力学模型. 为了进一步提高计算效率, 在前期的研究基础上采用区域分解算法将柔性多体系统分解为若干子区域, 将FETI算法引入柔性多体系统, 基于MPI提出一种适用于求解大规模柔性多体系统动力学方程的高效并行算法.

2 大转动、大变形柔性多体系统精确建模方法

2.1 NURBS样条函数

由于能够描述复杂形状和具有局部特性, 非均匀有理B样条(NURBS)被广泛应用于计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design, CAGD)中, 其插值基函数由B样条基函数构成. 基于deBoor算法, 一个 p 阶B样条基函数可由以下递推公式得到:

$$N_{i,0}(\xi) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{for } p = 0, \quad (1)$$

$$N_{i,p}(\xi) \equiv \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad (2)$$

for $p \geq 1$,

其中, 节点向量 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 是一组非递减的实数序列, 称为参数空间. $\xi_k \in \mathbb{R}$ 代表第 k 个节点, n 表示B样条基函数个数. $N_{i,p}(\xi)$ 的双下标中第一个下标 i 表示基函数序号, 第二个下标 k 表示基函数阶数. 当节点向量满足 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{p+1}$ 与 $\xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \dots = \xi_{n+p+1}$ 时, B样条可称为开放(Open) B样条, 此时首尾基函数将满足插值性.

在B样条插值函数基础上, 引入权因子与分母可演化出NURBS样条插值函数, 该函数除具备B样条强大功能外, 还能够精确描述各类二次曲线与曲面. 一个 p 阶NURBS样条基函数可表示为

$$R_{i,p}(\xi) \equiv \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi)w_j}, \quad (3)$$

其中, w_i 是第 i 个基函数的权因子, $N_{i,p}$ 为B样条插值函数.

当参数域推广至二维情况, 可得到双变量张量积形式的NURBS曲面基函数表达式

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \equiv \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi)M_{l,q}(\eta)w_{k,l}}, \quad (4)$$

其中, $w_{i,j}$ 表示权因子, $N_{i,p}(\xi)$ 与 $M_{j,q}(\eta)$ 分别表示 p 阶与 q 阶B样条插值函数. 此时, NURBS曲面中任一点的位置坐标向量可表示为

$$\mathbf{r}_0(\xi, \eta) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{d}_{i,j}, \quad (5)$$

其中, $\{\mathbf{d}_{i,j}\}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ 表示曲面控制点, $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 与 $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ 分别表示 ξ 与 η 方向的节点向量. 一般来说, NURBS基函数不具备插值性, 为了便于后续在曲面上进行数值积分, 将参数空间的一段节点向量 $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ 视为一个有限元单元, 则一个NURBS曲面片由若干单元拼接而成. 图1给出了一个三次NURBS曲面片, 其中红色节点表示控制点, 黑色网格则表示为一个NURBS单元.

2.2 大转动、大变形平板单元

为了精确描述大转动、大变形平板结构, 基于等参元有限元方法, 同时采用NURBS插值函数描述弹性体初始构型与当前构型, 并通过连续介质力学大变形理论描述弹性体的变形, 从而建立大变形柔性多体系统精确的动力学模型. 考虑任一平板结构, 其初始几何构型通过NURBS曲面描述, 如式(5)所示. 以NURBS曲面片中一个单元 $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}]$ 为研究对象, 在发生大转动、大变形后其上任一点 P 的位置坐标可表示为

$$\mathbf{r}(\xi, \eta, t) = \mathbf{r}_0(\xi, \eta) + \mathbf{u}(\xi, \eta, t) = \mathbf{S}(\xi, \eta) \mathbf{e}(t), \quad (6)$$

其中, $\mathbf{u}(\xi, \eta, t)$ 表示 P 点的位移, $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ 为NURBS基函数在定义域 $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}]$ 内的非零元素, $\mathbf{e}(t)$ 为NURBS单元控制点, 也可称为单元广义坐标. 为了进一步提高计算效率, 对式(6)中单元广义坐标进行重排, P 点位置坐标可重新描述为

图1 (网络版彩图) 一个三阶NURBS曲面片(黑色网格为真实物理域网格, 蓝色网格为控制点网格)

Figure 1 (Color online) A NURBS surface ($p=3$) represented by the physical mesh in black color and the control point mesh in blue color.

$$\mathbf{r}(\xi, \eta, t) = \bar{\mathbf{e}}(t) \bar{\mathbf{S}}(\xi, \eta), \quad (7)$$

其中,

$$\bar{\mathbf{e}} =$$

$$[d_{i,j} \ d_{i+1,j} \ \dots \ d_{i+p,j} \ d_{i,j+1} \ \dots \ d_{i+p,j+1} \ \dots \ d_{i,j+q} \ \dots \ d_{i+p,j+q}]$$

是一个大小为 $2 \times [(p+1) \times (q+1)]$ 的矩阵. $\bar{\mathbf{S}}$ 表示大小 $[(p+1) \times (q+1)] \times 1$ 的单元形函数向量, 其元素为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(\xi, \eta) \equiv & [R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta), R_{i+1,j}^{p,q}(\xi, \eta), \dots, R_{i+p,j}^{p,q}(\xi, \eta), \\ & R_{i,j+1}^{p,q}(\xi, \eta), R_{i+1,j+1}^{p,q}(\xi, \eta), \dots, R_{i+p,j+1}^{p,q}(\xi, \eta), \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & R_{i,j+q}^{p,q}(\xi, \eta), R_{i+1,j+q}^{p,q}(\xi, \eta), \dots, R_{i+p,j+q}^{p,q}(\xi, \eta)]^T. \end{aligned} \quad (8)$$

基于连续介质力学理论, 平板单元的变形梯度矩阵 $\mathbf{F}$ 可表示为^[11]

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}_0} = \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{S}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi} \right)^{-1} = \bar{\mathbf{e}} \mathbf{H}, \quad (9)$$

其中 $\xi = [\xi, \eta]$, $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{S}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi} \right)^{-1}$ 为大小为 $[(p+1) \times (q+1)] \times 2$ 的常数矩阵. 根据Green-Lagrange应变张量 $\mathbf{E}$ 的定义, Green应变以及Green应变对广义坐标的一次偏导数的分量可分别表示为

$$\begin{cases} E_{an} \equiv \frac{1}{2}(F_{ma}F_{mn} - \delta_a^n), \\ \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{e}} \right)_{ani} = \frac{1}{2} \frac{\partial (F_{ma}F_{mn})}{\partial e_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial F_{ma}}{\partial e_i} F_{mn} + \frac{1}{2} F_{ma} \frac{\partial F_{mn}}{\partial e_i}, \end{cases} \quad (10)$$

其中, $i=1,2,\dots,2 \times [(p+1) \times (q+1)]$, $m=1,2$, $a=1,2$, $n=1,2$. 单元弹性力可表示为应变能对广义坐标的一次偏导数,

$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} \equiv \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} = \int_V \mathbf{E} : \mathbf{D} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{e}} dV, \quad (11)$$

其中, $\mathbf{D}$ 为四阶弹性张量. 将式(10)代入式(11), 弹性力的分量可进一步表示为

$$(\mathbf{f}_e^{\text{int}})_i = \frac{1}{2} \bar{e}_{mt} (\bar{e}_{df} \bar{e}_{dv} - \bar{e}_{df}^0 \bar{e}_{dv}^0) \int_V D_{anbc} H_{ta} H_{kn} H_{jb} H_{vc} dV, \quad (12)$$

其中, $i=(k-1) \times 2 + m$, $\int_V D_{anbc} H_{ta} H_{kn} H_{jb} H_{vc} dV$ 为常数矩阵, $t=1,2,\dots,[(p+1) \times (q+1)]$, $k=1,2,\dots,[(p+1) \times (q+1)]$, $f=1,2,\dots,[(p+1) \times (q+1)]$, $v=1,2,\dots,[(p+1) \times (q+1)]$. 由式(12)可知, 通过将随时间变化的广义坐标提出至积分号外, 弹性力可分解为两部分的乘积, 其中第一部分是与广义坐标相关的量, 第二部分为一常数矩

阵, 仅与弹性张量 $\mathbf{D}$ 以及形函数相关.

将单元弹性力对广义坐标 $\mathbf{e}$ 再求一次偏导数, 单元切线刚度矩阵可表示为

$$(\mathbf{K}_e)_{ij} \equiv \frac{\partial (\mathbf{f}_e^{\text{int}})_i}{\partial e_j} = (\mathbf{K}_e^1 + \mathbf{K}_e^2)_{ij}, \quad (13)$$

在上式中

$$(\mathbf{K}_e^1)_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\bar{e}_{df} \bar{e}_{dv} - \bar{e}_{df}^0 \bar{e}_{dv}^0) \int_V D_{anbc} H_{ta} H_{kn} H_{jb} H_{vc} dV, \quad (14)$$

其中 $j=(t-1) \times 2 + m$;

$$(\mathbf{K}_e^2)_{ij} \equiv \bar{e}_{mt} \bar{e}_{dv} \int_V D_{anbc} H_{ta} H_{kn} H_{jb} H_{vc} dV, \quad (15)$$

其中 $j=(f-1) \times 2 + d$.

进一步研究发现, 单元弹性力可直接由矩阵 $\mathbf{K}_e^1$ 与广义坐标矢量 $\mathbf{e}$ 相乘得到

$$\mathbf{f}_e^{\text{int}} = \mathbf{K}_e^1 \mathbf{e}, \quad (16)$$

其中, $\mathbf{K}_e^1$ 也通常被称为非线性刚度矩阵. 因此, 在前处理中提前计算并存储常数矩阵, 通过式(13)与(16)可先后快速地计算单元切线刚度矩阵与弹性力.

3 多体系统动力学方程并行求解算法

3.1 基于区域分解的多体系统动力学方程

对于一个受约束的柔性多体系统, 采用区域分解算法将其分解为 s 个非重叠的子区域, 并引入Lagrange乘子向量保证各个相邻的子区域间位移场的连续性. 基于广义变分原理, 该系统整体能量可表示为

$$\Pi(\mathbf{q}_k, \lambda) \equiv \sum_{k=1}^s \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{M}_k \dot{\mathbf{q}}_k + W(\mathbf{q}_k) \right) + \sum_{j=1}^m P_j \Phi_j^T \lambda_j, \quad (17)$$

其中, $\mathbf{q}_k$ 是第 k 个子区域的广义坐标, Φ 与 λ 分别是系统约束方程以及其对应的Lagrange乘子, P_i 表示比例因子. $\mathbf{M}_k$ 为第 k 个子区域的质量矩阵, 采用上节建模方法得到的系统质量矩阵为一常数矩阵, 可在前处理中计算并存储, $W(\mathbf{q}_k)$ 表示第 k 个子区域的应变能. 通过变分原理可建立一组微分代数方程组, 也就是柔性多体系统动力学方程

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{q}) + P_i \Phi_i^T \lambda = \mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (18)$$

其中, $\mathbf{M}=\text{diag}(\mathbf{M}_k)$ 为系统整体质量阵, $\mathbf{f}^{\text{int}}=[(\mathbf{f}_1^{\text{int}})^T, (\mathbf{f}_2^{\text{int}})^T, \dots, (\mathbf{f}_s^{\text{int}})^T]^T$ 为系统整体弹性力矢量, $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ 为系统主动力的广义力向量, $\Phi_{,q}$ 为系统约束方程及其对广义坐标的Jacobi矩阵.

本文采用广义- α 隐式时间积分方法^[12]求解上述柔性多体系统动力学方程. 在时域内进行离散并通过Newton-Rapson迭代算法线性化后, 需要求解如下形式的高维稀疏线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} \Psi & P_1 \Phi_{,q}^T \\ P_1 \Phi_{,q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Gamma \\ P_1 \Phi \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中, $\Delta \mathbf{q}$ 和 $\Delta \lambda$ 是当前时刻系统广义坐标向量和拉格朗日乘子向量的增量. 由于采用了区域分解技术, 式(19)中系数矩阵左上角块与右端项上部分均可通过各个子区域的变量独立表示为

$$\begin{cases} \Psi \equiv \hat{\beta} \mathbf{M} + \mathbf{K} - \mathbf{f}_{,q}^{\text{ext}} = \text{diag}(\hat{\beta} \mathbf{M}_k + \mathbf{K}_k - \mathbf{f}_{k,q}^{\text{ext}}), \\ \Gamma \equiv [\Gamma_1^T, \Gamma_2^T, \dots, \Gamma_s^T]^T, \\ \Gamma_k \equiv \mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{F}_k^{\text{int}} + P_1(\Phi_{,q}^T \lambda)_k - \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \end{cases} \quad (20)$$

其中, $(\Phi_{,q}^T \lambda)_k$ 表示广义约束力向量中与第 k 个子区域对应的部分, $\hat{\beta}$ 为广义- α 算法参数.

3.2 基于FETI并行计算方法

为了便于进行并行计算, 首先通过舒尔补矩阵建立区域分解的界面问题, 也就是关于Lagrange乘子增量项的线性方程组

$$\mathbf{S} \Delta \lambda = \mathbf{b} = -(P_1 \Phi_q \Psi^{-1} \Gamma - \Phi), \quad (21)$$

其中, 界面问题系数矩阵 $\mathbf{S} \equiv P_1 \sum_{k=1}^s (\Phi_{,q})_k \Psi_k^{-1} (\Phi_{,q})_k^T$ 与右端项 $P_1 \Phi_q \Psi^{-1} \Gamma = P_1 \sum_{k=1}^s (\Phi_{,q})_k \Psi_k^{-1} \Gamma_k$ 均可由子区域计算组装而成. 其次, 在求解Lagrange乘子增量后, 代入式(19)可得到每个子区域广义坐标的增量为

$$\Delta \mathbf{q}_k = \Psi_k^{-1} \left(-\Gamma_k - P_1(\Phi_{,q}^T \Delta \lambda)_k \right), \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (22)$$

如何高效并行求解Lagrange乘子增量项(式(21))是上述算法的核心问题. 基于有限元撕裂对接(FETI)方法, 本文采用含预条件的共轭梯度(PCG)迭代算法^[13]求解该界面问题. 考虑CG迭代中的第 r 步, 需要计算如下矩阵-向量乘法, $\bar{\mathbf{p}}^{(r)} = \mathbf{S} \mathbf{p}^{(r)}$, 其中, $\mathbf{p}^{(r)}$ 与 $\bar{\mathbf{p}}^{(r)}$ 分别表示

界面问题对应的力与位移. 上述计算过程可转化到各子区域中独立计算, 而后进行组装

$$\bar{\mathbf{p}}^{(r)} = \mathbf{S} \mathbf{p}^{(r)} = P_1 \sum_{k=1}^s (\Phi_{,q})_k \left[\Psi_k^{-1} (\Phi_{,q})_k^T \mathbf{p}_k^{(r)} \right], \quad (23)$$

即, 在每个子区域中求解 $\bar{\mathbf{p}}_k^{(r)} = \Psi_k^{-1} (\Phi_{,q})_k^T \mathbf{p}_k^{(r)}$. 为了表示简洁, 以下公式中省略描述迭代次数的上标 r . 将子区域自由度根据约束条件分为边界自由度与内部自由度, 式(23)可进一步表示为

$$\begin{bmatrix} \Psi^{ii} & \Psi^{ib} \\ \Psi^{bi} & \Psi^{bb} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}^i \\ \bar{\mathbf{p}}^b \end{bmatrix}_k = (\Phi_{,q})_k^T \mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}^b \end{bmatrix}_k, \quad (24)$$

其中, 上标 i, b 分别代表子区域的内部与边界自由度. 由此, 可将CG算法中每一次迭代计算视为一次“静力”加载, 在子区域边界施加一组外力, 求得相应的位移场. 与此相对应的逆问题即为已知一组位移场, 求解子区域边界外力. 那么, 可通过构造如下恒等式, 设计界面问题(式(21))的一个有效预条件算子:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi^{ii} & \Psi^{ib} \\ \Psi^{bi} & \Psi^{bb} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}^i \\ \bar{\mathbf{w}}^b \end{bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\Psi^{bb} - \Psi^{bi} \Psi^{ii-1} \Psi^{ib}) \bar{\mathbf{w}}^b \end{bmatrix}_k \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi^{bb} - \Psi^{bi} \Psi^{ii-1} \Psi^{ib} \end{bmatrix}_k (\Phi_{,q})_k^T \bar{\mathbf{w}}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $\bar{\mathbf{w}}^i = -\Psi^{ii-1} \Psi^{ib} \bar{\mathbf{w}}^b$. 将式(25)进行组装即可得到FETI的Dirchlet预条件算子

$$\tilde{\mathbf{S}}^{D-1} = \sum_{k=1}^s (\Phi_{,q})_k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi^{bb} - \Psi^{bi} \Psi^{ii-1} \Psi^{ib} \end{bmatrix}_k (\Phi_{,q})_k^T. \quad (26)$$

考虑到Dirchlet预处理算子需要进行 Ψ^{ii} 逆矩阵计算, 为了进一步提高计算效率, 可将 $\Psi^{bi} \Psi^{ii-1} \Psi^{ib}$ 省略, 得到FETI算法的集中预条件算子

$$\tilde{\mathbf{S}}^{L-1} = \sum_{k=1}^s (\Phi_{,q})_k \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi^{bb} \end{bmatrix}_k (\Phi_{,q})_k^T. \quad (27)$$

相关研究表明, 虽然集中预条件算子收敛速度略低于Dirchlet预条件算子收敛速度, 但由于预条件算子构造时间较短, 而具有更高的计算效率. 需要指出的是, 上述两类预条件算子仅适用于点点约束问题, 难以直接推广至含复杂运动副的多体问题, 尤其是含非线性约束的多体系统.

在上述PCG迭代求解过程中, 计算量与通信量主要集中在如下两个矩阵-向量乘法:

$$\begin{cases} \mathbf{p}^{(r+1)} = \mathbf{S}\mathbf{p}^{(r)} = \mathbf{P}_1 \sum_{k=1}^s (\boldsymbol{\Phi}_{,q})_k \boldsymbol{\Psi}_k^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{,q})_k^T \mathbf{p}^{(r)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{r}^{(r)} = \sum_{k=1}^s (\boldsymbol{\Phi}_{,q})_k \boldsymbol{\Psi}_k (\boldsymbol{\Phi}_{,q})_k^T \mathbf{r}^{(r)}, \end{cases} \quad (28)$$

其中, 在计算过程中并不需要 $\mathbf{S}$ 与 $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ 的显式表达式, 可按照矩阵-向量乘法从右向左逐步进行计算. 通过式(28)可看出, PCG迭代算法中通信数据主要来源于该公式中组装求和部分, 整体通信量较少.

4 算例

4.1 算例一 四边简支平板结构

本节采用四边简支平板静力学算例验证2.2节提出的板单元的正确性, 同时通过该算例研究3.2节提出的基于FETI并行算法的收敛特性. 如图2所示, 正方形板ABCD边长为1.0 m, 板的杨氏模量设为 1.0×10^9 Pa, 泊松比为0. 正方形板结构四边受简支约束, 重力加速度取为 $g=9.81 \text{ m/s}^2$, 方向沿Y轴负方向, 考察该系统在100倍重力作用下的位移场.

基于区域分解算法, 将板结构划分为 2×2 个子区域, 通过施加区域边界约束方程保证位移场的 C^0 连续性. 为了验证单元的正确性, 采用商业软件ABAQUS对该模型进行了静力学分析. 以简支板结构中心点E的Y方向位移为参考值, 基于NURBS平面板单元仿真

图2 (网络版彩图) 基于区域分解的四边简支平板结构示意图

Figure 2 (Color online) A planar rectangular plate with four edges simply supported based on domain decomposition method.

结果与ABAQUS仿真结果相吻合, 均为 -0.16 mm . 数值结果验证了基于NURBS平板单元的正确性.

为了进一步研究单元尺寸对并行算法收敛特性的影响, 将每个子区域划分别划分为 5×5 , 10×10 , 15×15 , 20×20 , 25×25 , 30×30 以及 35×35 个板单元. 图3分别给出了原系统刚度矩阵与预条件算子处理后界面问题系数矩阵的条件数随自由度的变化规律. 原系统刚度矩阵条件数的增长与自由度成正比关系($O(N)$), 而采用FETI的集中预处理算子后, 界面问题系数矩阵条件数仅呈对数增长($O(\log N)$). 同时, 采用PCG算法求解界面问题的迭代次数也与自由度呈对数关系, 如图4所示. 上述数据表明, 基于FETI的并行算法能够有效地改善界面问题的条件数, 系数矩阵条件数与界面问题迭代步数的增长与自由度均呈对数关系, 因此该算法可适用于大规模系统方程的求解.

4.2 算例二 平面曲柄滑块机构

为了分析3.2节提出的并行算法的计算效率, 本节对一个典型的多体系统——曲柄滑块机构进行动力学仿真. 如图5所示, 平面曲柄滑块机构由两块矩阵板与一个滑块组成, 板I一端中点与地面采用旋转铰相连接, 另一端中点与板II一端中点也通过旋转铰连接, 板II末端中点与一个仅能在X轴上运动的刚体滑块铰接.

图3 (网络版彩图) 系统刚度矩阵与界面问题系数矩阵的条件数与系统自由度的关系图. 红色的空心圆线表示初始系统刚度矩阵, 黑色的空心圆线表示界面问题系数矩阵

Figure 3 (Color online) The condition numbers of the stiffness matrix of the original system indicated by the red solid line and coefficient matrix of the interface problem indicated by the black dot line with different mesh size.

图4 (网络版彩图)求解界面问题线性方程组的迭代次数与系统自由度的关系图

Figure 4 (Color online) The number of iteration steps for solving the linear equation of the interface problem for different mesh size.

图5 (网络版彩图)基于区域分解的平面曲柄滑块结构示意图

Figure 5 (Color online) A planar slider crank mechanism based on domain decomposition method.

板I与板II长度分别为0.5和0.87 m, 宽度与高度均为0.1 m, 材料参数设为: $\rho=1600 \text{ kg/m}^3$, $E=5.0 \times 10^6 \text{ Pa}$, $\mu=0$, 不考虑末端滑块质量. 系统初始静止放置于XY水平面内, 板I与X轴夹角为 60° , 在板I下边界中点A受到垂直于板方向的外力 f 作用, 该力大小与时间成正比, 持续时间为1 s, 最大值为400 N. 仿真时间为1.5 s, 时间步长设为 $1.0 \times 10^{-4} \text{ s}$, 广义- α 算法参数取为0.8.

本算例在一台具有12个主频为3.33 GHz核心的服务器上采用Fortran语言进行仿真, 其中采用MPI进行线程间的通信. 基于区域分解算法, 将每块板划分为6个子区域, 其中沿着长度与宽度方向分别进行3等分与2等分. 首先, 统计了界面问题线性方程组迭代次数与系统自由度的关系, 与静力学仿真结果一致, 迭代次数随着自由度同样呈对数增长.

其次, 图6(a)给出了当采用12个线程时, 一个牛顿

迭代步中主要计算任务的耗时情况. 由图可知, 求解界面问题开销略大于计算单元弹性力及切线刚度矩阵(以下简称计算单元矩阵)开销, 二者共占据牛顿迭代步中95%以上的计算时间. 由于单元数目与自由度成正比, 单元矩阵的计算时间也随自由度的增长呈线性关系, 算法复杂度记为 $O(N)$. 进一步, 图6(b)给出了界面问题求解各个部分时间占比情况, 包括子区域刚度矩阵LU分解时间、子区域刚度矩阵回代时间、预条件算子计算时间以及通信时间4个部分. 其中, 子区域刚度矩阵LU分解与回代过程均采用稀疏线性方程组求解器PARDISO完成. 由式(27)与(28)可知, 预条件算子计算时间与通信时间随自由度呈线性增长(复杂度 $O(N)$), 且开销占比较小. 此外, 子区域刚度矩阵一次LU分解与回代算法复杂度分别可近似认为 $O(N^{1.5})$ 与 $O(N)$. 考虑到每次牛顿迭代步中LU分解过程仅需进行一次, 而回代过程计算次数则与线性方程组迭代次数一致. 因此, 界面问题求解过程算法复杂度可近似认为 $O(N^{1.5})$. 由图6还可看出, 当系统广义坐标个数增长至百万量级时, FETI并行算法仍具有良好的可扩展性.

接下来, 以总自由度 $N=1020528$ 为例, 通过不同线程数下计算时间的对比, 研究本文提出并行算法的加速比. 表1分别给出了2, 4, 6以及12个线程条件下, 一次牛顿迭代步中各任务的计算时间, 小括号中数值表示加速比. 由表可得, 计算单元矩阵与子区域刚度矩阵LU分解基本达到理想加速比; 受到求解器PARDISO的影响, 子区域刚度回代过程加速比略低于理想加速比. 由于预处理计算涉及各线程间的通信, 其加速比也受到一定的影响. 从一次牛顿迭代步总时间来看, 相对于2个线程、12线程加速比可达到4.2. 因此, 基于FETI算法的并行算法具有通信量小与计算加速比较好的特性.

最后, 图7中给出了曲柄滑块机构在运动过程中不同时刻的构型图. 从图中可明显地观察到板结构发生了大转动、大变形的刚柔耦合运动, 这进一步说明了本文所提出的建模方法以及并行计算方法可以精确和高效地处理此类大规模柔性多体系统动力学问题.

4.3 算例三 重力作用下的柔性索网系统

为了与以往多体系统并行算法进行对比研究, 本节以Serban等人^[14]提出的柔性索网系统为研究对象, 模拟其在重力作用下的动力学响应. 如图8所示, 该索

网系统规模为 j (纵向) $\times k$ (横向), 共包括 $2 \times j \times k + j + k$ 根索段, 其中每根索段由一个4节点的3阶B样条单元来描述, 可证明该单元与文献中的ANCF缩减梁单元是完全等价的. 柔性索网的4个端点 $Q1, Q2, Q3, Q4$ 与地面均通过球铰相连, 其内部相邻索段也通过球铰相互连接.

每根索段的长度均为1 m, 材料密度为 2200 kg/m^3 , 材料杨氏模量为 $2.0 \times 10^7 \text{ Pa}$, 索段圆截面半径为0.02 m. 索网系统受到沿着 Z 轴负方向的重力作用, 重力加速度为 9.81 m/s^2 . 仿真时间为1 s, 时间步长设为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$, 广义 α 算法参数取为0.8.

图6 (网络版彩图) (a) 一次牛顿迭代步中各计算部分耗时与系统自由度的关系图; (b) 求解一次界面问题中各部分计算耗时与系统自由度的关系图

Figure 6 (Color online) (a) The CPU time for computational tasks for different mesh size during a Newton iteration step; (b) the CPU time for computational tasks during solving the interface problem for different mesh size.

表1 不同线程数下牛顿迭代步中各部分计算耗时(s)以及加速比

Table 1 The CPU time for computational tasks for different number of thread during a Newton iteration step and the corresponding speedup ratio

线程数	单元矩阵计算	刚度矩阵LU分解	刚度矩阵回代	计算预条件算子	牛顿迭代时间
2	47.88(1.0)	21.05(1.0)	25.21(1.0)	2.18(1.0)	98.78(1.0)
4	23.91(2.0)	10.60(2.0)	13.41(1.9)	1.20(1.8)	51.55(1.9)
6	17.60(2.7)	7.46(2.8)	10.09(2.5)	0.91(2.4)	37.44(2.6)
12	9.59(5.0)	4.31(4.9)	6.35(4.0)	0.60(3.6)	23.56(4.2)

图7 (网络版彩图) 曲柄滑块机构运动过程中6个典型构型

Figure 7 (Color online) Six typical dynamic configurations of the slider crank mechanism.

图8 (网络版彩图)基于区域分解的柔性索网示意图
Figure 8 (Color online) A spatial net system based on domain decomposition method.

本算例在一台具有16个主频为2.9 GHz核心的服务器上采用Fortran语言进行仿真, 其中采用MPI进行线程间的通信. 为了与Serban等人^[14]提出的算法进行对比, 分别对24 m×24 m, 36 m×36 m, 48 m×48 m, 60 m×60 m, 72 m×72 m以及96 m×96 m 6种不同大小的索网系统进行动力学模拟. 基于区域分解算法, 将索网划分为4×4个子区域, 每个子区域含有相同数目的索段. 图9分别给出了Serban等人^[14]提出的SPIKE算法、Li等人^[9]提出的多层区域分解算法以及本文提出的并行算法对该索网系统仿真的计算时间, 其中Serban等人提出的SPIKE算法在NVIDIA的Tesla K20x GPU平台上采用CUDA语言运行, 多层区域分解算法在24个主频为2.67 GHz的并行平台上采用Fortran语言运行. 由图中可明显看出, 本文提出的并行算法能够显著地提高索网系统的计算效率, 比SPIKE算法计算效率提高了

200倍左右, 较多层区域分解算法计算效率提高了4–5倍. 值得注意的是, 由于本算例单元网格尺寸与系统规模无关, 采用迭代算法求解此类问题的迭代次数将保持不变. 因此, Serban等人算法具有 $O(N)$ 线性的复杂度, 而对于本文提出的算法而言, 一个牛顿迭代步中子区域刚度矩阵的LU分解将占据主导地位. 也就是说, 对于此类单元尺寸为常数的柔性多体系统, 本文算法复杂度仍为 $O(N^{1.5})$. 通过最小二乘拟合, 图9同时给出了上述3种算法CPU计算时间与系统自由度间的比例关系.

图9 (网络版彩图)不同索网规模和求解算法仿真1 s的CPU计算时间

Figure 9 (Color online) The CPU time of 1 s long simulation for different sizes of net system and solver type.

图10 (网络版彩图)空间索网系统运动过程中6个典型构型
Figure 10 (Color online) Six typical dynamic configurations of the spatial net system.

最后, 以大小为 $9\text{ m}\times 9\text{ m}$ 的空间索网为例, 图10中给出该系统运动过程中不同时刻的构型图. 当仿真时间达到1 s时, 索网系统发生了明显的大变形, 验证了本文提出的并行算法能够有效地预测大变形索网系统的动力学响应. 值得指出的是, 此类空间索网系统被广泛应用于大型可展开空间结构, 如环形桁架索网天线、构架式索网天线等^[15]. 下一步, 将本文所提出的建模方法与并行求解算法应用于模拟此类大型索网天线的展开动力学行为, 为大型可展开空间结构的设计与控制提供理论依据.

5 结论

本文在等几何分析体系下, 采用非均匀有理B样条(NURBS)基函数离散大变形柔性体位移场, 通过变

形梯度张量与Green应变统一描述柔性体的大转动与大变形的刚柔耦合动力学行为, 推导了单元弹性力与切线刚度矩阵的高效计算公式, 建立了大变形柔性多体系统的精确动力学模型. 基于区域分解技术, 提出了一种求解大规模柔性多体系统动力学方程的高效并行算法. 其中, 采用FETI集中预条件算子改善界面问题的条件数, 基于MPI平行平台设计了界面问题的PCG迭代求解算法. 理论分析与数值算例结果表明, PCG算法迭代次数与有限元网格尺寸相关, 本文提出的并行算法复杂度近似为 $O(N^{1.5})$. 当系统广义坐标个数增长至百万量级时, 该算法仍具有良好的可扩展性. 同时, 随着有效线程数的增加, 该算法具有通信量小以及加速比明显的特点, 能够适用于分析大型复杂柔性多体系统.

参考文献

- Shabana A A. An absolute nodal coordinates formulation for the large rotation and deformation analysis of flexible bodies. Technical Report, University of Illinois at Chicago, 1996
- Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 2005, 194: 4135–4195
- Lan P, Yu Z Q, Zhao X. Using absolute nodal coordinate formulation elements to model Bézier and B-spline curve for finite element analysis (in Chinese). *Chin J Mech Eng*, 2012, 48: 128–134 [兰朋, 於祖庆, 赵欣. Bézier和B-spline曲线的绝对结点坐标列式有限元离散方法. *机械工程学报*, 2012, 48: 128–134]
- Wu T H, Hong J Z, Liu Z Y. Advances of geometrically exact 3D beam theory (in Chinese). *China Sci Paper*, 2013, 8: 1126–1130 [吴坛辉, 洪嘉振, 刘铸永. 非线性几何精确梁理论研究综述. *中国科技论文*, 2013, 8: 1126–1130]
- Ge J L, Yang G L, Lv J. Advances in isogeometric analysis (in Chinese). *Adv Mech*, 2012, 42: 771–784 [葛建立, 杨国来, 吕加. 同几何分析研究进展. *力学进展*, 2012, 42: 771–784]
- García-Vallejo D, Mayo J, Escalona J L, et al. Efficient evaluation of the elastic forces and the jacobian in the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlin Dyn*, 2004, 35: 313–329
- Liu C, Tian Q, Hu H Y. Efficient computational method for dynamics of flexible multibody systems based on absolute nodal coordinate (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2010, 42: 1197–1205 [刘铨, 田强, 胡海岩. 基于绝对节点坐标的多柔体系统动力学高效计算方法. *力学学报*, 2010, 42: 1197–1205]
- Cao D Z, Qiang H F, Ren G X. Parallel computing studies of flexible multibody system dynamics using OpenMP and Pardiso (in Chinese). *J Tsinghua Univ (Sci Tech)*, 2012, 11: 1643–1649 [曹大志, 强洪夫, 任革学. 基于OpenMP和Pardiso的柔性多体系统动力学并行计算. *清华大学学报自然科学版*, 2012, 11: 1643–1649]
- Li P, Liu C, Tian Q, et al. Dynamics of a deployable mesh reflector of satellite antenna: Parallel computation and deployment simulation. *J Comput Nonlin Dyn*, 2016, 11: 061005
- Farhat C, Roux F X. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int J Numer Meth Eng*, 1991, 32: 1205–1227
- Shabana A A. *Computational Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008
- Arnold M, Brüls O. Convergence of the generalized- α scheme for constrained mechanical systems. *Multibody Syst Dyn*, 2007, 18: 185–202
- Farhat C, Mandel J, Roux F X. Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 1994, 115: 365–385
- Serban R, Melanz D, Li A, et al. A GPU-based preconditioned Newton-Krylov solver for flexible multibody dynamics. *Int J Numer Meth Eng*,

2015, 102: 1587–1604

- 15 Hu H Y, Tian Q, Zhang W, et al. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes (in Chinese). *Adv Mech*, 2013, 43: 390–414 [胡海岩, 田强, 张伟, 等. 大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制. *力学进展*, 2013, 43: 390–414]

An efficient parallel algorithm for flexible multibody systems based on domain decomposition method

LIU Cheng^{*}, YE ZiSheng & HU HaiYan

Key Laboratory of Autonomous Navigation and Control for Deep Space Exploration, Ministry of Industry and Information Technology, Department of Engineering Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Recently, a large number of lightweight flexible structures are successfully used in the field of aerospace industry, intelligent robot and 3D printing. Because of the increasing flexibility of elastic components, some large scale mechanical systems will perform typical rigid-flexible coupled dynamic characteristic. Previous studies have indicated that the traditional modeling methods of the flexible multibody system based on the assumptions of small rotations and small deformation, such as the floating frame of reference method, can not lead to correct results for the dynamic response of those large deformation structures. Under the framework of Isogeometric analysis, the basis functions of the NURBS are employed to discretize the displacement field of elastic components with large deformation. Based on the large deformation theory of the continuum mechanics, the geometrical nonlinearity of planar structures undergoing the overall motion and large deformation is accurately taken into account. In order to improve the computational efficiency, some efficient formulations to calculate the elastic force and the tangent stiffness matrix are proposed via the invariant matrix method. Furthermore, based on the finite element tearing and interconnecting (FETI) method, an efficient parallel algorithm is presented to deal with the dynamic equations of motion for flexible multibody systems. First, the governing partial differential equations of multibody systems are transformed into a set of nonlinear algebraic equations after spatial and time discretization. Then, the preconditioned conjugate gradient method is exploited to solve the linearization equation in parallel. Compared with the existing parallel direct methods for flexible multibody systems, the proposed method can improve the computational efficiency significantly. Finally, several numerical examples are given to validate the effectiveness of the proposed parallel algorithm, including the complexity, the speed-up ratio and the scalability.

flexible multibody systems with large deformation, domain decomposition, parallel computation, finite element tearing and interconnecting (FETI) method

PACS: 02.70.Dh, 45.70.Hg, 46.70.De, 46.15.-x

doi: [10.1360/SSPMA2017-00099](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00099)