带宽有限随机过程从过采样点的指数阶逼近

陈文健, 张海樟*

中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275

E-mail: wenjianchen66@gmail.com, zhhaizh2@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2014-01-21; 接受日期: 2014-07-24; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11222103 和 11101438) 资助项目

摘要 带宽有限的宽平稳随机过程的 Shannon 采样定理在 1957 年被建立起来. 从那以后, 关于它在其他随机过程的推广有广泛的研究. 然而, 直接截断 Shannon 级数收敛较慢. 特别地, 我们知道利用在 Nyquist 采样率下得到的 n 个采样点的截断级数的均方逼近误差的收敛速率是 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$. 本文我们考虑用有限的过采样点来重构带宽有限宽平稳随机过程, 其中过采样点是指连续两个采样点之间的距离小于 Nyquist 采样率. 我们研究了最优的线性重构算法和与其相关的本性逼近误差阶. 通过过采样, 我们发现线性重构算法可以达到指数阶衰减逼近, 并且我们还证明线性重构算法不可能有快于指数阶的衰减速率. 另外, 我们还构造了两个具体的指数阶衰减的重构算法.

关键词 带宽有限随机过程 过采样 本性逼近误差 指数衰减 可再生核

MSC (2010) 主题分类 62D05, 60G10

1 引言

本文的目的是建立指数阶逼近的从有限的过采样来重构带宽有限宽平稳随机过程的算法. 本文的出发点源自直接截断 Shannon 级数具有比较慢的收敛速率和过采样重构带宽有限确定性信号的最近的一些进展.

经典的 Shannon 采样定理^[1,2] 说明每个带宽有限的确定性信号可以用在 Nyquist 采样率下的等距节点的函数值完全恢复. 我们会在后面详细的讨论其细节. 我们用 $\mathcal{B}_\delta, \delta > 0$ 表示 Paley-Wiener 空间. 这个空间包括所有这样的函数: $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 并且 $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\delta, \delta]$. 我们定义 $L^1(\mathbb{R})$ 中的函数的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

可以由标准的对偶原理定义缓冲分布的 Fourier 变换^[3]. 带宽是 δ 的 Nyquist 采样率是 π/δ . 特别地, $\mathcal{B}_\pi$ 的 Nyquist 采样率是 1. 经典的 Shannon 采样公式是

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) \text{sinc}(t-j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{B}_\pi. \quad (1.1)$$

此级数在整个实数轴 $\mathbb{R}$ 上绝对和一致收敛. 其中, sinc 表示下面的 sinc 函数,

$$\text{sinc}(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

英文引用格式: Chen W J, Zhang H Z. Exponential approximation of bandlimited random processes from oversampling (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 167–182, doi: 10.1360/012014-70

实际情况下, 我们只能得到有限的局部采样值. 例如, 要重构 $\mathcal{B}_\pi$ 中的函数 f 在 $[0, 1)$ 内的值, 我们只能得到有限的采样数据 $f(J_n)$. 这里, $J_n := \{j \in \mathbb{Z} : -n+1 \leq j \leq n\}$. 在这种情况下, 我们很早就知道如果直接截断 Shannon 级数 (1.1), 会有收敛速度很慢的缺陷^[4-6]. 特别地, 存在某两个正常数 C_1, C_2 使得

$$\frac{C_1}{\sqrt{n}} \leq \sup \left\{ \left| f(t) - \sum_{j \in J_n} f(j) \operatorname{sinc}(t-j) \right| : t \in [0, 1], f \in \mathcal{B}_\pi, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1 \right\} \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}}.$$

带宽有限的宽平稳过程的 Shannon 采样定理以及它的推广已经被建立^[7-14]. 基于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程 $X = X(t, \omega)$ 称作是宽平稳的, 如果对每个 $t \in \mathbb{R}$ 有 $X(t, \cdot) \in L^2(\Omega, dP(\omega))$, 即

$$\|X(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))} := \left(\int_{\Omega} |X(t, \omega)|^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

并且它的自相关函数

$$R_X(t, \tau) = \int_{\Omega} X(t, \omega) \overline{X(\tau, \omega)} dP(\omega), \quad t, \tau \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

只依赖 $t - \tau$. 这说明

$$R_X(t, \tau) = R_X(t - \tau, 0).$$

我们经常把 $R_X(t, 0)$ 简写成 $R_X(t)$. 一个宽平稳随机过程称为是带宽有限的, 如果对某个 δ 有 $R_X \in \mathcal{B}_\delta$. 随机过程的 Shannon 采样定理首次在文献 [7] 中被证明, 即对于宽平稳随机过程 $X(t, \omega)$ 满足 $R_X \in \mathcal{B}_\pi$, 有

$$X(t, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} X(j, \omega) \operatorname{sinc}(t-j), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

上面的等式在均方意义下成立, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| X(t, \omega) - \sum_{j \in J_n} X(j, \omega) \operatorname{sinc}(t-j) \right|^2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

当我们利用在 Nyquist 采样率下得到的有限采样值时, 直接截断 Shannon 级数 (1.4) 仍然会导致很慢的重构速率. 我们知道 (1.5) 中的期望只有收敛速率 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ ^[8].

对于带宽有限的确定性信号, 利用过采样数据可以大幅度地提高收敛阶. 例如, 假设 $f \in \mathcal{B}_\delta$, $\delta < \pi$. 因为整数点的间距小于 π/δ , 所以整数点构成了过采样点. 我们用过采样点 $f(J_n)$ 以及下面的修改后的 Shannon 级数,

$$\sum_{j \in J_n} f(j) \operatorname{sinc}(t-j) \phi(t-j)$$

来重构 $f(t), t \in [0, 1)$. 如果令

$$\phi(t) := \operatorname{sinc}^m \left(\frac{\pi - \delta}{\pi m} t \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

进而优化参数 m , 文献 [5] 得出了下面的收敛阶,

$$\frac{C}{n(\pi - \delta)} \exp \left(- \frac{\pi - \delta}{e} n \right), \quad n \geq \frac{e}{\pi - \delta}. \quad (1.7)$$

如果选择 ϕ 为最优方差的 Gauss 函数, 文献 [15–17] 得到了收敛阶

$$C\sqrt{\frac{n}{\pi-\delta}}\exp\left(-\frac{\pi-\delta}{2}n\right), \quad n \geq \frac{8\pi}{(\pi-\delta)^3}.$$

通过优化权函数 ϕ , 文献 [6] 得到了下面的收敛阶,

$$\frac{C}{\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{\pi-\delta}{2}n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

最优的权函数可以选为样条函数 [18].

对于带宽有限的随机过程, 我们认为过采样也会带来指数阶的逼近速率. 本文主要来讨论这个问题. 采用下面的 Shannon 截断级数

$$\sum_{j \in J_n} X(j, \omega) \operatorname{sinc}(t-j)\phi(t-j). \quad (1.8)$$

然而, 直接利用文献 [5, 6, 15] 中的方法可能得不到满意的误差估计. 例如, 直接利用文献 [5] 中的结果, 我们得到了下面的收敛阶,

$$C\sqrt{\frac{\ln n}{n(\pi-\delta)}}\exp\left(-\frac{\pi-\delta}{2e}n\right).$$

比较这个收敛阶和 (1.7), 主要的指数项是退化的. 为了克服这个缺点, 在第 3 节中我们进行了详细的分析并且利用最优的样条权函数 [18] 得到了下面的收敛阶,

$$\sqrt{\frac{121}{200}}e^{5/4}\sqrt{2+\pi-\delta}\left(\frac{\ln n+1}{2n}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\pi-\delta}{2}n\right).$$

在给出两个具体算法的收敛阶估计之前, 我们在第 2 节主要讨论在过采样下逼近带宽有限的宽平稳过程的最优线性算法. 我们发现最优的线性算法是不切实际的, 因为它需要求解一个高度病态的线性方程组. 我们的主要目的是估计相应的本性逼近误差, 从而引导我们构造实际可行的重构算法. 这个问题与在一个可再生核 Hilbert 空间中的最优重构密切相关. 借助于可再生核的现有的结果, 我们给出了其上界估计和下界估计. 特别地, 下界估计说明不存在一个比指数衰减更快的线性重构算法.

2 最优线性重构与本性误差

本节考虑从有限的整数采样点的采样值来重构带宽为 $\delta < \pi$ 的宽平稳随机过程的最佳线性算法. 我们发现这个问题和一个可再生核 Hilbert 空间中函数的最优重构算法密切相关. 所以, 我们首先介绍可再生核和可再生核 Hilbert 空间的概念 [19].

函数 $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 称作是正定的, 如果对于任意有限的两两不同的点 $\mathcal{T} := \{t_j: 1 \leq j \leq n\} \subseteq \mathbb{R}$, $n \times n$ 矩阵

$$K[\mathcal{T}] := [K(t_j, t_k): 1 \leq j, k \leq n]$$

是共轭对称并且是半正定的. 一个 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的正定函数 K 唯一地确定一个可再生核 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_K$ 满足对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 有 $K(t, \cdot) \in \mathcal{H}_K$, 并且

$$f(t) = \langle f, K(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathcal{H}_K$ 中的内积. 由于上面的等式, K 也被称为 $\mathcal{H}_K$ 的可再生核. 可再生核被广泛地应用在机器学习领域^[20]. 除了用正定性来刻画可再生核, 对可再生核 K 的另一个刻画^[21] 是存在一个从 $\mathbb{R}$ 到某个 Hilbert 空间 $\mathcal{W}$ 的特征映射 Φ 满足

$$K(t, \tau) = \langle \Phi(t), \Phi(\tau) \rangle_{\mathcal{W}}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

一类典型的可再生核 Hilbert 空间就是 Paley-Wiener 空间 $\mathcal{B}_\delta$. 在内积

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{B}_\delta} := \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

下, $\mathcal{B}_\delta$ 是一个可再生核 Hilbert 空间, 其可再生核为

$$K_\delta(x, y) := \frac{\sin \delta(x - y)}{\pi(x - y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

显然有 $K_\pi(x, y) = \text{sinc}(x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. 注意到 $\{\text{sinc}(\cdot - j) : j \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{B}_\pi$ 的一组标准正交基就可以证明 Shannon 采样定理. 另外利用可再生性质 (2.1) 可以得到下面有用的 Parseval 等式

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(j)|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad f \in \mathcal{B}_\pi. \quad (2.3)$$

回到随机过程的情况, 因为存在特征映射 $\Phi(t) := X(t, \omega) \in L^2(\Omega, dP(\omega))$, 所以对于宽平稳随机过程 $X(t, \omega)$, R_X 是一个 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的可再生核. 并且, 因为有

$$R_X(t + s, \tau + s) = R_X(t, \tau), \quad s \in \mathbb{R},$$

所以它也是平移不变的. 根据 Bochner 定理^[22], 所有 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上连续的平移不变的可再生核 K 都可以表示为

$$K(t, \tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\xi} d\mu(\xi), \quad t, \tau \in \mathbb{R},$$

这里 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有限的正 Borel 测度. 由于我们现在处理的是带宽有限宽平稳随机过程, 所以有

$$R_X(t, \tau) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{i(t-\tau)\xi} \rho(\xi) d\xi, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

这里 ρ 是 $L^2([-\delta, \delta])$ 中的某个非负函数. 为了避免平凡的情况, 我们在这一节都假设 $\|\rho\|_{L^2([-\delta, \delta])} > 0$.

对于 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上一般的连续平移不变可再生核 K , 用有限采样值 $f(J_n)$ 来重构 $\mathcal{H}_K$ 中的函数 f 的最优重构算法在文献 [6] 中已经解决. 为了方便介绍结果, 我们用 $U(\mathcal{H}) := \{f \in \mathcal{H} : \|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ 来表示 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的单位闭球, 并用 $\mathbb{C}^{J_n}$ 来表示 J_n 上的所有的函数的集合. 我们的目的就是通过对采样值 $f(J_n)$ 来重构 f 在 $[0, 1]$ 上的函数值. 我们用最大值范数来度量重构误差. 因此, 一个可行的重构算子 $\mathcal{A}$ 应该将 $f(J_n)$ 映射到 $L^\infty([0, 1])$. 重构算子 $\mathcal{A}$ 的逼近误差定义为

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{A}, K) := \sup\{\|f - \mathcal{A}(f(J_n))\|_{L^\infty([0, 1])} : f \in U(\mathcal{H}_K)\}.$$

我们已经知道最优重构算子可以由最小范数插值来决定^[23, 24], 其逼近误差达到下面的本性逼近误差

$$\mathcal{E}_n(K) := \inf\{\mathcal{E}_n(\mathcal{A}, K) : \mathcal{A} \text{ 为所有从 } \mathbb{C}^{J_n} \text{ 到 } L^\infty([0, 1]) \text{ 的映射}\}.$$

在文献 [6] 中, 本性逼近误差被刻画为下面的最小范数插值,

$$\mathcal{E}_n(K) = \sup\{\|f\|_{L^\infty([0,1])} : f \in U(\mathcal{H}_K), f(J_n) = 0\}. \quad (2.5)$$

在这一节我们主要考虑利用采样值 $X(j, \omega)$, $j \in J_n$ 来重构带宽有限的随机过程 $X(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$ 的最优线性算法. 特别地, 对于 $t \in (0, 1)$, 我们希望寻找 $[0, 1]$ 上的系数函数 c_j , $j \in J_n$ 从而极小化

$$\left\| X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} c_j(t) X(j, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))}. \quad (2.6)$$

相应的本性逼近误差由

$$\sup \left\{ \left\| X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} c_j(t) X(j, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))} : t \in (0, 1) \right\}$$

来度量. 我们首先对最优系数和上面的本性误差做一个简单的考察. 假设 V 表示一个赋范线性空间, 并且 $x_0 \in V$ 和 $A \subseteq V$. 我们用 $\text{span } A$ 表示由 A 张成的线性子空间, 以及用

$$\text{dist}_V(x_0, \text{span } A)$$

表示 x_0 到 $\text{span } A$ 的距离.

命题 2.1 极小化 (2.6) 的最优系数函数 $\mathbf{c}(t) = (c_j(t) : j \in J_n)$ 为

$$\mathbf{c}(t) = (R_X(t, j) : j \in J_n)(R_X[J_n])^{-1}, \quad t \in (0, 1), \quad (2.7)$$

并且本性误差有下面的形式

$$\sup \left\{ \left\| X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} c_j(t) X(j, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))} : t \in (0, 1) \right\} = \mathcal{E}_n(R_X). \quad (2.8)$$

证明 显然, (2.8) 的极小值是 $X(t, \cdot)$ 到由 $X(j, \cdot), j \in J_n$ 张成的 $L^2(\Omega, dP(\omega))$ 中的线性子空间的距离. 根据 Hilbert 空间中的最佳逼近定理, 最优系数 c_j 由如下的正交条件所确定:

$$\left\langle X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} c_j(t) X(j, \cdot), X(k, \cdot) \right\rangle_{L^2(\Omega, dP(\omega))} = 0, \quad k \in J_n.$$

由 (1.3), 我们得到线性方程

$$\mathbf{c} R_X[J_n] = (R_X(t, j) : j \in J_n).$$

为了得到 (2.7), 还需要说明 $R_X(J_n)$ 是非奇异的. 下面我们通过证明它是严格正定的来说明这一点. 假设存在系数 $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j \in J_n$ 使得

$$\sum_{j \in J_n} \sum_{k \in J_n} \alpha_j \bar{\alpha}_k R_X(j, k) = 0.$$

由 (2.4) 可得

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \sum_{j \in J_n} \alpha_j e^{ij\xi} \right|^2 \rho(\xi) d\xi = 0.$$

所以, 解析函数

$$\varphi(z) := \sum_{j \in J_n} \alpha_j e^{ijz}, \quad z \in \mathbb{C}$$

必定在 ρ 的支撑集上为 0. 注意到 ρ 是非平凡的, 故其支撑集有正的 Lebesgue 测度. 因此, 就得到 φ 在整个复平面上为 0, 这就使得对所有的 $j \in J_n$, $\alpha_j = 0$.

通过选择 (2.7) 的最优系数, 对任意的 $t \in (0, 1)$, 我们得到

$$\left\| X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} c_j(t) X(j, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))} = (R_X(0) - (R_X(t, j) : j \in J_n)(R_X[J_n])^{-1}(R_X(j, t) : j \in J_n)^T)^{\frac{1}{2}}.$$

通过观察可知, 这也等于距离 $\text{dist}_{\mathcal{H}_{R_X}}(R_X(t, \cdot), \text{span}\{R_X(j, \cdot) : j \in J_n\})$. 下面仅需证明它等于下式:

$$\sup\{|f(t)| : f \in U(\mathcal{H}_{R_X}), f(J_n) = 0\}.$$

令 $f \in U(\mathcal{H}_{R_X})$ 满足 $f(J_n) = 0, j \in J_n$. 由 (2.1) 可得

$$\langle f, R_X(j, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}_{R_X}} = f(j) = 0, \quad j \in J_n.$$

因此, 对任意系数 $\alpha_j \in \mathbb{C}, j \in J_n$, 有

$$f(t) = \langle f, R_X(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}_{R_X}} = \left\langle f, R_X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} \alpha_j R_X(j, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{H}_{R_X}}.$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式, 我们得到

$$|f(t)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_{R_X}} \left\| R_X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} \alpha_j R_X(j, \cdot) \right\|_{\mathcal{H}_{R_X}} \leq \left\| R_X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} \alpha_j R_X(j, \cdot) \right\|_{\mathcal{H}_{R_X}}.$$

因为这对任意系数 $\alpha_j, j \in J_n$ 都成立, 我们有

$$\sup\{|f(t)| : f \in U(\mathcal{H}_{R_X}), f(J_n) = 0\} \leq \text{dist}_{\mathcal{H}_{R_X}}(R_X(t, \cdot), \text{span}\{R_X(j, \cdot) : j \in J_n\}).$$

另一方面, 令

$$f = \frac{R_X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} c_j(t) R_X(j, \cdot)}{\|R_X(t, \cdot) - \sum_{j \in J_n} c_j(t) R_X(j, \cdot)\|_{\mathcal{H}_{R_X}}}$$

即可得出等式成立. 证毕. $\square$

我们需要说明的是尽管上述命题给出了最优线性重构算法, 但在数值计算中还是有很大困难的. 这是因为核矩阵 $R_X[J_n]$ 的条件数随着 n 的增大会极其快速地增加. 下面的表格说明了这个现象, 其中再生核是由 (2.2) 定义的.

表 2.1 核矩阵 $K_\delta[J_n]$ 的条件数

	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
$\delta = \frac{3\pi}{4}$	1.86	15.5	248	4.98×10^3	1.08×10^5
$\delta = \frac{\pi}{2}$	4.50	2.19×10^3	1.84×10^6	1.75×10^9	1.76×10^{12}
$\delta = \frac{\pi}{3}$	10.6	2.51×10^5	7.06×10^9	2.23×10^{14}	5.13×10^{16}

本节的主要目的是估计本性误差 $\mathcal{E}_n(R_X)$, 以此来给出构造确定性线性重构算法的指导原则. 在下一节, 我们将给出两个具有指数衰减逼近误差的具体的重构算法.

为了估计 $\mathcal{E}_n(R_X)$, 我们需要两个引理. 第一个引理给出了 $\mathcal{E}_n(K_\delta)$ 的下界和上界估计, 该引理可以参考文献 [6].

引理 2.2 (参见文献 [6]) 对所有的 $\delta \leq \pi$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 如下的不等式成立,

$$\frac{5}{11e\sqrt{3\pi}} \frac{\delta}{2n+1} \left(\frac{\delta}{4}\right)^{2n} \leq \mathcal{E}_n(K_\delta) \leq \sqrt{2+\pi-\delta} \frac{\sqrt{3}e}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\pi-\delta}{2}n\right).$$

下面的引理是关于平移不变可再生核 Hilbert 空间之间的包含关系的刻画.

引理 2.3 (参见文献 [25]) 令 u, v 是 $L^1(\mathbb{R})$ 中的非负函数, K, G 由下式定义,

$$K(t, \tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\xi} u(\xi) d\xi, \quad G(t, \tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\xi} v(\xi) d\xi, \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

则 $\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}_G$ 成立当且仅当集合 $\{t \in \mathbb{R} : u(t) > 0, v(t) = 0\}$ 的 Lebesgue 测度为 0 且 u/v 在 $\{t \in \mathbb{R} : v(t) > 0\}$ 上的本性上界 λ 是有限的. 此时, 下式成立,

$$\|f\|_{\mathcal{H}_G} \leq \sqrt{\lambda} \|f\|_{\mathcal{H}_K}.$$

下面我们给出 $\mathcal{E}_n(R_X)$ 的上界估计.

定理 2.4 令 $\delta \leq \pi$ 并假设 (2.4) 中的函数 ρ 属于 $L^\infty([-\delta, \delta])$. 则对所有 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty([-\delta, \delta])} \sqrt{2+\pi-\delta} \frac{\sqrt{3}e}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{\pi-\delta}{2}n\right). \quad (2.9)$$

证明 我们注意到 K_δ 具有形式

$$K_\delta(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i(t-\tau)\xi} d\xi, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

由等式 (2.4) 和假设条件 $\rho \in L^\infty([-\delta, \delta])$ 并依据引理 2.3, 可得 $\mathcal{H}_{R_X} \subseteq \mathcal{H}_{K_\delta}$ 以及

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{K_\delta}} \leq \sqrt{2\pi} \|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty([-\delta, \delta])} \|f\|_{\mathcal{H}_{R_X}}, \quad f \in \mathcal{H}_{R_X}.$$

由此得到

$$U(\mathcal{H}_{R_X}) \subseteq \sqrt{2\pi} \|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty([-\delta, \delta])} U(\mathcal{H}_{K_\delta}). \quad (2.11)$$

联立 (2.11) 和 (2.5) 得到

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \sqrt{2\pi} \|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty([-\delta, \delta])} \mathcal{E}_n(K_\delta).$$

运用引理 2.2 中对 $\mathcal{E}_n(K_\delta)$ 的上界估计可得 (2.9). 证毕. $\square$

下面我们将给出对于更一般的 ρ , 即当 ρ 仅属于 $L^1([-\delta, \delta])$ 时的上界估计. 为了简化记号, 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 我们用 e_t 来表示复指数函数

$$e_t(\xi) := e^{it\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

引理 2.5 令 $\rho \in L^1([-\delta, \delta])$ 并令 R_X 有 (2.4) 中的形式. 则有

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \sup\{\text{dist}_{L^\infty([-\delta, \delta])}(e_t, \text{span}\{e_j : j \in J_n\}) : t \in (0, 1)\}. \quad (2.12)$$

证明 由命题 2.1 的证明得

$$\mathcal{E}_n(R_X) = \sup\{\text{dist}_{\mathcal{H}_{R_X}}(R_X(t, \cdot), \text{span}\{R_X(j, \cdot) : j \in J_n\}) : t \in (0, 1)\}.$$

直接计算可得

$$\text{dist}_{\mathcal{H}_{R_X}}(R_X(t, \cdot), \text{span}\{R_X(j, \cdot) : j \in J_n\}) = \text{dist}_{L^2([-\delta, \delta])}(\sqrt{\rho}e_t, \text{span}\{\sqrt{\rho}e_j : j \in J_n\}), \quad t \in (0, 1).$$

我们注意到

$$\begin{aligned} & \text{dist}_{L^2([-\delta, \delta])}(\sqrt{\rho}e_t, \text{span}\{\sqrt{\rho}e_j : j \in J_n\}) \\ & \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \text{dist}_{L^\infty([-\delta, \delta])}(e_t, \text{span}\{e_j : j \in J_n\}), \quad t \in (0, 1). \end{aligned}$$

因此, 引理得证. $\square$

根据引理 2.5, 我们需要估计 e_t , $t \in (0, 1)$ 到 $L^\infty([-\delta, \delta])$ 中线性子空间 $\text{span}\{e_j : j \in J_n\}$ 的距离. 下面我们通过截断一个级数来完成该估计. 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $a \in \mathbb{R}_+$, 令 $C_0^k([-a, a])$ 表示 $\mathbb{R}$ 上 k 阶连续可微且支撑在 $[-a, a]$ 上的函数空间.

引理 2.6 令 $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in C_0^k([-\pi + \delta, \pi - \delta])$ 且满足 $\hat{\phi}(0) = 1$. 则对任意 $t \in (0, 1)$ 有

$$e_t(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e_j(\xi) \text{sinc}(t - j) \overline{\hat{\phi}(t - j)}, \quad \xi \in [-\delta, \delta], \quad (2.13)$$

其中当 $\xi \in [-\delta, \delta]$ 时该级数绝对收敛.

证明 首先, 我们注意到对 $t \in (0, 1)$ 和 $|j| \geq 2$ 有

$$|\hat{\phi}(t - j)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\phi^{(k)}\|_{L^1([-\pi + \delta, \pi - \delta])} |t - j|^{-k}. \quad (2.14)$$

对任意 $t \in (0, 1)$ 级数

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} e_j \text{sinc}(t - j) \hat{\phi}(t - j)$$

定义了 $L^2([-\delta, \delta])$ 上的一个函数. 该函数与任意函数 $f \in L^2([-\delta, \delta])$ 做内积可得

$$\sqrt{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(j) \text{sinc}(t - j) \hat{\phi}(t - j).$$

根据文献 [6] 中的引理 4.1, 上式也等于

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(t) = \int_{-\delta}^{\delta} f(\xi) \overline{e_t(\xi)} d\xi.$$

所以, 在 $L^2([-\delta, \delta])$ 中有

$$e_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e_j \text{sinc}(t - j) \overline{\hat{\phi}(t - j)}.$$

因此, (2.13) 对几乎所有的 $\xi \in [-\delta, \delta]$ 均成立. 因为由 (2.14) 可知等式 (2.13) 两端都在 $[-\delta, \delta]$ 上连续, (2.13) 对所有的 $\xi \in [-\delta, \delta]$ 成立. 由 (2.14) 也可得 (2.13) 右端的级数对任意 ξ 绝对收敛. 证毕. $\square$

令 ϕ 是上述引理中描述的函数. 利用等式 (2.13) 可得

$$\text{dist}_{L^\infty([-\delta, \delta])}(e_t, \text{span}\{e_j : j \in J_n\}) \leq \sum_{j \notin J_n} |\text{sinc}(t - j)| |\hat{\phi}(t - j)|, \quad t \in (0, 1). \quad (2.15)$$

我们将要选择 Fourier 变换在无穷远处快速趋向于 0 的 ϕ . 依据 (2.14), 我们倾向于选择光滑性高的 ϕ . 然而, 随着 k 的增加, $\phi^{(k)}$ 的 L^1 范数也可能趋于无穷. 这个关键量的下确界在文献 [6] 中给出了精确的估计.

引理 2.7 令 $k \in \mathbb{N}$. 下式成立

$$\inf \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\phi^{(k)}\|_{L^1([-\pi+\delta, \pi-\delta])} : \phi \in C_0^k([-\pi+\delta, \pi-\delta]), \hat{\phi}(0) = 1 \right\} = \frac{2^{k-1}}{(\pi-\delta)^k} k!. \quad (2.16)$$

有了上面三个引理做准备, 我们下面可以对一般情形即当 $\rho \in L^1([-\delta, \delta])$ 时, 给出 $\mathcal{E}_n(R_X)$ 的上界估计.

定理 2.8 令 $\delta < \pi$. 假设 $\rho \in L^1([-\delta, \delta])$, 而 R_X 是 (2.4) 中形式. 则有

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \frac{11e}{10\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi-\delta}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi-\delta}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left(-\frac{\pi-\delta}{2} n \right), \quad n \geq \frac{4}{\pi-\delta}. \quad (2.17)$$

证明 令 $\phi \in C_0^k([-\pi+\delta, \pi-\delta])$ 满足 $\hat{\phi}(0) = 1$. 由引理 2.5, 2.6 和 (2.15) 式可得

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \sup_{t \in (0,1)} \sum_{j \notin J_n} |\operatorname{sinc}(t-j)| |\hat{\phi}(t-j)|.$$

由 (2.14) 可得对任意 $t \in (0, 1)$

$$\sum_{j \notin J_n} |\operatorname{sinc}(t-j)| |\hat{\phi}(t-j)| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \|\phi^{(k)}\|_{L^1([-\pi+\delta, \pi-\delta])} \sum_{j \notin J_n} \frac{1}{|t-j|^{k+1}}.$$

可用初等的数学分析证明 $\sum_{j \notin J_n} \frac{1}{|t-j|^{k+1}}$ 在区间 $[0, 1]$ 的最小值点为 $t = 0$ 和 $t = 1$. 因此, 对所有 $t \in (0, 1)$,

$$\sum_{j \notin J_n} \frac{1}{|t-j|^{k+1}} \leq \frac{1}{n^{k+1}} + 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^{k+1}} \leq \frac{1}{n^{k+1}} + 2 \int_n^{\infty} \frac{1}{s^{k+1}} ds = \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{k} \right) \frac{1}{n^k}.$$

结合上面三个式子得到

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \|\phi^{(k)}\|_{L^1([-\pi+\delta, \pi-\delta])} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{k} \right) \frac{1}{n^k}.$$

对上式右端关于所有满足 $\hat{\phi}(0) = 1$ 的 $\phi \in C_0^k([-\pi+\delta, \pi-\delta])$ 取下确界. 根据引理 2.7, 我们得到

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{k} \right) \frac{2^{k-1}}{(\pi-\delta)^k} k! \frac{1}{n^k}.$$

由 Stirling 公式

$$k! \leq \frac{11\sqrt{2\pi}}{10} \left(\frac{k}{e} \right)^k \sqrt{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.18)$$

可得

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \frac{11\sqrt{2k}}{10\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{2k}{ne(\pi-\delta)} \right)^k.$$

如果 $n \geq 4/(\pi-\delta)$, 我们令 $k = \lfloor \frac{n(\pi-\delta)}{2} \rfloor$, 这样就得到

$$\mathcal{E}_n(R_X) \leq \|\rho\|_{L^1([-\delta, \delta])}^{1/2} \frac{11e}{10\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi-\delta}}{2\sqrt{n}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n(\pi-\delta)}} \right) \exp \left(-\frac{\pi-\delta}{2} n \right).$$

证毕. $\square$

上界估计式 (2.9) 和 (2.17) 表明当 $\delta < \pi$ 时, 过采样的最优线性重构的本性误差 $\mathcal{E}_n(R_X)$ 是指数衰减的. 下面我们将证明在 ρ 的一个比较弱的假设条件下, 该本性误差趋于 0 的速度不可能比指数衰减快. 为了达到这个目的, 我们需要知道平移不变再生核 Hilbert 空间的结构. 这个可以参考文献 [26, 第 139 页]. 我们把该结论作为如下引理给出来.

引理 2.9 令 φ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 中的非负函数, K 是如下定义的再生核

$$K(t, \tau) := \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

则 $\mathcal{H}_K$ 由具有如下性质的函数组成: $f \in C(\mathbb{R})$, f 的 Fourier 变换属于 $L^1(\mathbb{R})$ 并且满足

$$\|f\|_{\mathcal{H}_K} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{f}(-\xi)|^2}{\varphi(\xi)} d\xi \right)^{1/2} < \infty.$$

定理 2.10 假设存在 $[a, b] \subseteq [-\delta, \delta]$ 和正数 m , 使得

$$\rho(\xi) \geq m, \quad \xi \in [a, b].$$

令 $\delta' := (b - a)/2$. 则对所有 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\mathcal{E}_n(R_X) \geq \frac{5\sqrt{2m}}{11e\sqrt{3}} \frac{\delta'}{2n+1} \left(\frac{\delta'}{4} \right)^{2n}. \quad (2.19)$$

证明 令

$$K(t, \tau) := \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{i(t-\tau)\xi} d\xi, \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

由引理 2.3 知, $\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}_{R_X}$ 并且对所有 $f \in \mathcal{H}_K$,

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{R_X}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \|f\|_{\mathcal{H}_K}.$$

类似定理 2.4 的证明可得

$$\mathcal{E}_n(K) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \mathcal{E}_n(R_X). \quad (2.20)$$

对 K 和 $K_{\delta'}$ 应用引理 2.9 可以看出

$$(Tf)(t) := e^{-i\frac{a+b}{2}t} f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

是 $\mathcal{H}_K$ 到 $\mathcal{H}_{K_{\delta'}}$ 的线性同构. 因为

$$\|Tf\|_{L^\infty((0,1))} = \|f\|_{L^\infty((0,1))}$$

且 $(Tf)(J_n) = 0$ 当且仅当 $f(J_n) = 0$, 由 (2.5) 可得

$$\mathcal{E}_n(K) = \mathcal{E}_n(K_{\delta'}). \quad (2.21)$$

结合 (2.20)、(2.21) 和引理 2.2 中对 $\mathcal{E}_n(K_{\delta'})$ 下界的估计, 可得 (2.19). 证毕. $\square$

3 具有指数衰减逼近误差的两个具体的重构算法

本节中, 我们给出两个具体的重构算法. 他们对带宽有限的宽平稳随机过程具有指数衰减逼近误差. 我们考虑 Shannon 截断级数 (1.8). 在第一个重构方法中, 我们将运用文献 [5] 中提出的乘子

$$g_m(t) := \operatorname{sinc}(t) \operatorname{sinc}^m\left(\frac{\pi - \delta}{\pi m} t\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}$$

和文献 [5] 中给出的如下的误差估计.

引理 3.1 存在绝对正常数 C 使得对所有的 $n \geq e/(\pi - \delta)$ 和 $m = \lfloor n(\pi - \delta)/e \rfloor$ 有

$$\sup \left\{ \left| f(t) - \sum_{j \in J_n} f(j) g_m(t - j) \right| : t \in (0, 1), f \in U(\mathcal{B}_\delta) \right\} \leq \frac{C}{n(\pi - \delta)} \exp \left(-\frac{\pi - \delta}{e} n \right). \quad (3.1)$$

我们的第一个重构算法定义为

$$(\mathcal{A}_1 X)(t, \omega) := \sum_{j \in J_n} X(j, \omega) g_m(t - j),$$

其中 $m = \lfloor n(\pi - \delta)/e \rfloor$. 算子 $\mathcal{A}_1$ 的整体逼近误差用如下的量来度量

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_1) := \sup \{ \|X(t, \cdot) - (\mathcal{A}_1 X)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))} : t \in (0, 1), R_X \in U(\mathcal{B}_\delta) \}.$$

下面我们将证明当 n 趋于无穷时, $\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_1)$ 指数衰减趋向于 0.

定理 3.2 存在正常数 C 使得对所有的 $n \geq \max\{e/(\pi - \delta), e^2\}$ 有

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_1) \leq C \sqrt{\frac{\ln n}{n(\pi - \delta)}} \exp \left(-\frac{\pi - \delta}{2e} n \right). \quad (3.2)$$

证明 由 (1.3) 计算得

$$\begin{aligned} & \|X(t, \omega) - (\mathcal{A}_1 X)(t, \omega)\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))}^2 \\ &= R_X(0) - \sum_{j \in J_n} R_X(t - j) g_m(t - j) - \sum_{j \in J_n} \left(R_X(j - t) - \sum_{k \in J_n} R_X(j - k) g_m(t - k) \right) g_m(t - j). \end{aligned}$$

令 $R_X \in U(\mathcal{B}_\delta)$. 则对任意 $u \in \mathbb{R}$, $R_X(u - \cdot) \in U(\mathcal{B}_\delta)$. 对 $R_X(t - \cdot)$ 应用引理 3.1 可得当 $n \geq e/(\pi - \delta)$ 时

$$\sup \left\{ \left| R_X(0) - \sum_{j \in J_n} R_X(t - j) g_m(t - j) \right| : t \in (0, 1) \right\} \leq \frac{C}{n(\pi - \delta)} \exp \left(-\frac{\pi - \delta}{e} n \right). \quad (3.3)$$

对每个 $R_X(j - \cdot), j \in \mathbb{Z}$ 应用引理 3.1 得到

$$\sup \left\{ \left| R_X(j - t) - \sum_{k \in J_n} R_X(j - k) g_m(t - k) \right| : t \in (0, 1) \right\} \leq \frac{C}{n(\pi - \delta)} \exp \left(-\frac{\pi - \delta}{e} n \right).$$

因此, 我们得到对任意 $t \in (0, 1)$,

$$\left| \sum_{j \in J_n} \left(R_X(j - t) - \sum_{k \in J_n} R_X(j - k) g_m(t - k) \right) g_m(t - j) \right| \leq \frac{C}{n(\pi - \delta)} \exp \left(-\frac{\pi - \delta}{e} n \right) \sum_{j \in J_n} |g_m(t - j)|. \quad (3.4)$$

注意到 sinc 是一致有界的, 1 就是它的一个界. 所以, 当 $t \in (0, 1)$ 和 $n \geq e^2$ 时,

$$\sum_{j \in J_n} |g_m(t-j)| \leq \sum_{j \in J_n} |\text{sinc}(t-j)| \leq C' \ln n, \quad (3.5)$$

其中 C' 是一个正常数. 结合 (3.3)–(3.5) 得到本定理的结论. 证毕. $\square$

相比确定信号的估计式 (3.1), (3.2) 的指数部分变的差了一些. 通过更仔细的分析, 我们将证明对带宽有限宽平稳随机过程, 我们可以得到和确定信号同样的最优指数衰减阶. 另外, 为了给出一个显式的具体的重构算法, 我们需要一个可以达到 (2.16) 中下确界的函数.

我们已经知道函数 $\phi \in C_0^{(k)}([-\pi + \delta, \pi - \delta])$ 不可能取到下确界 (2.16). 然而, 文献 [18] 中构造了一个样条函数 B_k , 该函数属于空间 $C_0^{(k-2)}([-\pi + \delta, \pi - \delta])$ 并且满足

$$|\widehat{B}_k(\xi)| \leq \frac{2^{k-1}k!}{(\pi - \delta)^k |\xi|^k}, \quad \xi \neq 0 \quad (3.6)$$

和

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) \text{sinc}(t-j) \widehat{B}_k(t-j), \quad \text{对所有的 } t \in \mathbb{R} \text{ 和 } f \in \mathcal{B}_\delta. \quad (3.7)$$

该样条函数由下式确定,

$$\widehat{B}_k(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\pi - \delta)\xi^k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \alpha_{kj} e^{-ix_{kj}(\pi - \delta)\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

其中

$$x_{kj} := \cos \frac{j\pi}{k}, \quad 0 \leq j \leq k$$

是第一类 k 阶 Chebyshev 多项式在 $[-1, 1]$ 区间上的零点, α_{kj} , $0 \leq j \leq k$ 是由下面两个式子唯一确定的非负常数,

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \alpha_{kj} x_{kj}^l = 0, \quad 0 \leq l \leq k-1$$

和

$$\sum_{j=0}^k \alpha_{kj} = \sqrt{2\pi} 2^{k-1} k!.$$

我们的第二个重构算法定义为

$$(\mathcal{A}_2 X)(t, \omega) := \sum_{j \in J_n} X(j, \omega) \text{sinc}(t-j) \widehat{B}_m(t-j),$$

其中 $m = \lfloor n(\pi - \delta)/2 \rfloor$. 我们需要最后一个引理来估计如下的逼近误差,

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_2) := \sup \{ \|X(t, \cdot) - (\mathcal{A}_2 X)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))} : t \in (0, 1), R_X \in U(\mathcal{B}_\delta) \}. \quad (3.8)$$

引理 3.3 (参见文献 [27]) 令 $q > 1$ 和 $1/p + 1/q = 1$. 对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\text{sinc}(t-j)|^q < p.$$

定理 3.4 对任意的 $n > \max \{2/(\pi - \delta), e\}$ 有

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_2) \leq \sqrt{\frac{121}{200}} e^{5/4} \sqrt{2 + \pi - \delta} \left(\frac{\ln n + 1}{2n} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\pi - \delta}{2} n \right). \quad (3.9)$$

证明 令 $R_X \in U(\mathcal{B}_\delta)$, $t \in (0, 1)$, 且 $h := \text{sinc } \widehat{B_m}$. 由 (1.3) 计算可得

$$\begin{aligned} & \|X(t, \cdot) - (\mathcal{A}_2 X)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))}^2 \\ &= R_X(0) - \sum_{j \in J_n} R_X(t - j) h(t - j) \\ &\quad - \sum_{k \in J_n} \left(R_X(k - t) - \sum_{j \in J_n} R_X(k - j) h(t - j) \right) h(t - k). \end{aligned} \quad (3.10)$$

引入函数

$$F(u) := R_X(u - t) - \sum_{j \in J_n} R_X(u - j) h(t - j), \quad u \in \mathbb{R}.$$

显然, $F \in \mathcal{B}_\delta$. 由 (3.7) 得

$$\left| F(u) - \sum_{k \in J_n} F(k) h(u - k) \right| = \left| \sum_{k \notin J_n} F(k) h(u - k) \right|, \quad u \in \mathbb{R}.$$

在上式中令 $u = t$, 由 (3.10) 可得

$$\|X(t, \cdot) - (\mathcal{A}_2 X)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))}^2 = \sum_{k \notin J_n} \left(R_X(k - t) - \sum_{j \in J_n} R_X(k - j) h(t - j) \right) h(t - k).$$

因为对任意 $k \in \mathbb{Z}$,

$$R_X(k - \cdot) \in U(\mathcal{B}_\delta),$$

由 (3.7) 我们得到

$$\|X(t, \cdot) - (\mathcal{A}_2 X)(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega, dP(\omega))}^2 = \left| \sum_{k \notin J_n} \left(\sum_{j \notin J_n} R_X(k - j) h(t - j) \right) h(t - k) \right|. \quad (3.11)$$

我们接下来选择 $\gamma \in (1/2, 1)$ 并运用两次 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \notin J_n} \left(\sum_{j \notin J_n} R_X(k - j) h(t - j) \right) h(t - k) \right|^2 \\ & \leq \left[\sum_{k \notin J_n} \left(\sum_{j \notin J_n} |R_X(k - j) \text{sinc}^\gamma(t - j)|^2 \right) \right] \left[\sum_{j \notin J_n} |\text{sinc}^{1-\gamma}(t - j) \widehat{B_m}(t - j)|^2 \right] \\ & \quad \times \left[\sum_{k \notin J_n} |h(t - k)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

下面只需估计上式右端的三个和式. 首先, 因为

$$R_X(\cdot - j) \in U(\mathcal{B}_\delta) \subseteq U(\mathcal{B}_\pi),$$

由 (2.3) 得

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |R_X(k - j)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |R_X(u - j)|^2 du = \|R_X\|_{\mathcal{B}_\pi}^2 \leq 1, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.13)$$

根据 (3.13) 和引理 3.3, 我们通过交换和的顺序得到

$$\sum_{k \notin J_n} \left(\sum_{j \notin J_n} |R_X(k-j) \operatorname{sinc}^\gamma(t-j)|^2 \right) \leq \sum_{j \notin J_n} |\operatorname{sinc}^{2\gamma}(t-j)| < \frac{2\gamma}{2\gamma-1}. \quad (3.14)$$

接下来, 由 (3.6) 可得

$$\sum_{j \notin J_n} |\operatorname{sinc}^{1-\gamma}(t-j) \widehat{B_m}(t-j)|^2 \leq \left(\frac{1}{\pi^{1-\gamma}} \frac{2^{m-1}m!}{(\pi-\delta)^m} \right)^2 \sum_{j \notin J_n} \frac{1}{(t-j)^{2m+2(1-\gamma)}}. \quad (3.15)$$

又由 (3.6) 得到

$$\sum_{k \notin J_n} |h(t-k)|^2 \leq \left(\frac{1}{\pi} \frac{2^{m-1}m!}{(\pi-\delta)^m} \right)^2 \sum_{k \notin J_n} \frac{1}{(t-k)^{2m+2}}. \quad (3.16)$$

联合 (3.11)、(3.12)、(3.14)–(3.16) 得到

$$(\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_2))^2 \leq \left(\frac{2\gamma}{2\gamma-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi^{2-\gamma}} \left(\frac{2^{m-1}m!}{(\pi-\delta)^m} \right)^2 \sup \{ \sqrt{h_1(t)h_2(t)} : t \in (0,1) \}, \quad (3.17)$$

其中

$$h_1(t) := \sum_{j \notin J_n} \frac{1}{(t-j)^{2m+2(1-\gamma)}}, \quad t \in (0,1),$$

和

$$h_2(t) := \sum_{j \notin J_n} \frac{1}{(t-j)^{2m+2}}, \quad t \in (0,1).$$

类似定理 2.8 证明中的技巧我们得到

$$h_1(t) \leq \frac{1}{n^{2m+2-2\gamma}} + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{2}{j^{2m+2-2\gamma}} \leq \frac{1}{n^{2m+1-2\gamma}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m + \frac{1}{2} - \gamma} \right), \quad t \in (0,1),$$

该式结合 Stirling 公式 (2.18) 导出

$$\frac{2^{m-1}m!}{(\pi-\delta)^m} \sup \{ \sqrt{h_1(t)} : t \in (0,1) \} \leq \frac{11\sqrt{2\pi}}{20} n^{\frac{2\gamma-1}{2}} \sqrt{\frac{m}{n} + \frac{m}{m + \frac{1}{2} - \gamma}} \left(\frac{2m}{(\pi-\delta)en} \right)^m. \quad (3.18)$$

类似地可以证明

$$\frac{1}{\pi^{2-\gamma}} \frac{2^{m-1}m!}{(\pi-\delta)^m} \sup \{ \sqrt{h_2(t)} : t \in (0,1) \} \leq \frac{11\sqrt{2}}{20\sqrt{\pi n}} \sqrt{\frac{m}{n} + 1} \left(\frac{2m}{(\pi-\delta)en} \right)^m. \quad (3.19)$$

从 (3.17)–(3.19) 我们观察到

$$(\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_2))^2 \leq \left(\frac{2\gamma}{2\gamma-1} n^{2\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{121}{100\sqrt{2}} \frac{1}{n} \left(\frac{m}{n} + 1 \right) \left(\frac{2m}{(\pi-\delta)en} \right)^{2m}.$$

我们对上式右端关于 γ 进行优化, 即当 $n > e$ 我们选择 $\gamma = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\ln n})$. 这样可得

$$(\mathcal{E}_n(\mathcal{A}_2))^2 \leq \frac{121\sqrt{e}}{100\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ln n + 1}{n}} \left(\frac{m}{n} + 1 \right) \left(\frac{2m}{(\pi-\delta)en} \right)^{2m}.$$

当

$$n > \max \{2/(\pi - \delta), e\},$$

我们用

$$m = \lfloor n(\pi - \delta)/2 \rfloor$$

代入上式右端可得 (3.9), 从而本定理结论成立. 证毕. $\square$

我们强调, 估计式 (3.9) 和文献 [6] 中得到的对带宽有限确定信号的估计有相同的指数衰减阶.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Shannon C E. Communication in the presence of noise. *Proc IRE*, 1949, 37: 10–21
- 2 Whittaker E T. On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1915, 35: 181–194
- 3 Gasquet C, Witomski P. *Fourier Analysis and Applications*. New York: Springer-Verlag, 1999
- 4 Helms H D, Thomas J B. Truncation error of sampling-theorem expansions. *Proc IRE*, 1962, 50: 179–184
- 5 Jagerman D. Bounds for truncation error of the sampling expansion. *SIAM J Appl Math*, 1966, 14: 714–723
- 6 Micchelli C A, Xu Y, Zhang H. Optimal learning of bandlimited functions from localized sampling. *J Compl*, 2009, 25: 85–114
- 7 Balakrishnan A V. A note on the sampling principle for continuous signals. *IRE Trans Inform Theory*, 1957, 3: 143–146
- 8 Beutler F. On the truncation error of the cardinal sampling expansion. *IEEE Trans Inform Theory*, 1976, 22: 568–573
- 9 Brown J L. Truncation error for band-limited processes. *Inform Sci*, 1969, 1: 261–271
- 10 Houdre C. Reconstruction of band limited processes from irregular samples. *Ann Probab*, 1995, 23: 674–695
- 11 Kolmogorov A N. On the Shannon theory of transmission in the case of continuous signals. *TRE Trans Inform Theory*, 1956, 2: 102–108
- 12 Piranashvili Z A. On the problem of interpolation of random processes. *Theory Probab Appl*, 1967, 4: 647–657
- 13 Seip K. A note on sampling of bandlimited stochastic processes. *IEEE Trans Inform Theory*, 1990, 36: 1186
- 14 Song Z, Sun W, Zhou X, et al. An average sampling theorem for bandlimited stochastic processes. *IEEE Trans Inform Theory*, 2007, 53: 4798–4800
- 15 Qian L. On the regularized Whittaker-Kotel'nikov-Shannon sampling formula. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 131: 1169–1176
- 16 Qian L. The regularized Whittaker-Kotel'nikov-Shannon sampling theorem and its application to the numerical solutions of partial differential equations. PhD Dissertation. Singapore: National University of Singapore, 2004
- 17 Qian L, Creamer D B. A modification of the sampling series with a Gaussian multiplier. *Sampl Theory Signal Image Process*, 2006, 5: 1–19
- 18 Zhang H. Sampling with reproducing kernels. PhD Dissertation. Syracuse: Syracuse University, 2009
- 19 Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. *Trans Amer Math Soc*, 1950, 68: 337–404
- 20 Schölkopf B, Smola A J. *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond*. Cambridge: MIT Press, 2002
- 21 Cucker F, Smale S. On the mathematical foundations of learning. *Bull Amer Math Soc*, 2002, 39: 1–49
- 22 Bochner S. *Lectures on Fourier Integrals with an Author's Supplement on Monotonic Functions, Stieltjes Integrals and Harmonic Analysis*. Annals of Mathematics Studies 42. New Jersey: Princeton University Press, 1959
- 23 Micchelli C A, Rivlin T J. A survey of optimal recovery. In: *Optimal Estimation in Approximation Theory*. New York: Plenum Press, 1977, 107–140
- 24 Micchelli C A, Rivlin T J. *Lectures on Optimal Recovery*. Lecture Notes in Mathematics 1129. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 25 Zhang H, Zhao L. On the inclusion relation of reproducing kernel Hilbert spaces. *Anal Appl*, 2013, 11: 1350014
- 26 Wendland H. *Scattered Data Approximation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005
- 27 Splettstösser W, Stens R L, Wilmes G. On the approximation of the interpolating series of G. Valiron. *Funct Approx Comment Math*, 1980, 11: 39–56

Exponential approximation of bandlimited random processes from oversampling

CHEN WenJian & ZHANG HaiZhang

Abstract The Shannon sampling theorem for bandlimited wide sense stationary random processes was established in 1957, which and its extensions to various random processes have been widely studied since then. However, truncation of the Shannon series suffers the drawback of slow convergence. Specifically, it is well-known that the mean-square approximation error of the truncated series at n points sampled at the exact Nyquist rate is of the order $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$. We consider the reconstruction of bandlimited random processes from finite oversampling points, namely, the distance between consecutive points is smaller than the Nyquist sampling rate. The optimal deterministic linear reconstruction method and the associated intrinsic approximation error are studied. It is found that one can achieve exponentially-decaying (but not faster) approximation errors from oversampling. Two practical reconstruction methods with exponential approximation ability are also presented.

Keywords bandlimited random processes, oversampling, the intrinsic approximation error, exponential decayness, reproducing kernels

MSC(2010) 62D05, 60G10

doi: 10.1360/012014-70