非自治 Boissonade 系统的拉回和一致指数吸引子

献给钱敏教授 90 华诞

周盛凡^{1*}, 赵敏², 向晓林³

1. 浙江师范大学数理与信息工程学院, 金华 321004;

2. 温州大学数学与信息科学学院, 温州 325035;

3. 四川大学商学院, 成都 610064

E-mail: sfzhou@zjnu.cn, zhaomin1223@126.com, scugsxxl@sina.com

收稿日期: 2017-04-06; 接受日期: 2017-06-27; 网络出版日期: 2017-07-18; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11471290) 资助项目

摘要 本文首先改进已有的非自治动力系统的拉回和一致指数吸引子的存在性条件; 然后证明受依赖时间外力扰动的 Boissonade 系统的拉回指数吸引子的存在性、连续性和分形维数有限性; 最后证明受拟周期外力扰动的 Boissonade 系统的一致指数吸引子存在性及其分形维数有限性.

关键词 非自治动力系统 连续过程 Boissonade 系统 拉回指数吸引子 一致指数吸引子

MSC (2010) 主题分类 35B41, 37B55, 35K57, 37C45

1 引言

通常用全局吸引子、一致吸引子、拉回吸引子 (核截面) 和随机吸引子刻画自治、非自治和随机动力系统的渐近行为, 自治系统的结果可以参见文献 [1–7] 等, 非自治和随机系统的结果可以参见文献 [8–11] 等. 然而, 这些吸引子可能是无穷维的, 并且吸引轨道的速度可能很慢, 吸引速率甚至很难估计. 为了解决这些困难, 人们提出了以指数率吸引轨道的指数吸引子^[12, 13]、一致指数吸引子^[14–20]、拉回指数吸引子^[21–28]和随机指数吸引子^[29]等概念. 简单地讲, 指数吸引子是一个正不变的、有有限分形维数并且指数率吸引轨道的紧集, 它包含全局吸引子. 1994 年, Eden 等在文献 [12] 中首先给出了构造指数吸引子的一种方法. 最近, Zhou 和 Han 在文献 [19, 28] 中给出了容易验证的非自治动力系统的拉回和一致指数吸引子的存在性及其分形维数有限性的充分条件, 并已应用于多类非自治格点动力系统.

本文主要考虑依赖时间外力扰动的 Boissonade 系统

英文引用格式: Zhou S F, Zhao M, Xiang X L. Pullback and uniform exponential attractor for non-autonomous Boissonade system (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1891–1906, doi: 10.1360/N012017-00062

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u - \alpha v + \gamma uv - u^3 + f_1(x, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + u - \beta v + f_2(x, t), \quad t \geq \tau, \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, \quad t \geq \tau, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, \tau) = u_\tau(x), \quad v(x, \tau) = v_\tau(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

的拉回指数吸引子存在性和拟周期外力扰动的 Boissonade 系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u - \alpha v + \gamma uv - u^3 + h_1(x)g_1(\tilde{\sigma}(t)), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + u - \beta v + h_2(x)g_2(\tilde{\sigma}(t)), \quad x \in \Omega, \quad t \geq \tau, \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, \quad t \geq \tau, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, \tau) = u_\tau(x), \quad v(x, \tau) = v_\tau(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

的一致指数吸引子的存在性, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$) 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开集, $\tau \in \mathbb{R}$, $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 都是定义在 $\Omega \times [\tau, +\infty)$ 上的实值函数, 系数 d_1 、 d_2 、 α 、 β 和 γ 都是正常数. 在系统 (1.1) 中, 外力项 $f_i(\cdot, t) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ ($i = 1, 2$) 是平移有界的, 即

$$\|f_i\|_{L^2_b}^2 = \|f_i\|_{L^2_b(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \int_{\Omega} f_i^2(x, s) dx ds < \infty. \quad (1.3)$$

在系统 (1.2) 中, $h_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$; $\tilde{\sigma}(t) = (\mathbf{x}t + \sigma) \bmod(\mathbb{T}^m)$, $\sigma \in \mathbb{T}^m$, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ 是固定向量且其分量 $x_1, \dots, x_m$ 有理独立, 即若存在整数 $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m$ 使得 $\sum_{j=1}^m \bar{k}_j x_j = 0$, 则 $\bar{k}_j = 0$, $j = 1, \dots, m$; $\mathbb{T}^m = \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) : \sigma_j \in [-\pi, \pi], j = 1, \dots, m\}$ 是 m -维环面, 其元素满足

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, -\pi, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_m) \sim (\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \pi, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_m), \quad j = 1, \dots, m,$$

其度量和拓扑由范数 $\|\sigma\|_{\mathbb{T}^m} = (\sum_{j=1}^m \sigma_j^2)^{\frac{1}{2}}$ 诱导; $g_i : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) 满足: 存在 $k_i > 0$ 使得

$$g_i(0_{\mathbb{T}^m}) = 0, \quad |g_i(\tilde{\sigma}_1(t)) - g_i(\tilde{\sigma}_2(t))| \leq k_i \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{T}^m. \quad (1.4)$$

Boissonade 系统源于生物学和化学等多领域, 例如, 图灵斑图、次氯酸 - 碘化物 - 丙二酸 (CIMA) 系统、含癌变的肿瘤模型、二维仿真系统、三维单层模型和 Schnackenberg 模型, 参见文献 [2, 30–32]. 当 $\gamma = 0$ 时, 系统 (1.1) 是刻画细胞膜放电的 FitzHugh Nagumo 模型, 还源自流体超导系统和燃烧理论等, 参见文献 [1, 8, 33–36].

Tu^[2] 证明了自治 Boissonade 系统 (1.1) (即 $f_1(x, t) = f_2(x, t) = 0$) 的全局吸引子存在性, 并得到了吸引子的 Hausdorff 维数和分形维数上界以及吸引子关于 $\gamma \rightarrow 0$ 时的上半连续性. Zhang 和 Huang^[37] 证明了在时变区域上自治 Boissonade 系统受到可加白噪声扰动时系统的随机吸引子的存在性. 当非自治 Boissonade 系统 (1.1) 受到可加可乘白噪声扰动时, Zhao 和 Zhou^[38] 得到了系统的随机吸引子的存在性以及吸引子关于 $\gamma \rightarrow 0$ 时和噪声项系数趋于零时的上半连续性, 并在 $\gamma = 0$ 时证明了随机吸引子分形维数的有限性. 至今为止, 关于非自治 Boissonade 系统的指数吸引子还未见有研究.

我们注意到文献 [19, 28] 中的拉回和一致指数吸引子的存在性条件要求非自治系统在闭的有界集 (簇) 上满足一些性质. 这样的要求对于某些非自治偏微分方程来说过强以致无法适用, 例如, 非自治 Boissonade 系统 (1.1) 和 (1.2) 就不能直接应用. 为此, 我们在第 2 节首先改进文献 [19, 28] 的条件, 只要求非自治系统在有界集 (簇) 上满足相应性质, 其适用范围更广, 并可应用于系统 (1.1) 和 (1.2).

本文第 3 和 4 节利用第 2 节的结果在文献 [2, 38] 的基础上进一步证明了非自治系统 (1.1) 的拉回指数吸引子的存在性、连续性及其分形维数有限性, 以及非自治系统 (1.2) 的一致指数吸引子的存在性及其分形维数有限性. 由此结果可得到文献 [2] 中考虑的自治 Boissonade 系统有限维的指数吸引子存在性, 它包含全局吸引子.

2 非自治动力系统的拉回和一致指数吸引子存在性的充分条件

设 X 为可分 Banach 空间, 称双参数映射族 $\{V(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 为空间 X 上的连续过程, 如果对于 $t \geq \tau$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$, 映射 $V(t, \tau) : X \rightarrow X$ 满足 (i) $\forall \tau \in \mathbb{R}, V(\tau, \tau) = I$; (ii) 余圈 (cocycle) 性质: $V(t, s)V(s, \tau) = V(t, \tau)$, $-\infty < \tau \leq s \leq t < +\infty$; (iii) 映射 $(t, \tau, \theta_\tau) \rightarrow V(t, \tau)\theta_\tau$ 是连续的, $-\infty < \tau \leq t < +\infty$, $\theta_\tau \in X$.

定义 2.1 称集族 $\{\mathcal{M}^*(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ 为连续过程 $\{V(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 在 X 中的拉回指数吸引子, 如果满足

- (1) 紧性: $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{M}^*(t)$ 在 X 中是紧的;
- (2) 分形维数有限性: $\sup_{t \in \mathbb{R}} \dim_f \mathcal{M}^*(t) < \infty$, 其中

$$\dim_f \mathcal{M}^*(t) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N_\varepsilon[\mathcal{M}^*(t)]}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

为 $\mathcal{M}^*(t)$ 的分形维数, $N_\varepsilon[\mathcal{M}^*(t)]$ 表示 H 中能覆盖 $\mathcal{M}^*(t)$ 所需的半径为 ε 的球的极小个数;

- (3) 正不变性: 对于 $-\infty < \tau \leq t < +\infty$, 有 $V(t, \tau)\mathcal{M}^*(\tau) \subset \mathcal{M}^*(t)$;
- (4) 拉回指数吸引性: 对任意有界集 $\mathcal{B} \subset X$, 存在正常数 $\varepsilon > 0$, $T_{\mathcal{B}} > 0$ 和正值函数 $Q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 使得 $d_h(V(t, \tau)\mathcal{B}, \mathcal{M}^*(t)) \leq Q(\|\mathcal{B}\|, T_{\mathcal{B}})e^{-\varepsilon(t-\tau)}$, $\tau + T_{\mathcal{B}} < t \leq +\infty$, $\tau \in \mathbb{R}$.

下面的定理 2.1 是对文献 [13, 28] 中连续过程的拉回指数吸引子存在性定理的改进. 本文第 3 节将应用定理 2.1 证明非自治 Boissonade 系统 (1.1) 的拉回指数吸引子的存在性.

定理 2.1 设 $\{V(t, \tau)\}_{t \geq \tau \in \mathbb{R}}$ 为可分 Banach 空间 X 上的连续过程. 若存在 X 中的有界子集族 $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ 满足

- (1) $\|Y(t)\|_X = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{u, v \in Y(t)} \|u - v\|_X \leq R < +\infty$, 其中 R 为正数;
- (2) $V(t, \tau)Y(\tau) \subset Y(t)$, $-\infty < \tau \leq t < \infty$;
- (3) 对任意有界集 $B \subset X$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$, 存在 $T_B \geq 0$ 使得 $V(t, \tau)B \subset Y(t)$, $\tau + T_B \leq t < +\infty$;
- (4) 存在 $t^* > 0$ 和 $L = L(t^*) > 0$ 使得对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $t \in [0, t^*]$, $u_\tau, v_\tau \in Y(\tau)$, 有

$$\|V(\tau + t, \tau)u_\tau - V(\tau + t, \tau)v_\tau\|_X \leq L\|u_\tau - v_\tau\|_X;$$

- (5) 存在正常数 $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ 和 X 中的 N -维子空间 X_N ($N \in \mathbb{N}$) 使得 N -维有界投射 $P_N : X \rightarrow X_N$ 满足: 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau, v_\tau \in Y(\tau)$, 有

$$\|(I - P_N)(V(\tau + t^*, \tau)u_\tau - V(\tau + t^*, \tau)v_\tau)\|_X \leq \gamma\|u_\tau - v_\tau\|_X,$$

其中 γ 和 N 可能与 t^* 有关但都与 τ 无关;

- (6) 对任意给定的 $\tau \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \sup_{u_\tau \in Y(\tau)} \|V(t, \tau)u_\tau - u_\tau\|_X = 0,$$

则 $\{V(t, \tau)\}_{t \geq \tau \in \mathbb{R}}$ 有一个拉回指数吸引子 $\{\mathcal{M}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ 满足: 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 有

- (i) $\mathcal{M}(t) \subseteq \overline{Y(t)}$ 且是紧的;
- (ii) $\dim_f(\mathcal{M}(t)) \leq \frac{-\ln N_\theta}{\ln a_\theta}$, 其中 $0 < \theta = \frac{1-2\gamma}{2L}$, $a_\theta = 2(\gamma + \theta L)$, $N_\theta (\leq ([\frac{\sqrt{N}}{2\theta}] + 1)^N)$ 是 X 中所需的以 ε 为半径且覆盖 X_N 中闭单位球 $B_N(0, 1) = \{u \in X_N : \|u\|_X \leq 1\}$ 的闭球的极少个数;
- (iii) 对任意 $-\infty < \tau \leq t < \infty$, 有 $V(t, \tau)\mathcal{M}(\tau) \subset \mathcal{M}(t)$;
- (iv) 对任意有界集 $B \subset H$, 当 $-\infty < \tau + T_B \leq t < \infty$ 时,

$$d_h(V(t, \tau)B, \mathcal{M}(t)) \leq \frac{LRe^{-\frac{T_B \ln a_\theta}{t^*}}}{a_\theta^2} e^{\frac{\ln a_\theta}{t^*}(t-\tau)};$$

- (v) $\lim_{s \rightarrow t} d_h(\mathcal{M}(s), \mathcal{M}(t)) = 0$.

证明 根据 $V(t, \tau)$ ($t \geq \tau \in \mathbb{R}$) 的连续性和余圈性质可得条件 (1)–(6) 中 $Y(\tau)$ 替换为有界闭集 $\overline{Y(\tau)}$ 后仍旧成立. 于是利用文献 [28, 定理 1] 和 [13, 定理 3.1] 得证. $\square$

设 m -维环面 $\mathbb{T}^m$ 与向量 $\mathbf{x}$ 如引言中定义. 对于 $s \in \mathbb{R}$, 定义 $\mathbb{T}^m$ 上的映射

$$T(s) : \sigma \rightarrow (\mathbf{x}s + \sigma) \bmod(\mathbb{T}^m), \quad \sigma \in \mathbb{T}^m,$$

则 $\{T(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{T}^m$ 上的平移群且 $\forall s \in \mathbb{R}$, $T(s)\mathbb{T}^m = \mathbb{T}^m$ 和 $\tilde{\sigma}(t) = T(t)\sigma$, $\sigma \in \mathbb{T}^m$.

对于 $\tau \in \mathbb{R}$, 设 $\{V^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 为空间 X 上的连续过程族, 即对于任意 $\sigma \in \mathbb{T}^m$, $V^\sigma(t, \tau)$ ($t \geq \tau$) 为 X 上的连续过程. 设 $\mathcal{P}$ 为 X 的有界闭子集使得

$$V^\sigma(t, \tau)\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{T}^m, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

定义 2.2 称子集 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P} \subset X$ 为连续过程族 $\{V^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 在 $\mathcal{P}$ 上的一致指数吸引子, 如果满足

- (1) 紧性: $\mathcal{M}$ 在 X 中是紧的;
- (2) 分形维数有限性: $\dim_f \mathcal{M} < \infty$;
- (3) (关于 $\sigma \in \mathbb{T}^m$) 一致指数吸引性: 存在两正常数 a_1 和 a_2 使得对于 $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, 有

$$\sup_{\sigma \in \mathbb{T}^m} d_h(V^\sigma(t, \tau)\mathcal{P}, \mathcal{M}) \leq a_1 e^{-a_2(t-\tau)}.$$

下面的定理 2.2 是对文献 [19] 中连续过程族的一致指数吸引子存在性结果的改进. 本文第 4 节将应用定理 2.2 证明非自治 Boissonade 系统 (1.2) 的一致指数吸引子存在性.

定理 2.2 设 $\{V^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^n, t \geq \tau \in \mathbb{R}}$ 为可分 Banach 空间 X 上的连续过程族. 若

- (1) 连续过程族 $\{V^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^n, t \geq \tau \in \mathbb{R}}$ 和平移群 $\{T(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ 满足

$$V^\sigma(t+s, \tau+s) = V^{T(s)\sigma}(t, \tau), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R};$$

- (2) 存在有界子集 $\mathcal{Q} \subseteq X$ 使得对任意 $\sigma \in \mathbb{T}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$, 当 $t \geq \tau$ 时, 有 $V^\sigma(t, \tau)\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}$;
- (3) 存在 $t^* > 0$, $L = L(t^*) > 0$ 和 X 中的 N -维子空间 X_N ($N = N(t^*) \in \mathbb{N}$), 使得对任意 $u_1, u_2 \in \mathcal{Q}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{T}^m$, 有

$$\begin{aligned} \|V^{\sigma_1}(t, 0)u_1 - V^{\sigma_2}(t, 0)u_2\|_X &\leq L(\|u_1 - u_2\|_X^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [0, t^*], \\ \|(I - P_N)(V^{\sigma_1}(t^*, 0)u_1 - V^{\sigma_2}(t^*, 0)u_2)\|_X &\leq \frac{1}{8\sqrt{2}}(\|u_1 - u_2\|_X^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

其中 $P_N: X \rightarrow X_N$ 为 N -维正交投射,

则 $\{V^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau \in \mathbb{R}}$ 在闭包 $\overline{\mathcal{Q}}$ 上有一致指数吸引子 $\mathcal{M}$ 且 $\dim_f(\mathcal{M}) \leq K_0(m+N) \ln \sqrt{L^2+1}$, 其中 K_0 是一个正常数.

证明 根据 $V^\sigma(t, \tau)$ ($\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau \in \mathbb{R}$) 的连续性得条件 (2) 和 (3) 中 $\mathcal{Q}$ 替换为闭包 $\overline{\mathcal{Q}}$ 后仍旧成立. 利用文献 [19, 定理 2.1] 可得证本定理. $\square$

3 系统 (1.1) 的拉回指数吸引子

记 $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 其 Borel σ -代数为 $\mathcal{B}(H)$, $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, H 和 $L^2(\Omega)$ 上的范数和内积分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 当 $p \neq 2$ 时, $L^p(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ 上的范数记为 $\|\cdot\|_{L^p}$, Euclid 空间的有界集的体积和向量范数都记为 $|\cdot|$. 由 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$) 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开集及 Poincaré 不等式可得, 存在正常数 $b_0 > 0$ 使得

$$\|\varphi\|_{L^4} \leq b_0 \|\varphi\|_E = b_0 \|\nabla \varphi\|, \quad \|\varphi\|_{L^6} \leq b_0 \|\varphi\|_E = b_0 \|\nabla \varphi\|, \quad \varphi \in E. \quad (3.1)$$

系统 (1.1) 可写成下面的向量形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi + f(\varphi) + f^*(x, t), & t \geq \tau, \\ \varphi(\tau) = \varphi_\tau = (u_\tau, v_\tau) \in H, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} d_1 \Delta & 0 \\ 0 & d_2 \Delta \end{pmatrix}, \quad f(\varphi) = \begin{pmatrix} u - \alpha v + \gamma uv - u^3 \\ u - \beta v \end{pmatrix}, \quad f^*(x, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, t) \\ f_2(x, t) \end{pmatrix}.$$

先考虑系统 (3.2) 的拉回吸引子的存在性.

根据文献 [38, 引理 2.1] 可得方程 (3.2) 在 H 中存在唯一的整体弱解, 并且解映射定义 H 上一个连续过程.

引理 3.1 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 和初值 $\varphi_\tau \in H$, 方程 (3.2) 存在唯一弱解 $\varphi(\cdot) = \varphi(\cdot, \tau; \varphi_\tau) \in C([\tau, \infty); H) \cap L_{\text{loc}}^2((\tau, \infty); E)$, $\varphi(\tau, \tau; \varphi_\tau) = \varphi_\tau$, $\varphi(\cdot, \tau; \varphi_\tau)$ 关于 $\varphi_\tau \in H$ 连续. 定义解映射

$$U(t, \tau) : \varphi_\tau \in H \mapsto \varphi(t, \tau; \varphi_\tau) = (u(t, \tau; \varphi_\tau), v(t, \tau; \varphi_\tau)) \in H, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

则 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 为作用在 H 上的连续过程.

关于连续过程 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 在 H 中的一致有界吸收集, 我们有下面引理.

引理 3.2 存在过程 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 的闭的一致吸收球 $B_0 = B(0, r_0) = \{\varphi \in H : \|\varphi\| \leq r_0\}$ (r_0 与 τ 和 t 无关) 和正值函数 $\mathcal{T} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 使得对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 任意有界子集 $B \subset H$, 当 $t \geq \mathcal{T}(\|B\|)$ 时, $U(t + \tau, \tau)B \subseteq B_0$, 其中 $\|B\| = \sup_{\varphi \in B} \|\varphi\|$.

证明 取 $c = \frac{4\gamma^2}{\beta} > 0$. 作内积 $\langle (3.2), (u, cv) \rangle$ 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + c\|v\|^2) + d_1 \|\nabla u\|^2 + cd_2 \|\nabla v\|^2 \\ &= \int_{\Omega} (u^2 + (c - \alpha)uv + \gamma u^2 v - u^4 - c\beta v^2 + f_1 u + cf_2 v) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega} \left(u^2 + \frac{(c-\alpha)^2}{c\beta} u^2 + \frac{c\beta}{4} v^2 + \frac{1}{4} u^4 + \gamma^2 v^2 - u^4 - c\beta v^2 + \frac{1}{4} f_1^2 + u^2 + \frac{2c}{3\beta} f_2^2 + \frac{3c\beta}{8} v^2 \right) dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\left(2 + \frac{(c-\alpha)^2}{c\beta} \right) u^2 - \left(\frac{3c\beta}{8} - \gamma^2 \right) v^2 - \frac{3}{4} u^4 + \frac{1}{4} f_1^2 + \frac{2c}{3\beta} f_2^2 \right) dx \\
&\leq \left(2 + \frac{(c-\alpha)^2}{c\beta} \right)^2 |\Omega| - \frac{\gamma^2}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2c}{3\beta} \right) (\|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + c\|v\|^2) + \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\gamma^2}{2} \|v\|^2 + d_1 \|\nabla u\|^2 + cd_2 \|\nabla v\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + c\|v\|^2) + \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4 + \frac{1}{8} |\Omega| + \frac{\gamma^2}{2} \|v\|^2 + d_1 \|\nabla u\|^2 + cd_2 \|\nabla v\|^2 \\
&\leq \left(\left(2 + \frac{(c-\alpha)^2}{c\beta} \right)^2 + \frac{1}{8} \right) |\Omega| + \left(\frac{1}{4} + \frac{2c}{3\beta} \right) (\|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

令 $b_1 = \min\{1, \frac{\gamma^2}{c}\}$, $b_2 = 2((2 + \frac{(c-\alpha)^2}{c\beta})^2 + \frac{1}{8})|\Omega|$, $b_3 = 2(\frac{1}{4} + \frac{2c}{3\beta})$, 则有

$$\frac{d}{dt} (\|u\|^2 + c\|v\|^2) + b_1 (\|u\|^2 + c\|v\|^2) \leq b_2 + b_3 (\|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2). \tag{3.5}$$

对 (3.5) 在 $[\tau, t + \tau]$ 上应用 Gronwall 不等式, 结合 (1.3), 对于 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\|u(t + \tau)\|^2 + c\|v(t + \tau)\|^2 \\
&\leq e^{-b_1 t} (\|u(\tau)\|^2 + c\|v(\tau)\|^2) + \int_{\tau}^{t+\tau} e^{-b_1(t+\tau-s)} (b_2 + b_3 (\|f_1(s)\|^2 + \|f_2(s)\|^2)) ds \\
&\leq e^{-b_1 t} (\|u(\tau)\|^2 + c\|v(\tau)\|^2) + \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{t+\tau-i-1}^{t+\tau-i} e^{-b_1(t+\tau-s)} (b_2 + b_3 (\|f_1(s)\|^2 + \|f_2(s)\|^2)) ds \\
&\leq e^{-b_1 t} (\|u(\tau)\|^2 + c\|v(\tau)\|^2) + \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-ib_1} (b_2 + b_3 (\|f_1\|_{L_b^2}^2 + \|f_2\|_{L_b^2}^2)) \\
&\leq e^{-b_1 t} (\|u(\tau)\|^2 + c\|v(\tau)\|^2) + \frac{e^{b_1} (b_2 + b_3 (\|f_1\|_{L_b^2}^2 + \|f_2\|_{L_b^2}^2))}{e^{b_1} - 1}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

取 $b_4 = \min\{1, c\}$, $b_5 = \max\{1, c\}$, 那么由 (3.6) 得

$$\|u(t + \tau)\|^2 + \|v(t + \tau)\|^2 \leq \frac{b_5}{b_4} e^{-b_1 t} (\|u(\tau)\|^2 + \|v(\tau)\|^2) + \frac{e^{b_1} (b_2 + b_3 (\|f_1\|_{L_b^2}^2 + \|f_2\|_{L_b^2}^2))}{(e^{b_1} - 1)b_4},$$

故对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 任意有界集 $B \subseteq H$, 当 $\varphi_{\tau} \in B$ 时, 有

$$\|\varphi(t + \tau, \tau, \varphi_{\tau})\|^2 \leq \frac{b_5}{b_4} e^{-b_1 t} \sup_{\varphi_{\tau} \in B} \|\varphi_{\tau}\|^2 + \frac{1}{2} r_0^2,$$

其中 $r_0^2 := \frac{2e^{b_1} (b_2 + b_3 (\|f_1\|_{L_b^2}^2 + \|f_2\|_{L_b^2}^2))}{(e^{b_1} - 1)b_4} < \infty$ 与 τ 和 t 都无关.

因为对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 任意有界集 $B \subseteq H$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-b_1 t} \sup_{\varphi_{\tau} \in B} \|\varphi(\tau)\|^2 = 0,$$

故存在一个正值函数 $\mathcal{T}(\|B\|) = \frac{1}{b_1} \ln(\frac{2b_5\|B\|^2}{r_0^2 b_4})$ 使得对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 和任意有界子集 $B \subset H$, 当 $t \geq \mathcal{T}(\|B\|)$ 时, $U(t+\tau, \tau)B \subseteq B_0$. 因此 $B_0 = \{\varphi \in H : \|\varphi\| \leq r_0\}$ 是 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 的一致有界闭吸收球. $\square$

引理 3.3 存在闭球 $B_1 = \{\varphi \in E : \|\varphi\|_E \leq r_1\}$ (r_1 与 τ 和 t 无关) 使得对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 当 $t \geq \mathcal{T}(\|B_0\|) + 1$ 时, $U(t+\tau, \tau)B_0 \subseteq B_1$, 其中 $\mathcal{T}$ 由引理 3.2 中定义.

证明 作内积 $\langle (3.2), (-\Delta u, -\Delta v) \rangle$ 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + d_1 \|\Delta u\|^2 + d_2 \|\Delta v\|^2 \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \alpha v \Delta u - \gamma uv \Delta u + u^3 \Delta u - f_1 \Delta u - u \Delta v - \beta |\nabla v|^2 - f_2 \Delta v) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \frac{d_1}{2} |\Delta u|^2 + \frac{2\alpha^2}{d_1} v^2 + \frac{\gamma^2}{d_1} (u^4 + v^4) + \frac{f_1^2}{d_1} + \frac{u^2}{d_2} + \frac{d_2}{2} |\Delta v|^2 - \beta |\nabla v|^2 + \frac{f_2^2}{d_2} \right) dx. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + d_1 \|\Delta u\|^2 + d_2 \|\Delta v\|^2 + \beta \|\nabla v\|^2 \\ &\leq 2\|\nabla u\|^2 + \left(\frac{2}{d_2} + \frac{4\alpha^2}{d_1} \right) (\|u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{2\gamma^2}{d_1} (\|u\|_{L^4}^4 + \|v\|_{L^4}^4) \\ &\quad + \left(\frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_2} \right) (\|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

根据引理 3.2 可知, 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\tau} \in B_0$, 当 $t \geq \mathcal{T}(\|B_0\|)$ 时,

$$\|u(t+\tau)\|^2 + \|v(t+\tau)\|^2 \leq r_0^2.$$

结合 (3.1) 可得, 当 $t \geq \mathcal{T}(\|B_0\|) + \tau$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) &\leq (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \left(2 + \frac{2\gamma^2 b_0^4}{d_1} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \right) \\ &\quad + \left(\frac{2}{d_2} + \frac{4\alpha^2}{d_1} \right) r_0^2 + \left(\frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_2} \right) (\|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

令 $b_6 = \min\{2d_1, 2cd_2\}$, $b_7 = \frac{3b_5 r_0^2}{2b_6}$, $b_8 = 2 + \frac{3\gamma^2 b_0^4 b_5 r_0^2}{d_1 b_6}$ 及 $b_9 = \left(\frac{2}{d_2} + \frac{4\alpha^2}{d_1} \right) r_0^2 + \left(\frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_2} \right) (\|f_1\|_{L_b^2}^2 + \|f_2\|_{L_b^2}^2)$, 由 (3.4) 和 (3.6) 得, 当 $t \geq \mathcal{T}(\|B_0\|) + \tau$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+1} (\|\nabla u(s)\|^2 + \|\nabla v(s)\|^2) ds \leq b_7, \\ & \int_t^{t+1} \left(2 + \frac{2\gamma^2 b_0^4}{d_1} (\|\nabla u(s)\|^2 + \|\nabla v(s)\|^2) \right) ds \leq b_8, \\ & \int_t^{t+1} \left(\left(\frac{2}{d_2} + \frac{4\alpha^2}{d_1} \right) r_0^2 + \left(\frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_2} \right) (\|f_1(s)\|^2 + \|f_2(s)\|^2) \right) ds \leq b_9. \end{aligned}$$

对 (3.8) 应用一致 Gronwall 引理 (参见文献 [1, 第 III 章]) 得, 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\tau} \in B_0$, 有

$$\|\nabla u(t+\tau)\|^2 + \|\nabla v(t+\tau)\|^2 \leq r_1^2, \quad t \geq T_1 = \mathcal{T}(\|B_0\|) + 1,$$

其中 $r_1 := \sqrt{(b_7 + b_9)e^{b_8}}$, 故对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 当 $t \geq \mathcal{T}(\|B_0\|) + 1$ 时, $U(t+\tau, \tau)B_0 \subseteq B_1$. $\square$

由引理 3.2、3.3 和文献 [8] 中第 VIII 章的定理 1.2 可得过程 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 在 H 中的拉回吸引子的存在性.

定理 3.1 系统 (3.2) 的解映射生成的连续过程 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 在 H 中有一个拉回吸引子 $\{\mathcal{K}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ 满足:

- (i) 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\mathcal{K}(t) \subseteq B_0$ 是紧的;
- (ii) 不变性: 对所有 $-\infty < \tau \leq t < \infty$, $U(t, \tau)\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(t)$;
- (iii) 拉回吸引性: 对任意有界集 $B \subset H$ 和 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} d_h(U(t, t - \tau)B, \mathcal{K}(t)) = 0.$$

下面利用定理 2.1 证明连续过程 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 的拉回指数吸引子的存在性及其连续性.

令 $\bar{A} = -\Delta$, $D(\bar{A}) = H^2(U) \cap H_0^1(U)$, 那么 $\bar{A}$ 是自伴正定线性算子且其特征值 $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 满足

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots, \quad \text{当 } m \rightarrow +\infty \text{ 时, } \lambda_m \rightarrow +\infty. \quad (3.9)$$

令 $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset D(\bar{A})$ 是算子 $\bar{A}$ 的特征值 $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 对应的特征向量, 即当 $j \in \mathbb{N}$ 时, $\bar{A}e_j = \lambda_j e_j$, 那么 $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 是 $L^2(U)$ 的正交基. 设

$$L_n^2(\Omega) = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad (L_n^2(\Omega))^\perp = \text{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

那么 $L_n^2(\Omega) \times L_n^2(\Omega)$ 是 H 中的一个 $2n$ - 维子空间. 令

$$P_n : H \rightarrow L_n^2(\Omega) \times L_n^2(\Omega), \quad Q_n = I - P_n : H \rightarrow (L_n^2(\Omega))^\perp \times (L_n^2(\Omega))^\perp \quad (3.10)$$

是正交投射, 那么对于 $\varphi = (u, v) \in E$, $\varphi_{nq} = Q_n \varphi = (u_{nq}, v_{nq}) \in (L_n^2(\Omega))^\perp \times (L_n^2(\Omega))^\perp$, 有

$$\lambda_{n+1} \|u_{nq}\|^2 \leq \|\nabla u_{nq}\|^2. \quad (3.11)$$

对任意 $t \in \mathbb{R}$, 设

$$Y(t) = \bigcup_{s \geq 2T(\|B_0\|)+1} U(t, t-s)B_0,$$

则根据引理 3.2 和 3.3 可知, $Y(t) \subseteq B_0 \cap B_1 \subseteq E$, 其中 $B_0 \subset H$ 和 $B_1 \subset E$ 分别是由引理 3.2 和 3.3 所定义. 由映射 $U(t, \tau)$ ($t \geq \tau$) 的连续性、引理 3.2 和 3.3 可得

$$U(t, s)Y(s) \subseteq Y(t) \subseteq B_0 \cap B_1 \subseteq E, \quad U(t, s)\overline{Y(s)} \subseteq \overline{Y(t)} \subseteq H, \quad t \geq s, \quad (3.12)$$

“ $\bar{\cdot}$ ”表示在 H 中取闭包. 连续过程 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 在 $Y(t)$ 上具有下列性质.

引理 3.4 (1) 存在连续的正值函数 $L(t)$ 使得对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, 有

$$\|U(t + \tau, \tau)\varphi_\tau - U(t + \tau, \tau)\psi_\tau\| \leq L(t)\|\varphi_\tau - \psi_\tau\|, \quad \forall \varphi_\tau, \psi_\tau \in Y(\tau);$$

(2) 存在正常数 $T^* > 0$, $\epsilon \in [0, \frac{1}{2})$ 和一个 $2N$ - 维正交投射 $P_N : H \rightarrow H_N = L_N^2(\Omega) \times L_N^2(\Omega)$ ($N \in \mathbb{N}$) 使得对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi_\tau, \psi_\tau \in Y(\tau)$, 有

$$\|(I - P_N)(U(\tau + T^*, \tau)\varphi_\tau - U(\tau + T^*, \tau)\psi_\tau)\| \leq \epsilon\|\varphi_\tau - \psi_\tau\|;$$

(3) 对每个固定 $\tau \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{t \rightarrow \tau} \sup_{\phi_\tau \in Y(\tau)} \|U(t, \tau)\phi_\tau - \phi_\tau\| = 0$.

证明 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 和初值 $\varphi_\tau, \psi_\tau \in Y(\tau)$, 令

$$\varphi(t) = U(t, \tau)\varphi_\tau = (u_1(t), v_1(t)), \quad \psi(t) = U(t, \tau)\psi_\tau = (u_2(t), v_2(t)).$$

由 (3.12) 得

$$\|\varphi(t)\| \leq r_0, \quad \|\psi(t)\| \leq r_0, \quad \|\nabla\varphi(t)\| \leq r_1, \quad \|\nabla\psi(t)\| \leq r_1, \quad \forall t \geq \tau.$$

设 $\phi(t) = \varphi(t) - \psi(t) = (\xi(t), \eta(t))$, 那么 $\varphi(t), \psi(t), \phi(t) \in \mathcal{C}([\tau, \infty); H) \cap L^2_{\text{loc}}((\tau, \infty); E)$, 且 $\phi(t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t} = A\phi + f(\varphi) - f(\psi), & t \geq \tau, \\ \phi(\tau) = \phi_\tau \in H, \end{cases} \quad (3.13)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} d_1\Delta & 0 \\ 0 & d_2\Delta \end{pmatrix}, \quad f(\varphi) - f(\psi) = \begin{pmatrix} \xi - \alpha\eta + \gamma(u_1v_1 - u_2v_2) - (u_1^3 - u_2^3) \\ \xi - \beta\eta \end{pmatrix}.$$

(1) 作内积 $\langle (3.13), \phi \rangle$ 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|^2 + d_1 \|\nabla\xi\|^2 + d_2 \|\nabla\eta\|^2 = \langle f(\varphi) - f(\psi), \phi \rangle,$$

其中

$$\begin{aligned} & \langle f(\varphi) - f(\psi), \phi \rangle \\ &= \int_{\Omega} (\xi^2 - \beta\eta^2 + (1 - \alpha)\xi\eta + \gamma(u_1v_1 - u_2v_2)\xi - (u_1^3 - u_2^3)\xi) dx \\ &\leq \|\xi\|^2 + \frac{1+\alpha}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) + \int_{\Omega} (\gamma(u_1v_1 - u_1v_2 + u_1v_2 - u_2v_2)\xi - (u_1^2 + u_2^2 + u_1u_2)\xi^2) dx \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) + \int_{\Omega} (\gamma u_1\eta\xi + \gamma v_2\xi^2) dx \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) + \int_{\Omega} \left(\frac{d_1}{2b_0^4r_1^2} (u_1^2\xi^2 + v_2^2\xi^2) + \frac{b_0^4r_1^2}{2d_1} \gamma^2 (\xi^2 + \eta^2) \right) dx \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) + \frac{d_1}{2b_0^4r_1^2} (\|u_1\|_{L^4}^2 \|\xi\|_{L^4}^2 + \|v_2\|_{L^4}^2 \|\xi\|_{L^4}^2) + \frac{b_0^4r_1^2\gamma^2}{2d_1} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) + \frac{d_1}{2r_1^2} (\|\nabla u_1\|^2 \|\nabla\xi\|^2 + \|\nabla v_2\|^2 \|\nabla\xi\|^2) + \frac{b_0^4r_1^2\gamma^2}{2d_1} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) \\ &\leq \left(\frac{3+\alpha}{2} + \frac{b_0^4r_1^2\gamma^2}{2d_1} \right) \|\phi\|^2 + d_1 \|\nabla\xi\|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

取 $b_{10} = 3 + \alpha + \frac{b_0^4r_1^2\gamma^2}{d_1}$, 则有

$$\frac{d}{dt} \|\phi\|^2 \leq b_{10} \|\phi\|^2. \quad (3.15)$$

对 (3.15) 在 $[\tau, \tau + t]$ ($t \geq 0$) 上应用 Gronwall 不等式可得

$$\|\phi(t + \tau)\|^2 \leq e^{b_{10}t} \|\phi_\tau\|^2, \quad (3.16)$$

即

$$\|\phi(\tau+t)\| = \|\varphi(\tau+t) - \psi(\tau+t)\| \leq L(t)\|\varphi_\tau - \psi_\tau\|, \quad L(t) = e^{\frac{b_{10}t}{2}}, \quad t \geq 0.$$

(2) 对 (3.13) 和 $\phi_{nq} = Q_n\phi = (\xi_{nq}, \eta_{nq})$ 作内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi_{nq}\|^2 + d_1 \|\nabla \xi_{nq}\|^2 + d_2 \|\nabla \eta_{nq}\|^2 = \langle f(\varphi) - f(\psi), \phi_{nq} \rangle, \quad (3.17)$$

其中

$$\begin{aligned} \langle f(\varphi) - f(\psi), \phi_{nq} \rangle &= \int_{\Omega} (\xi \xi_{nq} - \alpha \eta \xi_{nq} + \xi \eta_{nq} - \beta \eta \eta_{nq} + \gamma(u_1 v_1 - u_2 v_2) \xi_{nq} - (u_1^3 - u_2^3) \xi_{nq}) dx \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi_{nq}\|^2 + \|\eta_{nq}\|^2) + \int_{\Omega} (\gamma u_1 \eta \xi_{nq} + \gamma v_2 \xi \xi_{nq} - (u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2) \xi \xi_{nq}) dx \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi_{nq}\|^2 + \|\eta_{nq}\|^2) + \gamma \|u_1\|_{L^4} \|\eta\| \|\xi_{nq}\|_{L^4} + \gamma \|v_2\|_{L^4} \|\xi\| \|\xi_{nq}\|_{L^4} \\ &\quad + \|u_1\|_{L^6}^2 \|\xi\| \|\xi_{nq}\|_{L^6} + \|u_2\|_{L^6}^2 \|\xi\| \|\xi_{nq}\|_{L^6} + \|u_1\|_{L^6} \|u_2\|_{L^6} \|\xi\| \|\xi_{nq}\|_{L^6} \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi_{nq}\|^2 + \|\eta_{nq}\|^2) + \gamma b_0^2 \|\nabla u_1\| \|\eta\| \|\nabla \xi_{nq}\| + \gamma b_0^2 \|\nabla v_2\| \|\xi\| \|\nabla \xi_{nq}\| \\ &\quad + b_0^3 \|\nabla u_1\|^2 \|\xi\| \|\nabla \xi_{nq}\| + b_0^3 \|\nabla u_2\|^2 \|\xi\| \|\nabla \xi_{nq}\| + b_0^3 \|\nabla u_1\| \|\nabla u_2\| \|\xi\| \|\nabla \xi_{nq}\| \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi_{nq}\|^2 + \|\eta_{nq}\|^2) + \gamma b_0^2 r_1 \|\eta\| \|\nabla \xi_{nq}\| + \gamma b_0^2 r_1 \|\xi\| \|\nabla \xi_{nq}\| + 3b_0^3 r_1^2 \|\xi\| \|\nabla \xi_{nq}\| \\ &\leq \frac{3+\alpha}{2} (\|\xi_{nq}\|^2 + \|\eta_{nq}\|^2) + \frac{d_1}{2} \|\nabla \xi_{nq}\|^2 + \frac{2\gamma^2 b_0^4 r_1^2}{d_1} (\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) + \frac{9b_0^6 r_1^4}{d_1} \|\xi\|^2 \\ &\leq \left(\frac{3+\alpha}{2} + \frac{2\gamma^2 b_0^4 r_1^2}{d_1} + \frac{9b_0^6 r_1^4}{d_1} \right) (\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) + \frac{d_1}{2} \|\nabla \xi_{nq}\|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

令 $b_{11} = 3 + \alpha + \frac{4\gamma^2 b_0^4 r_1^2}{d_1} + \frac{18b_0^6 r_1^4}{d_1}$, 结合 (3.16)–(3.18) 可得

$$\frac{d}{dt} \|\phi_{nq}(t)\|^2 + d_1 \|\nabla \xi_{nq}(t)\|^2 + 2d_2 \|\nabla \eta_{nq}(t)\|^2 \leq b_{11} e^{b_{10}(t-\tau)} \|\phi_\tau\|^2.$$

取 $d = \min\{d_1, 2d_2\}$, 由 (3.11) 得

$$\frac{d}{dt} \|\phi_{nq}(t)\|^2 + d\lambda_{n+1} \|\phi_{nq}\|^2 \leq b_{11} e^{b_{10}(t-\tau)} \|\phi_\tau\|^2. \quad (3.19)$$

对 (3.19) 从 τ 到 $\tau+t$ 应用 Gronwall 不等式可得, 当 $t \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \|\phi_{nq}(\tau+t)\|^2 &\leq \left(e^{-d\lambda_{n+1}t} + b_{11} \int_{\tau}^{\tau+t} e^{-d\lambda_{n+1}(t+\tau-s)+b_{10}(s-\tau)} ds \right) \|\phi_\tau\|^2 \\ &= \left(e^{-d\lambda_{n+1}t} + b_{11} \int_0^t e^{-d\lambda_{n+1}(t-s)+b_{10}s} ds \right) \|\phi_\tau\|^2 \\ &\leq \left(e^{-d\lambda_{n+1}t} + \frac{b_{11}e^{b_{10}t}}{d\lambda_{n+1} + b_{10}} \right) \|\phi_\tau\|^2. \end{aligned}$$

由 (3.9) 可得, 存在一个正常数 $T^* > 0$ 以及

$$N = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : e^{-d\lambda_{n+1}T^*} + \frac{b_{11}e^{b_{10}T^*}}{d\lambda_{n+1} + b_{10}} < \frac{1}{4} \right\} \quad (3.20)$$

使得

$$\epsilon = \sqrt{e^{-d\lambda_{N+1}T^*} + \frac{b_{11}e^{b_{10}T^*}}{d\lambda_{N+1} + b_{10}}} < \frac{1}{2}. \quad (3.21)$$

(3) 由 (3.7) 得, 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 和初值 $\varphi_\tau \in Y(\tau)$, 有

$$\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + d_1\|\Delta u\|^2 + d_2\|\Delta v\|^2 \leq b_{12} + b_{13}(\|f_1(t)\|^2 + \|f_2(t)\|^2), \quad (3.22)$$

其中 $b_{12} = 2r_1^2 + (\frac{2}{d_2} + \frac{4\alpha^2}{d_1})r_0^2 + \frac{2\gamma^2b_0^4r_1^4}{d_1}$, $b_{13} = \frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_2}$.

取 $b_{14} = r_1^2 + b_{12} + b_{13}(\|f_1\|_{L_b^2}^2 + \|f_2\|_{L_b^2}^2)$ 及 $t \in [\tau, \tau + 1]$, 对 (3.22) 在 $[\tau, t]$ 上积分得

$$\begin{aligned} & \int_\tau^t (d_1\|\Delta u(s)\|^2 + d_2\|\Delta v(s)\|^2) ds \\ & \leq (\|\nabla u(\tau)\|^2 + \|\nabla v(\tau)\|^2) + b_{12}(t - \tau) + b_{13} \int_\tau^t (\|f_1(s)\|^2 + \|f_2(s)\|^2) ds \\ & \leq b_{14}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

令 $t \in [\tau, \tau + 1]$, 对 (3.2) 在 $[\tau, t]$ 上积分有

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_\tau^t (A\varphi(s) + f(\varphi(s)) + (f_1(x, s), f_2(x, s))) ds.$$

记 $b_{15} = 2(d_1^{\frac{1}{2}} + d_2^{\frac{1}{2}})b_{14}^{\frac{1}{2}}$, 由 (3.23) 得

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi(\tau)\| &= \left\| \int_\tau^t (A\varphi(s) + f(\varphi(s)) + (f_1(x, s), f_2(x, s))) ds \right\| \\ &\leq \int_\tau^t \|A\varphi(s)\| ds + \int_\tau^t (\|f(\varphi(s))\| + \|(f_1(x, s), f_2(x, s))\|) ds \\ &\leq \int_\tau^t (d_1\|\Delta u(s)\| + d_2\|\Delta v(s)\|) ds + \int_\tau^t (\|f(\varphi(s))\| + \|(f_1(x, s), f_2(x, s))\|) ds \\ &\leq \left(\int_\tau^t ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\tau^t d_1^2 \|\Delta u(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\tau^t ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\tau^t d_2^2 \|\Delta v(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \int_\tau^t (\|f(\varphi(s))\| + \|(f_1(x, s), f_2(x, s))\|) ds \\ &\leq b_{15}(t - \tau)^{\frac{1}{2}} + \int_\tau^t (\|f(\varphi(s))\| + \|(f_1(x, s), f_2(x, s))\|) ds. \end{aligned}$$

于是对每一个固定 $\tau \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \sup_{\varphi_\tau \in Y(\tau)} \|\varphi(t) - \varphi(\tau)\| \leq \lim_{t \rightarrow \tau} \sup_{\varphi_\tau \in Y(\tau)} \left(b_{15}(t - \tau)^{\frac{1}{2}} + \int_\tau^t (\|f(\varphi(s))\| + \|(f_1(x, s), f_2(x, s))\|) ds \right) = 0.$$

证毕. □

由引理 3.1–3.4、定理 2.1 和 3.1 直接可得以下结果.

定理 3.2 连续过程 $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ 有一个拉回指数吸引子 $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ 满足:

(1) 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, 有 $\mathcal{K}(\tau) \subseteq \mathcal{A}(\tau) \subseteq \overline{Y(\tau)} \subseteq B_0$;

(2) $\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \dim_f \mathcal{A}(\tau) \leq \frac{\ln N_\theta^*}{-\ln a_\theta^*}$, 其中 $a_\theta^* = 2(\epsilon + \theta L(T^*))$, $\theta = \frac{1-2\epsilon}{4L(T^*)}$, $N_\theta^* \leq ([\frac{\sqrt{2N}}{2\theta}] + 1)^{2N}$ 是 H 中半径为 θ 覆盖 $L_N^2(\Omega) \times L_N^2(\Omega)$ 中闭单位球 $B_N(0, 1)$ 的闭球的极少个数; T^* 、 N 和 ϵ 在 (3.20) 和 (3.21) 中定义.

(3) 对任意有界集 $B \subset H$, 当 $t > \mathcal{T}(\|B\|) + \mathcal{T}(\|B_0\|) + 1$ 时,

$$d_h(U(\tau, \tau - t)B, \mathcal{A}(\tau)) \leq \frac{2L(T^*)r_0}{(a_\theta^*)^2} e^{\frac{\ln a_\theta^*}{T^*}(t - (\mathcal{T}(\|B\|) + \mathcal{T}(\|B_0\|) + 1))};$$

(4) $\lim_{t \rightarrow s} d_h(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}(s)) = 0$, $-\infty < s < \infty$.

4 系统 (1.2) 的一致指数吸引子

非自治系统 (1.2) 可写成下面的向量形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi + f(\varphi) + g^*(x, \sigma, t), & t \geq \tau, \\ \varphi(\tau) = \varphi_\tau = (u_\tau, v_\tau) \in H, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 A 和 f 如 (3.2) 定义, $g^*(x, \sigma, t) = (h_1(x)g_1(\tilde{\sigma}(t)), h_2(x)g_2(\tilde{\sigma}(t)))^T$.

下面定理关于系统 (4.1) 在 H 中的一致吸引子的存在性.

定理 4.1 (1) 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi(\tau) = (u_\tau, v_\tau) \in H$ 和 $\sigma \in \mathbb{T}^m$, 系统 (4.1) 有唯一解 $\varphi(t) = (u(t), v(t)) \in \mathcal{C}([\tau, \infty); H) \cap L^2((\tau, \infty); E)$, $t \geq \tau$. 此解可生成 H 上的连续过程族 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$: $U^\sigma(t, \tau) : \varphi(\tau) \mapsto \varphi(t)$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{T}^m$.

(2) 过程族 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 有一致吸收闭球 $\mathcal{B} = B(0, R_0) \subset H$, 其中 $R_0 = \sqrt{\frac{2b_{16}}{b_1 b_4}}$ (与 $\sigma \in \mathbb{T}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$ 都无关), $b_{16} = b_2 + \frac{mk_1^2 \pi^2 \|h_1\|^2}{2} + \frac{16\gamma^2 mk_2^2 \pi^2 \|h_2\|^2}{3\beta^2}$; 也就是说, 对任意有界集 $B \subseteq H$, 存在只与 B 和 $\mathcal{B}$ 有关的时间 $t_{B, \mathcal{B}} \geq 0$ 使得, 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \in \mathbb{T}^m$, 当 $t \geq t_{B, \mathcal{B}}$ 时, $U^\sigma(t + \tau, \tau)B \subseteq \mathcal{B}$. 特别地, 存在只与 $\mathcal{B}$ 有关的时间 $t_{\mathcal{B}} > 0$ 使得, 对任意 $\sigma \in \mathbb{T}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$, 当 $t \geq t_{\mathcal{B}}$ 时, $U^\sigma(t + \tau, \tau)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$.

(3) 存在闭球 $\mathcal{B}_1 = \{\varphi \in E : \|\varphi\|_E \leq R_1\} \subseteq E$ (R_1 是与 τ 和 t 无关的正常数) 使得, 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{T}^m$, 当 $t \geq t_{\mathcal{B}} + 1$ 时, $U^\sigma(t + \tau, \tau)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$.

(4) 设 $\tilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{T}^m} \bigcup_{t \geq 2t_{\mathcal{B}} + 1} U^\sigma(t, 0)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{B}_1$. 过程族 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 有一个一致吸引子 $\tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ 满足 (i) $\tilde{\mathcal{A}}$ 是闭的; (ii) 对任意固定 $\tau \in \mathbb{R}$ 和任意有界集 $B \subseteq H$, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\sigma \in \mathbb{T}^m} d_h(U^\sigma(t, \tau)B, \tilde{\mathcal{A}}) = 0$; (iii) 从“包含”关系来说, $\tilde{\mathcal{A}}$ 是所有满足 (ii) 的最小闭集.

证明 (1) 令 $\tilde{F}(\varphi, \sigma, t) = f(\varphi) + g^*(x, \sigma, t)$, $\sigma \in \mathbb{T}^m$. 由于对任意 $\sigma \in \mathbb{T}^m$ 及 t 属于 $\mathbb{R}$ 中的任意有界集, 映射 $\tilde{F} : H \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R} \rightarrow H$ 关于 φ 是局部 Lipschitz 连续的, 故根据文献 [39] 中第 6 章定理 1.4 可得, 对任意初值 $\varphi(\tau) \in H$, (4.1) 有唯一的局部解 $\varphi(t) = (u(t), v(t)) \in \mathcal{C}([\tau, T]; H) \cap L^2((\tau, T); E)$, $T \geq \tau$. 如果解存在的最大时间 $T < \infty$, 那么 $\lim_{t \rightarrow T^-} \|\varphi(t)\| = +\infty$. 下面证明 $T = +\infty$.

取 $c = \frac{4\gamma^2}{\beta} > 0$. 作内积 $\langle (4.1), (u, cv) \rangle$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|^2 + c\|v\|^2) + d_1 \|\nabla u\|^2 + cd_2 \|\nabla v\|^2 \\ &= \int_{\Omega} (u^2 + (c - \alpha)uv + \gamma u^2 v - u^4 - c\beta v^2 + h_1(x)g_1(\tilde{\sigma}(t))u + ch_2(x)g_2(\tilde{\sigma}(t))v) dx. \end{aligned}$$

结合 (1.4)、(3.3)–(3.5) 和 Gronwall 不等式得, 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{T}^m$ 和 $t \geq 0$, 有

$$\|u(t + \tau)\|^2 + \|v(t + \tau)\|^2 \leq \frac{b_5}{b_4} e^{-b_1 t} (\|u(\tau)\|^2 + \|v(\tau)\|^2) + \frac{b_{16}}{b_1 b_4}. \quad (4.2)$$

故 $T = +\infty$, 由此可得 (4.1) 的解映射生成 H 上的连续过程族 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau} : U^\sigma(t, \tau)\varphi(\tau) = \varphi(t)$.

(2) 由 (4.2) 可得

$$\|\varphi(t + \tau)\|^2 \leq \frac{b_5 \|\varphi(\tau)\|^2}{b_4} e^{-b_1 t} + \frac{R_0^2}{2}, \quad t \geq 0,$$

这蕴含着 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 有一致吸收闭球 $\mathcal{B} = B(0, R_0)$.

(3) 根据引理 3.3 及其证明可得, 对任意 $\sigma \in \mathbb{T}^m, \tau \in \mathbb{R}, \varphi_\tau \in \mathcal{B}$, 有

$$\|\nabla u(t + \tau)\|^2 + \|\nabla v(t + \tau)\|^2 \leq R_1^2, \quad t \geq T_2 = t_{\mathcal{B}} + 1,$$

其中

$$R_1 := \sqrt{(b_{17} + b_{19})e^{b_{18}}}, \quad b_{17} = \frac{3b_5 R_0^2}{2b_6}, \quad b_{18} = 2 + \frac{3\gamma^2 b_0^4 b_5 R_0^2}{d_1 b_6},$$

$$b_{19} = \left(\frac{2}{d_2} + \frac{4\alpha^2}{d_1}\right) R_0^2 + \frac{2mk_1^2 \pi^2 \|h_1\|^2}{d_1} + \frac{2mk_2^2 \pi^2 \|h_2\|^2}{d_2}.$$

故对任意 $\sigma \in \mathbb{T}^m, \tau \in \mathbb{R}$, 当 $t \geq t_{\mathcal{B}} + 1$ 时, $U^\sigma(t + \tau, \tau)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subset E$.

(4) 由紧嵌入定理得 $\mathcal{B}_1$ 是 H 中的列紧集, 故由 (2) 和 (3) 得 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 是一致渐近紧的. 根据文献 [8] 中第 IV 章定理 3.1 可得 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 有一个一致吸引子 $\tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$. $\square$

下面利用定理 2.2 证明系统 (4.1) 的解确定的连续过程族 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^n, t \geq \tau \in \mathbb{R}}$ 存在一致指数吸引子.

对于 $\varphi^{(j)} \in \tilde{\mathcal{B}}, \sigma_j \in \mathbb{T}^m, j = 1, 2$, 以及 $t \geq 0$, 设 $\varphi^{(j)}(t) = U^{\sigma_j}(t, 0)\varphi^{(j)}(0) = (u^{(j)}(t), v^{(j)}(t))$ 是 (4.1) 的解 ($j = 1, 2$). 设 $\Phi(t) = \varphi^{(1)}(t) - \varphi^{(2)}(t) = U^{\sigma_1}(t, 0)\varphi^{(10)} - U^{\sigma_2}(t, 0)\varphi^{(20)} = (\xi(t), \eta(t))$, 由 (4.1) 得

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + f(\varphi^{(1)}) - f(\varphi^{(2)}) + g^*(x, \sigma_1, t) - g^*(x, \sigma_2, t), & t \geq 0, \\ \Phi(0) = \varphi^{(10)} - \varphi^{(20)}, \end{cases} \quad (4.3)$$

那么, 连续过程族 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^n, t \geq \tau \in \mathbb{R}}$ 在 $\tilde{\mathcal{B}}$ 上具有以下性质.

引理 4.1 设 $b_{20} = 5 + \alpha + \frac{b_0^4 R_1^2 \gamma^2}{d_1} + 2(k_1^2 \|h_1\|^2 + k_2^2 \|h_2\|^2)$, 则

- (1) $\|U^{\sigma_1}(t, 0)\varphi^{(10)} - U^{\sigma_2}(t, 0)\varphi^{(20)}\| \leq e^{\frac{b_{20}t}{2}} (\|\varphi^{(10)} - \varphi^{(20)}\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2)^{\frac{1}{2}}, t \geq 0;$
- (2) 存在 $\bar{T}^* > 0, M^* \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|Q_{M^*}(U^{\sigma_1}(\bar{T}^*, 0)\varphi^{(10)} - U^{\sigma_2}(\bar{T}^*, 0)\varphi^{(20)})\|^2 \leq \frac{1}{128} (\|\varphi^{(10)} - \varphi^{(20)}\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2),$$

其中 Q_{M^*} 是在 (3.10) 中定义的正交投射.

证明 (1) 作内积 $\langle (4.3), \Phi \rangle$ 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi\|^2 + d_1 \|\nabla \xi\|^2 + d_2 \|\nabla \eta\|^2 = \langle f(\varphi^{(1)}) - f(\varphi^{(2)}), \Phi \rangle + \langle g^*(x, \sigma_1, t) - g^*(x, \sigma_2, t), \Phi \rangle. \quad (4.4)$$

利用 (3.14) 得

$$\langle f(\varphi^{(1)}) - f(\varphi^{(2)}), \Phi \rangle \leq \left(\frac{3 + \alpha}{2} + \frac{b_0^4 R_1^2 \gamma^2}{2d_1} \right) \|\Phi\|^2 + d_1 \|\nabla \xi\|^2. \quad (4.5)$$

依据 (1.4) 有

$$\langle g^*(x, \sigma_1, t) - g^*(x, \sigma_2, t), \Phi \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (h_1(x)(g_1(\tilde{\sigma}_1(t)) - g_1(\tilde{\sigma}_2(t)))\xi + h_2(x)(g_2(\tilde{\sigma}_1(t)) - g_2(\tilde{\sigma}_2(t)))\eta) dx \\
&\leq (k_1^2 \|h_1\|^2 + k_2^2 \|h_2\|^2) \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2 + \|\Phi\|^2.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

由于 $\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2$ 与 t 无关, 故结合 (4.4)–(4.6) 可得, 当 $t \geq 0$ 时,

$$\frac{d}{dt} (\|\Phi(t)\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2) \leq b_{20} (\|\Phi(t)\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2). \tag{4.7}$$

对 (4.7) 应用 Gronwall 不等式得

$$\|\Phi(t)\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2 \leq e^{b_{20}t} (\|\Phi(0)\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2), \quad t \geq 0. \tag{4.8}$$

(2) 对 (4.3) 和 $\Phi_{nq} = Q_n \Phi = (\xi_{nq}, \eta_{nq})$ 作内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_{nq}\|^2 + d_1 \|\nabla \xi_{nq}\|^2 + d_2 \|\nabla \eta_{nq}\|^2 = \langle f(\varphi) - f(\psi), \Phi_{nq} \rangle + \langle g^*(x, \sigma_1, t) - g^*(x, \sigma_2, t), \Phi_{nq} \rangle. \tag{4.9}$$

根据 (3.18) 有

$$\langle f(\varphi) - f(\psi), \Phi_{nq} \rangle \leq \left(\frac{3+\alpha}{2} + \frac{2\gamma^2 b_0^4 R_1^2}{d_1} + \frac{9b_0^6 R_1^4}{d_1} \right) (\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) + \frac{d_1}{2} \|\nabla \xi_{nq}\|^2. \tag{4.10}$$

应用 (1.4) 得

$$\begin{aligned}
&\langle g^*(x, \sigma_1, t) - g^*(x, \sigma_2, t), \Phi_{nq} \rangle \\
&= \int_{\Omega} (h_1(x)(g_1(\tilde{\sigma}_1(t)) - g_1(\tilde{\sigma}_2(t)))\xi_{nq} + h_2(x)(g_2(\tilde{\sigma}_1(t)) - g_2(\tilde{\sigma}_2(t)))\eta_{nq}) dx \\
&\leq (k_1^2 \|h_1\|^2 + k_2^2 \|h_2\|^2) \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2 + \|\Phi\|^2.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

结合 (4.8)–(4.11) 得

$$\frac{d}{dt} \|\Phi_{nq}(t)\|^2 + d\lambda_{n+1} \|\Phi_{nq}\|^2 \leq b_{21} e^{b_{20}t} (\|\Phi(0)\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2) + b_{22} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2, \tag{4.12}$$

其中 $b_{21} = 5 + \alpha + \frac{4\gamma^2 b_0^4 R_1^2}{d_1} + \frac{18b_0^6 R_1^4}{d_1}$, $b_{22} = 2(k_1^2 \|h_1\|^2 + k_2^2 \|h_2\|^2)$.

对 (4.12) 从 0 到 t 积分得

$$\|\Phi_{nq}(t)\|^2 \leq \left(e^{-d\lambda_{n+1}t} + \frac{b_{21}e^{b_{20}t}}{d\lambda_{n+1} + b_{20}} + \frac{b_{22}}{d\lambda_{n+1}} \right) (\|\Phi(0)\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2).$$

由 (3.11) 可知, 存在时间常数 $\bar{T}^* > 0$ 和

$$M^* = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : e^{-d\lambda_{n+1}\bar{T}^*} + \frac{b_{21}e^{b_{20}\bar{T}^*}}{d\lambda_{n+1} + b_{20}} + \frac{b_{22}}{d\lambda_{n+1}} \leq \frac{1}{128} \right\} \tag{4.13}$$

使得

$$\|Q_{M^*}(U^{\sigma_1}(\bar{T}^*, 0)\varphi^{(10)} - U^{\sigma_2}(\bar{T}^*, 0)\varphi^{(20)})\|^2 \leq \frac{1}{128} (\|\varphi^{(10)} - \varphi^{(20)}\|^2 + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathbb{T}^m}^2).$$

证毕. □

由定理 2.2、4.1 和引理 4.1 可得到下面结果.

定理 4.2 连续过程族 $\{U^\sigma(t, \tau)\}_{\sigma \in \mathbb{T}^m, t \geq \tau}$ 在 $\bar{\mathcal{B}}$ 上有一个一致指数吸引子 $\mathcal{M} \subset \bar{\mathcal{B}}$ 满足:

- (1) $\mathcal{M}$ 是紧的;
 (2) $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{B}}$, 其中 $\tilde{\mathcal{A}}$ 是定理 4.1(4) 得到的一致吸引子;
 (3) $\mathcal{M}$ 有有限分形维数

$$\dim_f(\mathcal{M}) \leq K_0(m + 2M^*) \ln \sqrt{e^{b_{20}\bar{T}^*} + 1} + 1,$$

其中 K_0 是正常数, $\bar{T}^*$ 和 M^* 由 (4.13) 定义;

- (4) 存在两个正常数 a_1 和 a_2 使得当 $t \geq \tau$ ($\tau \in \mathbb{R}$) 时,

$$\sup_{\sigma \in \mathbb{T}^m} d_h(U^\sigma(t, \tau)\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{M}) \leq a_1 e^{-a_2(t-\tau)}.$$

参考文献

- 1 Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer, 1997
- 2 Tu J. Global attractors and robustness of the Boissonade system. J Dynam Differential Equations, 2015, 27: 187–211
- 3 Babin A V, Vishik M I. Attractors of Evolution Equations. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1992
- 4 Hale J K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. Providence: Amer Math Soc, 1998
- 5 Ladyzhenskaya O A. Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1991
- 6 Robinson J C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2001
- 7 Sell G R, You Y. Dynamics of Evolutionary Equations. New York: Springer, 2002
- 8 Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors for Equations of Mathematical Physics. Providence: Amer Math Soc, 2002
- 9 Arnold L. Random Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1998
- 10 Chueshov I. Monotone Random Systems Theory and Applications. New York: Springer-Verlag, 2002
- 11 Balibrea F, Caraballo T, Kloeden P E, et al. Recent developments in dynamical systems: Three perspectives. Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg, 2010, 20: 2591–2636
- 12 Eden A, Foias C, Nicolaenko B, et al. Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equation. Chichester: John Wiley & Sons, 1994
- 13 Efendiev M, Yamamoto Y, Yagi A. Exponential attractors for non-autonomous dissipative system. J Math Soc Japan, 2011, 63: 647–673
- 14 Fabrie P, Galusinski C, Miranville A, et al. Uniform exponential attractors for a singularly perturbed damped wave equation. Discrete Contin Dyn Syst, 2004, 10: 211–238
- 15 Galusinski C. Existence of uniform exponential attractors of a hyperbolic equation with damping. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1998, 326: 169–172
- 16 Galusinski C. Existence and continuity of uniform exponential attractors of the singularity perturbed Hodgkin-Huxley system. J Differential Equations, 1998, 144: 99–169
- 17 Li H. Uniform exponential attractors for non-autonomous strongly damped wave equations. J Appl Math Phys, 2014, 2: 783–794
- 18 Zhao M, Zhou S. Pullback and uniform exponential attractors for nonautonomous Boussinesq lattice system. Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg, 2015, 25: 1550100
- 19 Zhou S, Han X. Uniform exponential attractors for non-autonomous KGS and Zakharov lattice systems with quasiperiodic external forces. Nonlinear Anal, 2013, 78: 141–153
- 20 Zhou S, Zhao M. Uniform exponential attractor for second order lattice system with quasiperiodic external forces in weighted space. Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg, 2014, 24: 1450006
- 21 Bosia S, Gatti S. Pullback exponential attractor for a Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system in 2D. Dyn Partial Differ Equ, 2014, 11: 1–38
- 22 Carvalho A N, Sonner S. Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: Theoretical results. Commun Pure Appl Anal, 2012, 12: 3047–3071
- 23 Carvalho A N, Sonner S. Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: Properties and applications. Commun Pure Appl Anal, 2014, 13: 1141–1165
- 24 Czaja R, Efendiev M. Pullback exponential attractors for nonautonomous equations Part I: Semilinear parabolic problems. J Math Anal Appl, 2011, 381: 748–765

- 25 Czaja R, Efendiev M. Pullback exponential attractors for nonautonomous equations Part II: Applications to reaction-diffusion systems. *J Math Anal Appl*, 2011, 381: 766–780
- 26 Langa J A, Miranville A, Real J. Pullback exponential attractors. *Discrete Contin Dynam Syst*, 2010, 26: 1329–1357
- 27 Yan X, Qi W. Pullback exponential attractors for nonautonomous reaction-diffusion equations. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2015, 25: 1550063
- 28 Zhou S, Han X. Pullback exponential attractors for non-autonomous lattice systems. *J Dynam Differential Equations*, 2012, 24: 601–631
- 29 Shirikyan A, Zelik S. Exponential attractors for random dynamical systems and applications. *Stoch Partial Differ Equ Anal Comput*, 2013, 1: 241–281
- 30 Dufied V, Boissonade J. Dynamics of turing pattern monolayers close to onset. *Phys Rev E* (3), 1996, 53: 4883–4892
- 31 Murry J D. *Mathematical Biology*. New York: Springer, 2002
- 32 Turing A M. The chemical basis of morphogenesis. *Philos Trans R Soc B*, 1952, 237: 37–72
- 33 Fitz-Hugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys*, 1961, 1: 445–466
- 34 Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating axon. *Proc IRE*, 1962, 50: 2061–2070
- 35 Nagumo J, Yoshizawa S, Arimoto S. Bistable transmission lines. *IEEE Trans Circuit Theory*, 1965, 12: 400–412
- 36 Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. New York: Springer, 1983
- 37 Zhang Z, Huang J. Dynamics of stochastic Boissonade system on the time-varying domain. *Adv Difference Equ*, 2016, 2016: 141–164
- 38 Zhao M, Zhou S. Random attractor for stochastic Boissonade system with time-dependent deterministic forces and white noises. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2017, 22: 1683–1717
- 39 Pazy A. *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer, 1983

Pullback and uniform exponential attractor for non-autonomous Boissonade system

ZHOU ShengFan, ZHAO Min & XIANG XiaoLin

Abstract In this paper, we first improve the existing sufficient conditions for the existence of pullback and uniform exponential attractors for non-autonomous dynamical systems. Then we prove the existence, continuity and boundedness of fractal dimension of a pullback exponential attractor for Boissonade system effected by time-dependent forces. Finally, we prove the existence and boundedness of fractal dimension of a uniform exponential attractor for Boissonade system driven by quasi-periodic external forces.

Keywords non-autonomous dynamical systems, continuous process, Boissonade system, pullback exponential attractor, uniform exponential attractor

MSC(2010) 35B41, 37B55, 35K57, 37C45

doi: 10.1360/N012017-00062