$\mathbb{C}^n$ 中单位多圆柱上一类 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射 齐次展开式各项的精确估计

献给史济怀教授 80 华诞

刘太顺^①, 刘小松^{②*}, 徐庆华^③

① 湖州师范学院数学系, 湖州 313000;

② 岭南师范学院数学与计算科学学院, 湛江 524048;

③ 江西师范大学数学与信息科学学院, 南昌 330027

E-mail: tslu@hutc.zj.cn, lxszhjnc@163.com, xuqhjxsd@163.com

收稿日期: 2015-02-02; 接受日期: 2015-07-21; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471111) 资助项目

摘要 本文给出 $\mathbb{C}^n$ 中单位多圆柱上一类 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射 $f(z)$ 齐次展开式各项的精确估计, 其中 $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))^T$ 是 k 折对称映射 (或 $z = 0$ 是 $f(z) - z$ 的 $k+1$ 阶零点), 且满足 $\sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^m f(0)(z^{m-1}, w)\| = \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|$, $m = 2, 3, \dots$ 所得到的估计包含已有文献的许多结论.

关键词 k 折对称 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射 准凸映射 $\mathbb{A}$ 型准凸映射 $\mathbb{B}$ 型准凸映射 齐次展开式估计

MSC (2010) 主题分类 32A30, 32H02

1 引言

众所周知, 单复变几何函数论中有如下经典而优美的定理.

定理 A (de Branges 定理^[1,2]) 若 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 是单位圆盘 U 上的双全纯函数, 则

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2, 3, \dots$$

定理 B^[3] 若 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 是单位圆盘 U 上的 α ($0 \leq \alpha < 1$) 次凸函数, 则

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!} \prod_{k=2}^n (k - 2\alpha), \quad n = 2, 3, \dots$$

在多复变几何函数论中, 如今在单位多圆柱上所获得的正规化双全纯映射子族齐次展开式的估计大多本质上是齐次展开式第二项的估计 (参见文献 [1, 4–6]). 在 Euclid 单位球上关于正规化双全纯映射子族相应的结果参见文献 [7]. 上述映射关于齐次展开式第三项及以上的估计可参见文献 [4, 8–12]. 到目前为止, 越来越多的学者认识到正规化双全纯映射子族齐次展开式的估计 (除第二项) 是一个极其困难而又十分重要的问题, 其中一个重要的原因是, 下面 $\mathbb{C}^n$ 中单位多圆柱上关于双全纯星形映射齐次展开式各项估计的公开问题最类似于单复变数中著名的 Bieberbach 猜想 (即 de Branges 定理).

英文引用格式: Liu T S, Liu X S, Xu Q H. Sharp estimates of all homogeneous expansions for a subclass of quasi-convex mappings of type $\mathbb{B}$ and order α on the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1893–1902, doi: 10.1360/N012015-00076

公开问题 1.1 ^[1] 若 $f: U^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中单位多圆柱 U^n 上的正规化双全纯星形映射, 则

$$\frac{\|D^m f(0)(z^m)\|}{m!} \leq m\|z\|^m, \quad z \in U^n, \quad m = 2, 3, \dots$$

上述公开问题也称为多复变数的 Bieberbach 猜想.

鉴于 Roper 与 Suffridge ^[13] 已指出在 $\mathbb{C}^n$ 中 Euclid 单位球上关于 $\mathbb{B}$ 型准凸映射的 Bieberbach 猜想不成立, 因此, 本文仅在 $\mathbb{C}^n$ 中单位多圆柱 U^n 上研究 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射齐次展开式的估计.

另外, 在单复变数中, α ($0 \leq \alpha < 1$) 次凸函数是一类重要的双全纯函数族, 有着许多经典而又重要的结论 (如定理 B). 与单复变数情形相对应, 文献 [9] 已给出在一定的限制条件下 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射 (在单复变数中即为 α 次凸函数) 齐次展开式各项的精确估计; 文献 [10] 建立了较弱条件下一类准凸映射 (包括 $\mathbb{A}$ 型准凸映射与 $\mathbb{B}$ 型准凸映射) 齐次展开式各项的精确估计, 但其证明均十分复杂. 一个极其自然的问题是, 如何简化其证明, 并进一步得到较为一般的结论? 本文针对上述问题将给出肯定的回答.

在本文中, 记 X 为具有范数 $\|\cdot\|$ 的复 Banach 空间, X^* 为 X 的对偶空间, B 为 X 的单位球, ∂B 为 B 的边界, $\bar{B}$ 表示 B 的闭包. 记 U 为复平面 $\mathbb{C}$ 的 Euclid 单位圆盘, U^n 为 $\mathbb{C}^n$ 的单位多圆柱, $(\partial U)^n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中单位多圆柱 U^n 的特征边界, B^n 为 $\mathbb{C}^n$ 的 Euclid 单位球, T 表示转置, $\mathbb{N}^*$ 与 $\mathbb{R}$ 分别为正整数集与实数集. 对每个 $x \in X \setminus \{0\}$, 定义 $T(x) = \{T_x \in X^* : \|T_x\| = 1, T_x(x) = \|x\|\}$. 由 Hahn-Banach 定理, $T(x)$ 非空. 设 $H(B)$ 是 B 映到 X 内全纯映射的全体. 熟知, 若 $f \in H(B)$, 则对 $x \in B$ 某个邻域的所有 y , 有

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n f(x)((y-x)^n),$$

其中 $D^n f(x)$ 是 f 在 x 的 n 阶 Fréchet 导数, 对 $n \geq 1$, 有

$$D^n f(x)((y-x)^n) = D^n f(x) \underbrace{(y-x, \dots, y-x)}_n.$$

易知 $D^n f(x)$ 是 $\prod_{j=1}^n X$ 映到 X 内的有界对称 n -线性映射.

若逆映射 f^{-1} 存在, 且在开集 $f(B)$ 上全纯, 则称全纯映射 $f: B \rightarrow X$ 是双全纯的. 如果 Fréchet 导数 $Df(x)$ 对每个 $x \in B$ 存在有界逆, 则称映射 $f \in H(B)$ 是局部双全纯的. 若 $f: B \rightarrow X$ 是全纯映射, $f(0) = 0$ 且 $Df(0) = I$, 则称 f 是正规化的, 其中 I 表示将 X 映到 X 内的单位算子. 如果对任意 $t \in [0, 1]$, $x \in \Omega$ 都有 $tx \in \Omega$, 则称域 Ω 是星形域. 若一个正规化双全纯映射 $f: B \rightarrow X$ 的像集 $f(B)$ 是关于原点的星形域, 则称 f 为星形映射. 如果对任意 $t \in [0, 1]$, $x, y \in \Omega$ 都有 $tx + (1-t)y \in \Omega$, 则称域 Ω 是凸域. 若一个正规化双全纯映射 $f: B \rightarrow X$ 的像集 $f(B)$ 是凸域, 则称 f 为凸映射. 如果对任意 $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ 都有 $e^{i\theta}x \in \Omega$, 其中 $i = \sqrt{-1}$, 则称域 Ω 是圆型域.

记 $S(B)$ 为 B 上正规化双全纯映射全体所成之集, $S^*(B)$ 为 B 上正规化双全纯星形映射全体所成之集, $K(B)$ 表示 B 上正规化双全纯凸映射全体所成之集.

设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是有界圆形域. 映射 $f \in H(\Omega)$ 在点 $z \in \Omega$ 的一阶 Fréchet 导数和 m ($m \geq 2$) 阶 Fréchet 导数分别记为 $Df(z)$ 和 $D^m f(z)$.

定义 1.1 ^[9] 设 $\alpha \in [0, 1]$, 且 $f: B \rightarrow X$ 是复 Banach 空间单位球 B 上的正规化局部双全纯映射. 若

$$\operatorname{Re}\{T_x[(Df(x))^{-1}(D^2 f(x)(x^2) + Df(x)x)]\} \geq \alpha\|x\|, \quad x \in B,$$

则称 f 是复 Banach 空间单位球 B 上的 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射.

定义 1.2 ^[14] 设 $f: B \rightarrow X$ 是复 Banach 空间单位球 B 上的正规化局部双全纯映射, 记

$$G_f(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha}{T_u[(Df(\alpha u))^{-1}(f(\alpha u) - f(\beta u))]} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}.$$

若 $\operatorname{Re} G_f(\alpha, \beta) \geq 0$, $u \in \partial B$, $\alpha, \beta \in U$, 则称 f 是复 Banach 空间单位球 B 上的 $\mathbb{A}$ 型准凸映射.

定义 1.3 ^[14] 设 $f: B \rightarrow X$ 是复 Banach 空间单位球 B 上的正规化局部双全纯映射. 若

$$\operatorname{Re}\{T_x[(Df(x))^{-1}(D^2f(x)(x^2) + Df(x)x)]\} \geq 0, \quad x \in B,$$

则称 f 是复 Banach 空间单位球 B 上的 $\mathbb{B}$ 型准凸映射.

定义 1.4 ^[15] 设 $f: B \rightarrow X$ 是复 Banach 空间单位球 B 上的正规化局部双全纯映射. 若

$$\operatorname{Re}\{T_x[(Df(x))^{-1}(f(x) - f(\xi x))]\} \geq 0, \quad x \in B, \quad \xi \in \bar{U},$$

则称 f 是复 Banach 空间单位球 B 上的准凸映射.

当 $X = \mathbb{C}^n$ 时, 定义 1.2 与 1.3 由 Roper 与 Suffridge ^[13] 最先引入. 随后, Liu 和 Zhang ^[15] 又证明定义 1.4 中的准凸映射与定义 1.2 中的 $\mathbb{A}$ 型准凸映射恰为同一类映射.

在单复变数情形下, 定义 1.2–1.4 是同一定义, 即均为正规化双全纯凸函数的等价定义. 而当 $\alpha = 0$ 时, 定义 1.1 为 $\mathbb{B}$ 型准凸映射的定义. 另外, 当 $X = \mathbb{C}$ 时, 定义 1.1 又可回到单复变数 α 次凸函数的定义.

定义 1.5 ^[16] 设 $f \in H(B)$. 若对所有的 $x \in B$, 有 $\exp(-2\pi i/k)f(e^{2\pi i/k}x) = f(x)$, 则称 f 是 k 折对称映射, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$, 且 $i = \sqrt{-1}$.

定义 1.6 ^[17] 设 Ω 是 X 包含 0 的一个域 (连通开集). 若 $f(0) = 0, \dots, D^{k-1}f(0) = 0$ 但 $D^k f(0) \neq 0$, 则称 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 k 阶零点, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$.

由定义 1.5 与 1.6 知, 若 f 是 k 折对称正规化全纯映射, 则 $x = 0$ 是 $f(x) - x$ 的 $k+1$ 阶零点.

记 $Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(B)$ ($0 \leq \alpha < 1$) 与 $K_{\alpha}(U)$ ($0 \leq \alpha < 1$) 分别为 B 上 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射全体所成之集与 U 上 α 次凸函数全体所成之集. 又记 $Q_{\mathbb{A}}(B)$, $Q_{\mathbb{B}}(B)$ 与 $Q(B)$ 分别为 B 上 $\mathbb{A}$ 型准凸映射全体所成之集、 $\mathbb{B}$ 型准凸映射全体所成之集与准凸映射全体所成之集.

2 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射子族间的包含关系

首先定义以下几类 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射子族:

$$\begin{aligned} S Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) &= \left\{ f \in Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) : \sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^m f(0)(z^{m-1}, w)\| = \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\| \right\}, \\ S^2 Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) &= \left\{ f \in Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) : \frac{D^m f_p(0)(z^m)}{m!} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{p l_1 l_2 \dots l_m}| e^{i \frac{\theta_{p l_1} + \theta_{p l_2} + \dots + \theta_{p l_m}}{m}} z_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_m}, \right. \\ &\quad \left. p = 1, 2, \dots, n, m = 2, 3, \dots \right\}, \end{aligned}$$

其中 $|a_{p l_1 l_2 \dots l_m}| e^{i \frac{\theta_{p l_1} + \theta_{p l_2} + \dots + \theta_{p l_m}}{m}} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_p(0)}{\partial z_{l_1} \partial z_{l_2} \dots \partial z_{l_m}}, i = \sqrt{-1}, \theta_{p l_q} \in (-\pi, \pi] (q = 1, 2, \dots, m), l_1, l_2, \dots, l_m = 1, 2, \dots, n, m = 2, 3, \dots,$

$$S^3 Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) = \left\{ f \in Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) : \frac{D^m f_p(0)(z^m)}{m!} = z_p \left(\sum_{l=1}^n a_{p l m} z_l^{m-1} \right), p = 1, 2, \dots, n, m = 2, 3, \dots \right\},$$

其中 $a_{plm} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_p(0)}{\partial z_p \partial z_1^{m-1}}$, $p, l = 1, 2, \dots, n$, $m = 2, 3, \dots$

类似可定义各类准凸映射的子族 $SQ_{\mathbb{B}}(U^n)$, $SQ_{\mathbb{A}}(U^n)$, $SQ(U^n)$, $S^2Q_{\mathbb{B}}(U^n)$, $S^2Q_{\mathbb{A}}(U^n)$, $S^2Q(U^n)$, $S^3Q_{\mathbb{B}}(U^n)$, $S^3Q_{\mathbb{A}}(U^n)$, $S^3Q(U^n)$, 只需将 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射改为相应的准凸映射即可.

其次为了得到本节的定理, 我们需给出一些引理.

引理 2.1 ^[10] 设

$$\left\| \begin{pmatrix} \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{1l_1 l_2 \dots l_m}| e^{i \frac{\theta_{1l_1} + \theta_{1l_2} + \dots + \theta_{1l_m}}{m}} z_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_m} \\ \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{2l_1 l_2 \dots l_m}| e^{i \frac{\theta_{2l_1} + \theta_{2l_2} + \dots + \theta_{2l_m}}{m}} z_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_m} \\ \vdots \\ \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{nl_1 l_2 \dots l_m}| e^{i \frac{\theta_{nl_1} + \theta_{nl_2} + \dots + \theta_{nl_m}}{m}} z_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_m} \end{pmatrix} \right\| \leq C_m \|z\|^m, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in U^n,$$

其中 $m = 2, 3, \dots$, $a_{pl_1 l_2 \dots l_m}$ ($p, l_1, l_2, \dots, l_m = 1, 2, \dots, n$) 是与 z_p ($p = 1, 2, \dots, n$) 无关的复数, $i = \sqrt{-1}$, $\theta_{pl_q} \in (-\pi, \pi]$ ($q = 1, 2, \dots, m$, $p, l_1, l_2, \dots, l_m = 1, 2, \dots, n$) 与 z_p ($p = 1, 2, \dots, n$) 无关, C_m ($m = 2, 3, \dots$) 是仅依赖于 m 的非负实数以及 $\|z\| = \max_{1 \leq p \leq n} \{|z_p|\}$, 则

$$A_m = \max_{1 \leq p \leq n} \left\{ \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{pl_1 l_2 \dots l_m}| \right\} \leq C_m, \quad m = 2, 3, \dots$$

引理 2.2 ^[10] 设 $f(z) \in H(U^n)$, 且

$$\frac{D^m f_p(0)(z^m)}{m!} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n a_{pl_1 l_2 \dots l_m} z_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_m}, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $a_{pl_1 l_2 \dots l_m} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_p(0)}{\partial z_{l_1} \partial z_{l_2} \dots \partial z_{l_m}}$, $l_1, l_2, \dots, l_m = 1, 2, \dots, n$, $m = 2, 3, \dots$ 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} D^m f_p(0)(z^{m-1}, w) &= \frac{1}{m} \left(\sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n a_{pl_1 l_2 \dots l_m} w_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_m} + \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n a_{pl_1 l_2 \dots l_m} z_{l_1} w_{l_2} z_{l_3} \dots z_{l_m} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n a_{pl_1 l_2 \dots l_m} z_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_{m-1}} w_{l_m} \right), \\ z &\in U^n, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

其中 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \in \mathbb{C}^n$ 使得 $\|w\| = \max_{1 \leq p \leq n} \{|w_p|\} < 1$.

现建立 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射子族间的包含关系.

定理 2.1 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射子族间的包含关系如下: $S^3Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) \subsetneq S^2Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) \subset SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) \subset Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$.

证明 类似文献 [10, 推论 2.3] 中的说明, 易知 $S^3Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) \subsetneq S^2Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$, 又 $SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) \subset Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$, 只需证 $S^2Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) \subset SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$. 现假设 $f \in S^2Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$, 这蕴含着 $f \in Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$,

$$\frac{D^m f_p(0)(z^m)}{m!} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{pl_1 l_2 \dots l_m}| e^{i \frac{\theta_{pl_1} + \theta_{pl_2} + \dots + \theta_{pl_m}}{m}} z_{l_1} z_{l_2} \dots z_{l_m}, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots,$$

其中

$$|a_{pl_1 l_2 \dots l_m}| e^{i \frac{\theta_{pl_1} + \theta_{pl_2} + \dots + \theta_{pl_m}}{m}} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_p(0)}{\partial z_{l_1} \partial z_{l_2} \dots \partial z_{l_m}},$$

$i = \sqrt{-1}$, $\theta_{pl_q} \in (-\pi, \pi]$ ($q = 1, 2, \dots, m$), $l_1, l_2, \dots, l_m = 1, 2, \dots, n$, $m = 2, 3, \dots$ 注意到

$$\sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\| \leq \sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^m f(0)(z^{m-1}, w)\|,$$

这归结为证明

$$\sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^m f(0)(z^{m-1}, w)\| \leq \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|.$$

为此, 对于 $\forall z, w \in U^n \setminus \{0\}$, 记 $z_0 = \frac{z}{\|z\|}$ 与 $w_0 = \frac{w}{\|w\|}$. 在引理 2.1 中取

$$C_m = \frac{1}{m!} \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|, \quad m = 2, 3, \dots,$$

则由引理 2.1 得

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{pl_1 l_2 \dots l_m}| \leq \frac{1}{m!} \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

从而, 根据引理 2.2, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m!} D^m f_p(0)(z_0^{m-1}, w_0) \right| &= \frac{1}{m!} \left| \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n a_{pl_1 l_2 \dots l_m} \frac{w_{l_1}}{\|w\|} \frac{z_{l_2}}{\|z\|} \dots \frac{z_{l_m}}{\|z\|} \right. \\ &\quad + \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n a_{pl_1 l_2 \dots l_m} \frac{z_{l_1}}{\|z\|} \frac{w_{l_2}}{\|w\|} \frac{z_{l_3}}{\|z\|} \dots \frac{z_{l_m}}{\|z\|} \\ &\quad + \dots + \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n a_{pl_1 l_2 \dots l_m} \frac{z_{l_1}}{\|z\|} \frac{z_{l_2}}{\|z\|} \dots \frac{z_{l_{m-1}}}{\|z\|} \frac{w_{l_m}}{\|w\|} \left. \right| \\ &\leq \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^n |a_{pl_1 l_2 \dots l_m}|, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

结合 (2.1) 与 (2.2), 得

$$|D^m f_p(0)(z_0^{m-1}, w_0)| \leq \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|, \quad p = 1, 2, \dots, \quad n, m = 2, 3, \dots,$$

即

$$\|D^m f(0)(z_0^{m-1}, w_0)\| \leq \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|, \quad m = 2, 3, \dots$$

因此,

$$\sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^m f(0)(z^{m-1}, w)\| \leq \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|, \quad m = 2, 3, \dots$$

定理 2.1 证毕. □

在定理 2.1 中令 $\alpha = 0$, 用类似的方法易推出下列推论成立 (略去证明).

推论 2.1 下列映射族的包含关系成立:

$$\begin{aligned} S^3 Q_{\mathbb{B}}(U^n) &\subsetneq S^2 Q_{\mathbb{B}}(U^n) \subset S Q_{\mathbb{B}}(U^n) \subset Q_{\mathbb{B}}(U^n), \\ S^3 Q_{\mathbb{A}}(U^n) &\subsetneq S^2 Q_{\mathbb{A}}(U^n) \subset S Q_{\mathbb{A}}(U^n) \subset Q_{\mathbb{A}}(U^n), \\ S^3 Q(U^n) &\subsetneq S^2 Q(U^n) \subset S Q(U^n) \subset Q(U^n). \end{aligned}$$

3 一类 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射齐次展开式各项的估计

为了建立本节的定理, 有必要给出以下引理.

引理 3.1 ^[9] 设 $\alpha \in [0, 1)$, 且 f 是 U^n 上的正规化局部双全纯映射, 则 $f \in Q_B^\alpha(U^n)$ 当且仅当

$$\operatorname{Re} \frac{g_j(z)}{z_j} \geq \alpha, \quad z = (z_1, \dots, z_n)^T \in U^n,$$

其中 $g(z) = (g_1(z), \dots, g_n(z))^T = (Df(z))^{-1}(D^2f(z)(z^2) + Df(z)z)$, $z \in U^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的列向量, 且 j 使得 $|z_j| = \|z\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{|z_k|\}$.

引理 3.2 ^[9] 设 $\alpha \in [0, 1)$, 且

$$g(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z))^T \in H(U^n), \quad g(0) = 0, \quad Dg(0) = I.$$

若 $\operatorname{Re} \frac{g_j(z)}{z_j} \geq \alpha$, $z \in U^n$, 其中 $|z_j| = \|z\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{|z_k|\}$, 则

$$\frac{\|D^m g(0)(z^m)\|}{m!} \leq 2(1 - \alpha)\|z\|^m, \quad z \in U^n, \quad m = 2, 3, \dots$$

引理 3.3 ^[9] 若 $f(z)$ 是 U^n 上 k 折对称正规化局部双全纯映射, 且 $g(z) = (Df(z))^{-1}(D^2f(z)(z^2) + Df(z)z) \in H(U^n)$, 则

$$\begin{aligned} (k+1)k \frac{D^{k+1}f(0)(z^{k+1})}{(k+1)!} &= \frac{D^{k+1}g(0)(z^{k+1})}{(k+1)!}, \quad q=1, \\ (qk+1)qk \frac{D^{qk+1}f(0)(z^{qk+1})}{(qk+1)!} &= \frac{D^{qk+1}g(0)(z^{qk+1})}{(qk+1)!} + (k+1) \frac{D^{k+1}f(0)(z^k, \frac{D^{(q-1)k+1}g(0)(z^{(q-1)k+1})}{((q-1)k+1)!})}{(k+1)!} \\ &\quad + \dots + ((q-1)k+1) \frac{D^{(q-1)k+1}f(0)(z^{(q-1)k}, \frac{D^{k+1}g(0)(z^{k+1})}{(k+1)!})}{((q-1)k+1)!}, \\ &\quad z \in U^n, \quad q=2, 3, \dots \end{aligned}$$

引理 3.4 ^[9] 设 f 是 U^n 上的正规化局部双全纯映射. 若 $z=0$ 是 $f(z)-z$ 的 $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 阶零点, 且 $g(z) = (Df(z))^{-1}(D^2f(z)(z^2) + Df(z)z) \in H(U^n)$, 则对 $z \in U^n$, 有

$$m(m-1) \frac{D^m f(0)(z^m)}{m!} = \begin{cases} \frac{D^m g(0)(z^m)}{m!}, & m = k+1, \dots, 2k, \\ \frac{D^m g(0)(z^m)}{m!} + (k+1) \frac{D^{k+1} f(0)(z^k, \frac{D^{m-k} g(0)(z^{m-k})}{(m-k)!})}{(k+1)!}, & m = 2k+1. \end{cases}$$

引理 3.5 ^[14] 凸映射与准凸映射之间的包含关系为 $K(B) \subset Q(B) = Q_{\mathbb{A}}(B) \subset Q_{\mathbb{B}}(B)$. 在一些具体的 Banach 空间, 甚至有 $K(B) \subsetneq Q(B)$.

现可建立本节的定理.

定理 3.1 设 $f \in SQ_{\mathbb{B}}^\alpha(U^n)$. 若 f 是 U^n 上的 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 折对称映射, 则

$$\frac{\|D^{sk+1}f(0)(z^{sk+1})\|}{(sk+1)!} \leq \frac{\prod_{r=1}^s ((r-1)k+2-2\alpha)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \|z\|^{sk+1}, \quad z \in U^n, \quad s=1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

且上述估计是精确的.

证明 对 $\forall z \in U^n \setminus \{0\}$, 记 $z_0 = \frac{z}{\|z\|}$. 因 $f \in SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$, 且 f 是 U^n 上的 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 折对称映射, 根据引理 3.1、3.2 ($m = k + 1$ 情形)、3.3 ($q = 1$ 情形) 与 $SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$ 的定义, 得

$$\frac{\|D^{k+1}f(0)(z^{k+1})\|}{(k+1)!} \leq \frac{2-2\alpha}{(k+1)k} \|z\|^{k+1}, \quad z \in U^n.$$

这表明 (3.1) 对 $s = 1$ 成立. 现假设 (3.1) 对 $1 \leq s \leq q$ 成立, 其中 q 为某个正整数 (≥ 2), 则

$$\frac{\|D^{sk+1}f(0)(z^{sk+1})\|}{(sk+1)!} \leq \frac{\prod_{r=1}^s((r-1)k+2-2\alpha)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \|z\|^{sk+1}, \quad z \in U^n, \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (3.2)$$

因此, 由 (3.2), 有

$$\|D^{sk+1}f(0)(z_0^{sk+1})\| \leq \frac{\prod_{r=1}^s((r-1)k+2-2\alpha)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \cdot (sk+1)!, \quad s = 1, 2, \dots, q.$$

这蕴含着

$$\sup_{\|z\|=1} \|D^{sk+1}f(0)(z^{sk+1})\| \leq \frac{\prod_{r=1}^s((r-1)k+2-2\alpha)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \cdot (sk+1)!, \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (3.3)$$

另一方面, 注意到

$$\sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^m f(0)(z^{m-1}, w)\| = \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|, \quad m = 2, 3, \dots,$$

由 (3.3) 推得

$$\sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^{sk+1}f(0)(z^{sk}, w)\| \leq \frac{\prod_{r=1}^s((r-1)k+2-2\alpha)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \cdot (sk+1)!, \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (3.4)$$

又对 $w \in U^n \setminus \{0\}$, 记 $w_0 = \frac{w}{\|w\|}$, 则由 (3.4), 有

$$\begin{aligned} \|D^{sk+1}f(0)(z_0^{sk}, w_0)\| &\leq \sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^{sk+1}f(0)(z^{sk}, w)\| \\ &\leq \frac{\prod_{r=1}^s((r-1)k+2-2\alpha)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \cdot (sk+1)!, \quad s = 1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\|D^{sk+1}f(0)(z^{sk}, w)\|}{(sk+1)!} \leq \frac{\prod_{r=1}^s((r-1)k+2-2\alpha)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \|z\|^{sk} \|w\|, \quad z, w \in U^n, \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (3.5)$$

最后依次取 $w = \frac{1}{2(1-\alpha)} \frac{D^{(q-s+1)k+1}g(0)(z^{(q-s+1)k+1})}{((q-s+1)k+1)!}$ ($s = 1, 2, \dots, q$), 根据 (3.5)、引理 3.2 与 3.3, 类似文献 [9, 定理 3.1] 的证明得

$$\frac{((q+1)k+1)(q+1)k\|D^{(q+1)k+1}f(0)(z^{(q+1)k+1})\|}{((q+1)k+1)!} \leq \frac{\prod_{r=1}^{q+1}((r-1)k+2-2\alpha)}{q!k^q} \|z\|^{(q+1)k+1},$$

也就是

$$\frac{\|D^{(q+1)k+1}f(0)(z^{(q+1)k+1})\|}{((q+1)k+1)!} \leq \frac{\prod_{r=1}^{q+1}((r-1)k+2-2\alpha)}{((q+1)k+1) \cdot (q+1)!k^{q+1}} \|z\|^{(q+1)k+1}, \quad z \in U^n.$$

因此, (3.1) 对 $s = q + 1$ 成立. □

说明定理 3.1 精确性的例子同文献 [9, 定理 3.1] 中的实例.

推论 3.1 设 $f \in SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$. 若 f 是 U^n 上的 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 折对称映射, 则

$$\|f(z)\| \leq \int_0^{\|z\|} \frac{dt}{(1-t^k)^{\frac{2(1-\alpha)}{k}}}, \quad z \in U^n, \quad (3.6)$$

且上述估计是精确的.

证明 类似文献 [9, 推论 3.1] 的证明, 由定理 3.1 知 (3.6) 成立. □

验证推论 3.1 精确性的例子同文献 [9, 推论 3.1] 中的实例.

推论 3.2 设 $f \in SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$. 若 f 是 U^n 上的 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 折对称映射, 则

$$\|Df(z)z\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|^k)^{\frac{2(1-\alpha)}{k}}}, \quad z \in U^n, \quad (3.7)$$

且上述估计是精确的.

证明 仿照文献 [9, 推论 3.2] 的证明, 由定理 3.1 知 (3.7) 成立. □

说明推论 3.2 精确性的例子同文献 [9, 推论 3.2] 中的实例.

注 3.1 由定理 2.1 显见文献 [9] 中的定理 3.1、推论 3.1 和 3.2 分别是定理 3.1、推论 3.1 和 3.2 的特例.

在定理 3.1、推论 3.1 和 3.2 中令 $\alpha = 0$, 则由引理 3.5 立得下列的推论 (证明略).

推论 3.3 设 $f \in SQ_{\mathbb{B}}(U^n)$ ($SQ_{\mathbb{A}}(U^n)$ 或 $SQ(U^n)$). 若 f 是 U^n 上的 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 折对称映射, 则

$$\frac{\|D^{sk+1}f(0)(z^{sk+1})\|}{(sk+1)!} \leq \frac{\prod_{r=1}^s ((r-1)k+2)}{(sk+1) \cdot s!k^s} \|z\|^{sk+1}, \quad z \in U^n, \quad s = 1, 2, \dots,$$

且上述估计是精确的.

推论 3.4 设 $f \in SQ_{\mathbb{B}}(U^n)$ ($SQ_{\mathbb{A}}(U^n)$ 或 $SQ(U^n)$). 若 f 是 U^n 上的 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 折对称映射, 则

$$\|f(z)\| \leq \int_0^{\|z\|} \frac{dt}{(1-t^k)^{\frac{2}{k}}}, \quad z \in U^n,$$

且上述估计是精确的.

推论 3.5 设 $f \in SQ_{\mathbb{B}}(U^n)$ ($SQ_{\mathbb{A}}(U^n)$ 或 $SQ(U^n)$). 若 f 是 U^n 上的 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 折对称映射, 则

$$\|Df(z)z\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|^k)^{\frac{2}{k}}}, \quad z \in U^n,$$

且上述估计是精确的.

注 3.2 由推论 2.1 易知, 文献 [10] 中的推论 2.2、3.1 和 3.2 分别是推论 3.3、3.4 和 3.5 的特例, 而且当 $\alpha = 0$ 时, 也易知文献 [9] 中的定理 3.1、推论 3.1 和 3.2 分别是推论 3.3、3.4 和 3.5 的特例.

定理 3.2 设 $f \in SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$. 若 $z = 0$ 是 $f(z) - z$ 的 $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 阶零点, 则

$$\frac{\|D^m f(0)(z^m)\|}{m!} \leq \begin{cases} \frac{2-2\alpha}{m(m-1)} \|z\|^m, & m = k+1, k+2, \dots, 2k, \\ \frac{(2-2\alpha)(k+2-2\alpha)}{m(m-1)k} \|z\|^m, & m = 2k+1. \end{cases} \quad (3.8)$$

当 $m = k + 1$ 与 $m = 2k + 1$ 时, 上述估计是精确的.

证明 仿照文献 [9, 定理 3.2] 的证明, 有

$$\frac{\|D^m f(0)(z^m)\|}{m!} \leq \frac{2 - 2\alpha}{m(m-1)} \|z\|^m, \quad z \in U^n.$$

当 $m = 2k + 1$ 时, 类似定理 3.1 的证明, 得

$$\frac{\|D^{k+1} f(0)(z^k, \frac{D^{m-k} g(0)(z^{m-k})}{(m-k)!})\|}{(k+1)!} \leq \frac{(2-2\alpha)^2}{(k+1)k} \|z\|^m, \quad z \in U^n, \quad m = 2k + 1.$$

令 $w = \frac{1}{2(1-\alpha)} \frac{D^{m-k} g(0)(z^{m-k})}{(m-k)!}$, 则由 (3.5) ($s = 1$ 情形)、引理 3.2 与 3.4, 类似文献 [9, 定理 3.2] 的证明可得

$$m(m-1) \frac{\|D^m f(0)(z^m)\|}{m!} \leq \frac{(2-2\alpha)(k+2-2\alpha)}{k} \|z\|^m, \quad z \in U^n, \quad m = 2k + 1,$$

即知 (3.8) 成立. □

验证定理 3.2 精确性的例子同文献 [9, 定理 3.2] 的实例.

注 3.3 由定理 2.1 易知, 文献 [9, 定理 3.2] 是定理 3.2 的特例.

公开问题 3.1 $SQ_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n) = Q_{\mathbb{B}}^{\alpha}(U^n)$ 是否成立?

注 3.4 若公开问题 3.1 得到解决, 则多复变数中关于 $\mathbb{B}$ 型 α 次准凸映射的 Bieberbach 猜想获得证明. 特别地, 多复变数中关于准凸映射 (包括 $\mathbb{A}$ 型准凸映射与 $\mathbb{B}$ 型准凸映射) 的 Bieberbach 猜想也获得证明.

致谢 作者十分感谢审稿人提出的中肯意见.

参考文献

- 1 Gong S. The Bieberbach Conjecture. Providence: Amer Math Soc, 1999
- 2 Graham I, Kohr G. Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions. New York: Marcel Dekker, 2003
- 3 Robertson M S. On the theory of univalent functions. Ann Math, 1936, 37: 374–408
- 4 Hamada H, Honda T. Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables. Chin Ann Math Ser B, 2008, 29: 353–368
- 5 Liu T S, Liu X S. A refinement about estimation of expansion coefficients for normalized biholomorphic mappings. Sci China Ser A, 2005, 48: 865–879
- 6 Xu Q H, Liu T S. On coefficient estimates for a class of holomorphic mappings. Sci China Ser A, 2009, 52: 677–686
- 7 Kohr G. On some best bounds for coefficients of several subclasses of biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. Complex Var Elliptic Equ, 1998, 36: 261–284
- 8 Liu X S. On the quasi-convex mappings on the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$. J Math Anal Appl, 2007, 335: 43–55
- 9 Liu X S, Liu M S. Quasi-convex mappings of order α on the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$. Rocky Mountain J Math, 2010, 40: 1619–1644
- 10 Liu X S, Liu T S. The sharp estimates of all homogeneous expansions for a class of quasi-convex mappings on the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$. Chin Ann Math Ser B, 2011, 32: 241–252
- 11 Liu X S, Liu T S. The sharp estimates for each item in the homogeneous polynomial expansions of a subclass of close-to-convex mappings (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40: 1079–1090
- 12 Liu X S, Liu T S. An inequality of homogeneous expansion for biholomorphic quasi-convex mappings on the unit polydisk and its application. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2009, 29: 201–209
- 13 Roper K A, Suffridge T J. Convexity properties of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. Trans Amer Math Soc, 1999, 351: 1803–1833
- 14 Gong S. Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables (in Chinese). 2nd ed. Beijing: Science Press, 2003

- 15 Liu T S, Zhang W J. The growth theorem and covering theorem for quasi-convex mappings on unit ball in complex Banach space (in Chinese). Sci China Ser A, 2002, 32: 1033–1041
- 16 Honda T. The growth theorem for k -fold symmetric convex mappings. Bull Lond Math Soc, 2002, 34: 717–724
- 17 Lin Y Y, Hong Y. Some properties of holomorphic maps in Banach spaces (in Chinese). Acta Math Sin, 1995, 38: 234–241

Sharp estimates of all homogeneous expansions for a subclass of quasi-convex mappings of type $\mathbb{B}$ and order α on the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$

LIU TaiShun, LIU XiaoSong & XU QingHua

Abstract In this paper, sharp estimates of all homogeneous expansions are given for some quasi-convex mappings $f(z)$ of type $\mathbb{B}$ and order α on the open unit polydisk in $\mathbb{C}^n$, where $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))^T$ is a k -fold symmetric mapping (or $z = 0$ is a zero of order $k+1$ of $f(z)-z$), which satisfies $\sup_{\|z\|=1, \|w\|=1} \|D^m f(0)(z^{m-1}, w)\| = \sup_{\|z\|=1} \|D^m f(0)(z^m)\|$, $m = 2, 3, \dots$. The obtained estimates include many known conclusions in the previous literatures.

Keywords k -fold symmetric, quasi-convex mapping of type $\mathbb{B}$ and order α , quasi-convex mapping, quasi-convex mapping of type $\mathbb{A}$, quasi-convex mapping of type $\mathbb{B}$, estimate of homogeneous expansion

MSC(2010) 32A30, 32H02

doi: 10.1360/N012015-00076