RD- 空间上 Hardy 空间的极大函数特征及其应用

Loukas GRAFAKOS^①, 刘丽光^②, 杨大春^{②*}

^① Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, MO 65211, USA

^② 北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875

* E-mail: dcyang@bnu.edu.cn

收稿日期: 2007-11-15; 接受日期: 2008-01-15

The National Science Foundation of the USA (Grant No. DMS 0400387) 和 The University of Missouri Research Council (Grant No. URC-07-067) 及国家杰出青年基金 (批准号: 10425106) 和教育部“新世纪优秀人才”支持计划 (批准号: 04-0142) 资助项目

摘要 令 $\mathcal{X}$ 为 RD- 空间, 即 Coifman 和 Weiss 意义下的齐型空间且满足逆双倍条件. 设 $\mathcal{X}$ 具有“维数” n . 对 $\alpha \in (0, \infty)$, 分别记 $H_\alpha^p(\mathcal{X})$, $H_d^p(\mathcal{X})$ 和 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 为 $\mathcal{X}$ 上相应于非切向极大函数, 二进极大函数和主极大函数的 Hardy 空间. 利用一个新建立的 Calderón 再生公式, 证明了当 $p \in (1, \infty]$ 时这些 Hardy 空间等价于 $L^p(\mathcal{X})$ 及当 $p \in (n/(n+1), 1]$ 时这些 Hardy 空间彼此等价. 对 $p \in (n/(n+1), 1]$, 建立了 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 的原子特征刻画; 进一步, 当 $p \in (n/(n+1), 1]$ 时, 证明了 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 与 Coifman 和 Weiss 意义下的原子 Hardy 空间等价. 此外, 证明了一个次线性算子 T 可以唯一延拓为 $H^p(\mathcal{X})$ 到某拟 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 的有界算子当且仅当 T 将所有的 (p, q) - 原子, $q \in (p, \infty) \cap [1, \infty)$, 或者连续的 (p, ∞) - 原子映为 $\mathcal{B}$ 中的一致有界集.

关键词 齐型空间 Calderón 再生公式 检验函数空间 极大函数 Hardy 空间 原子 Littlewood-Paley 函数 次线性算子 拟 Banach 空间

MSC(2000) 主题分类 42B25, 42B30, 47B38, 47A30

1 引言

Euclid 空间上的 Hardy 空间理论在调和分析中扮演着重要的角色, 并且已得到系统的研究和发展; 例如见文献 [1–3]. 众所周知, Coifman 和 Weiss^[4] 定义的齐型空间为 Calderón-Zygmund 奇异积分理论提供了一个自然的背景^[5]. 回顾所谓齐型空间 $\mathcal{X}$ 即集合 $\mathcal{X}$ 上赋予了一个距离 d 和一个满足双倍条件的正则 Borel 测度 μ . Coifman 和 Weiss^[5] 对 $p \in (0, 1]$ 引入了原子 Hardy 空间 $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 在 $\mathcal{X}$ 中任何一个球的测度等价于其半径 (即 $\mathcal{X}$ 为 Ahlfors

1- 正则度量测度空间) 的假设下, Coifman 和 Weiss^[5] 建立了 $H_{\text{at}}^1(\mathcal{X})$ 的分子特征刻画. 在同样的背景下, 若 $p \in (1/2, 1]$, Macías 和 Segovia^[6] 借助作用于某一类 Lipschitz 空间上的分布获得了 $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 的主极大函数特征刻画; 韩^[7] 建立了 $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 的 Lusin 面积函数特征刻画; Duong 和颜^[8] 用相关于某些 Poisson 半群的 Lusin 面积函数特征刻画了这些 Hardy 空间; 李^[9] 也给出了 $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 的经由文献 [10] 中的检验函数所定义的主极大函数特征刻画.

齐型空间结构涵盖了调和分析中许多重要的例子, 如赋予 (Muckenhoupt 类) A_∞ - 权的 Euclid 空间, Ahlfors n - 正则度量测度空间^[11, 12], 多项式增长 Lie 群^[13–15] 和具有倍测度的 Carnot-Carathéodory 空间^[16–22]. 所有这些空间均被文献 [23] 所引入的 RD- 空间所包容, 也见文献 [24]. 称 $\mathcal{X}$ 为 RD- 空间, 若 $\mathcal{X}$ 为具有“维数” n 且满足下面逆双倍条件的齐型空间: 存在常数 $a_0 > 1$, 使得对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 及 $0 < r < \text{diam}(\mathcal{X})/a_0$, $B(x, a_0 r) \setminus B(x, r) \neq \emptyset$, 此处及下文中 $\text{diam}(\mathcal{X}) := \sup_{x, y \in \mathcal{X}} d(x, y)$. 文献 [24] 建立了 RD- 空间上 Hardy 空间的 Littlewood-Paley 理论, 并且已知这些 Hardy 空间与文献 [23] 中所建立的某些 Triebel-Lizorkin 空间等价.

令 $\mathcal{X}$ 为具有“维数” n 的 RD- 空间. 本文实现了以下两个目标: 首先, 借助于非切向极大函数, 二进极大函数和主极大函数, 引入了 $\mathcal{X}$ 上不同的 Hardy 空间, 并且证明了这些 Hardy 空间当 $p \in (1, \infty]$ 时与 $L^p(\mathcal{X})$ 等价, 及当 $p \in (n/(n+1), 1]$ 时它们彼此等价. 当 $p \in (n/(n+1), 1]$ 时, 进一步证明了这些 Hardy 空间与文献 [23, 24] 中通过 Littlewood-Paley 函数所定义的 Hardy 空间 $H^p(\mathcal{X})$ 及与 Coifman 和 Weiss 在文献 [5] 中所定义的原子 Hardy 空间均等价. 其次, 证明了次线性算子 T 可以唯一地延拓为 $H^p(\mathcal{X})$ 到某拟 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 的有界算子当且仅当 T 将所有的 (p, q) - 原子, 其中 $q \in (p, \infty) \cap [1, \infty)$, 或者连续的 (p, ∞) - 原子映为 $\mathcal{B}$ 中的一致有界集. 这回答了 Meda 等在文献 [25] 中所提出的问题.

确切地说, 在第 2 节中, 对 $\alpha \in (0, \infty)$, 借助于非切向极大函数、二进极大函数和主极大函数, 我们分别引入了不同的 Hardy 空间 $H_\alpha^p(\mathcal{X})$, $H_d^p(\mathcal{X})$ 和 $H^{*,p}(\mathcal{X})$. 同时也引入了文献 [23, 24] 所定义的检验函数空间的一个不同的变形, 这在应用中起着关键作用 (详见下面的注 2.9 (iii)).

本文的一个贡献是建立了一个新的非齐次的离散的 Calderón 再生公式 (见第 3 节的定理 3.3). 这一公式在全文中起着重要作用, 并有可能对研究其他问题也有用. 进一步, 在第 3 节中, 我们证明了上面所提到的那些 Hardy 空间当 $p \in (1, \infty]$ 时与 $L^p(\mathcal{X})$ 等价及当 $p \in (n/(n+1), 1]$ 时它们彼此等价.

利用文献 [6] 中的某些思想, 在第 4 节中, 我们获得了 Hardy 空间 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 当 $p \in (n/(n+1), 1]$ 时的原子特征刻画.

第 5 节给出了一些应用. 首先, 当 $p \in (n/(n+1), 1]$ 时, 利用原子特征刻画, 我们建立了 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 与 $H^p(\mathcal{X})$ 的一致性, 其中 $H^p(\mathcal{X})$ 是文献 [23, 24] 中通过 Littlewood-Paley 函数所定义的 Hardy 空间 (见定理 5.4). 经由一个关键的观察 (引理 5.3), 该观察建立了检验函数空间与 Coifman 和 Weiss 引入的 Lipschitz 函数空间 (见文献 [5, (2.2) 式]) 的联系, 我们得到了 $H^p(\mathcal{X})$ 与 Coifman 和 Weiss^[5] 意义下的原子 Hardy 空间等价 (见注 5.5 (ii)). 这回答了文献 [24, 注 2.30] 所提出的一个问题.

本文第 2 个应用是关于次线性算子从 $H^p(\mathcal{X})$ 到拟 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 的有界性. 众所周知, 原子分解特征在获得次线性算子在 Hardy 空间上的有界性中起着重要作用, 即这些算子的有

界性原则上可由它们在原子上的作用推得. Meyer 在文献 [26, p. 513] (也见文献 [27, 28]) 给出了一个例子 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 但 f 的 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 范数不能由有限的 $(1, \infty)$ - 原子分解获得. 基于此, 文献 [28, 定理 2] 构造了一个定义在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的稠子空间上的令人惊奇的线性泛函, 该泛函将所有的 $(1, \infty)$ - 原子映为一个有界量, 但它仍不能延拓为整个 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函. 由此推出即使证明了一个线性算子 T 把所有 (p, ∞) - 原子映为某个拟 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 中的一致有界集也不能保证 T 从整个 $H^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in (0, 1]$) 到 $\mathcal{B}$ 的有界性; 这一现象本质上由 Meyer 在文献 [29, p. 19] 中发现. 受此启发, Yabuta^[30] 给出了 T 从 $H^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in (0, 1]$) 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ ($q \geq 1$) 或 $H^q(\mathbb{R}^n)$ ($q \in [p, 1]$) 有界性的一些充分条件. 文献 [31] 证明了线性算子 T 可延拓为从 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \in (0, 1]$) 到某些拟 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 的有界线性算子当且仅当 T 将所有的 $(p, 2, s)$ - 原子映为 $\mathcal{B}$ 中的一致有界集, 其中 $s \geq \lfloor n(1/p - 1) \rfloor$ 且 $\lfloor n(1/p - 1) \rfloor$ 表示不超过 $n(1/p - 1)$ 的最大整数. 对 $q \in (1, \infty]$, 记 $H_{\text{fin}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ 为所有 $(1, q)$ - 原子的有限线性组合所组成的向量空间且赋予如下范数:

$$\|f\|_{H_{\text{fin}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^N |\lambda_j| : f = \sum_{j=1}^N \lambda_j a_j, N \in \mathbb{N}, \{\lambda_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{C}, \text{ 且 } \{a_j\}_{j=1}^N \text{ 是 } (1, q)\text{- 原子} \right\}.$$

近来, 借助于 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的主极大函数特征刻画, Meda 等^[25] 证明了 $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ 和 $\|\cdot\|_{H_{\text{fin}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)}$ 是 $H_{\text{fin}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ ($q \in (1, \infty)$) 或 $H_{\text{fin}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 上等价的拟范数, 其中 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数空间. (文献 [25] 中也指出这种范数等价关系对 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 及 (p, q) - 原子, 其中 $p \in (0, 1]$ 且 $q \in [1, \infty]$ 仍成立.) 由此, 这些作者推出定义在 $H_{\text{fin}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ 上且将 $(1, q)$ - 原子或连续的 $(1, \infty)$ - 原子映为 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 中的一致有界集的线性算子可唯一延拓为从 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{B}$ 的有界线性算子. 文献 [25] 的结果在文献 [32] 中推广到 $\mathbb{R}^n$ 上相关于广义扩张矩阵伸缩的加权 Hardy 空间. 在文献 [25] 中, Meda 等也指出能否将他们关于 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的结果推广到齐型空间上的 Hardy 空间不是明显的. 在第 5 节中, 应用文献 [25] 的一些想法, 我们对此问题给出了肯定回答 (见下面的定理 5.6 和 5.9). 应当提及, Yabuta^[30] 的结果在文献 [33] 中被推广到 Ahlfors 1- 正则度量测度空间, 文献 [31] 的结果在文献 [34] 中被推广到 RD- 空间. 此外, 利用对偶理论, Meda 等^[25] 证明了 T 可唯一延拓为 $H^1(\mathcal{X})$ 到 $L^1(\mathcal{X})$ 的有界线性算子当且仅当 T 将所有的 $(1, q)$ - 原子映为 $L^1(\mathcal{X})$ 中的一致有界集, 其中 $q \in (1, \infty)$ 且 $\mathcal{X}$ 是齐型空间. 但此结果仅对线性算子和 Hardy 空间 $H^1(\mathcal{X})$ 有效.

最后, 我们提及近来在文献 [35] 中给出了这些 Hardy 空间的径向极大函数特征刻画.

本文采用如下记号: $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. 对任意 $p \in [1, \infty]$, 记 p' 为 p 的共轭指标, 即 $1/p + 1/p' = 1$. 全文中, C 表示一个不依赖于主要参数的常数, 但其值在不同的地方不尽相同. 带有下标的常数在文中不同的地方其值不变. 记号 $f \lesssim g$ 和 $f \gtrsim g$ 分别表示 $f \leq Cg$ 和 $f \geq Cg$. 若 $f \lesssim g \lesssim f$, 则记成 $f \sim g$. 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 记 $(a \wedge b) := \min\{a, b\}$ 和 $(a \vee b) := \max\{a, b\}$.

2 预备知识

首先回顾 Coifman 和 Weiss^[4, 5] 意义下的齐型空间及文献 [23] 中的 RD- 空间的概念.

定义 2.1 记 $(\mathcal{X}, d)$ 是具有 Borel 正则测度 μ 且满足所有由 d 定义的球都有有限正测

度的度量空间. 对任意 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$, 记 $B(x, r) := \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$.

(i) 称 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为齐型空间, 若存在常数 $C_1 \geq 1$, 使得对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$,

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_1 \mu(B(x, r)) \quad (\text{倍测度条件}). \quad (2.1)$$

(ii) 记 $0 < \kappa \leq n$. 称 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为 (κ, n) -空间, 若存在常数 $0 < C_2 \leq 1$ 和 $C_3 \geq 1$, 使得对所有的 $x \in \mathcal{X}$, $0 < r < \text{diam}(\mathcal{X})/2$ 和 $1 \leq \lambda < \text{diam}(\mathcal{X})/(2r)$,

$$C_2 \lambda^\kappa \mu(B(x, r)) \leq \mu(B(x, \lambda r)) \leq C_3 \lambda^n \mu(B(x, r)), \quad (2.2)$$

其中 $\text{diam}(\mathcal{X}) = \sup_{x, y \in \mathcal{X}} d(x, y)$.

齐型空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 称作 RD-空间, 若它对某 $0 < \kappa \leq n$ 为 (κ, n) -空间, 即若某逆双倍条件成立.

注 2.2 (i) 在某种意义上, n 测量了 $\mathcal{X}$ 的“维数”. 显然任意 (κ, n) -空间为齐型空间, 此时 $C_1 := C_3 2^n$. 反之, 任意齐型空间均满足 (2.2) 式的第 2 个不等式, 此时 $C_3 := C_1$ 且 $n := \log_2 C_1$.

(ii) 若 μ 是倍测度, 则 μ 满足 (2.2) 式当且仅当存在常数 $a_0 > 1$ 和 $\tilde{C}_0 > 1$, 使得对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $0 < r < \text{diam}(\mathcal{X})/a_0$,

$$\mu(B(x, a_0 r)) \geq \tilde{C}_0 \mu(B(x, r)) \quad (\text{逆倍测度条件})$$

(若 $a_0 = 2$, 此即为经典的逆双倍条件), 等价地说, 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 及 $0 < r < \text{diam}(\mathcal{X})/a_0$, 有 $B(x, a_0 r) \setminus B(x, r) \neq \emptyset$ (见文献 [23, 36]).

(iii) 由此注中的 (ii) 推出, 若 $\mathcal{X}$ 为 RD-空间, 则对所有的 $x \in \mathcal{X}$, 有 $\mu(\{x\}) = 0$.

(iv) 令 d 为拟度量, 即存在常数 $A_0 \geq 1$, 使得对所有的 $x, y, z \in \mathcal{X}$, 有

$$d(x, y) \leq A_0(d(x, z) + d(z, y)).$$

回顾 Macías 和 Segovia (见文献 [37, 定理 2]) 证明了存在一个等价的拟度量 $\tilde{d}$, 使得所有由 $\tilde{d}$ 定义的球在 $\tilde{d}$ 诱导的拓扑下为开, 并且存在常数 $A'_0 > 0$ 和 $\theta \in (0, 1)$, 使得对所有的 $x, y, z \in \mathcal{X}$,

$$|\tilde{d}(x, z) - \tilde{d}(y, z)| \leq A'_0 \tilde{d}(x, y)^\theta [\tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(y, z)]^{1-\theta}.$$

对 $\tilde{d}$, 已知如下定义 2.3 中的恒等逼近也存在 [23]. 显然, 全文所有的结论对等价的拟度量不变. 基于这些事实, 可知全文所有结论对拟度量仍有效.

在本文中, 总假定 $\mathcal{X}$ 是 RD-空间且 $\mu(\mathcal{X}) = \infty$. 对任意 $x, y \in \mathcal{X}$ 和 $\delta > 0$, 令 $V_\delta(x) := \mu(B(x, \delta))$ 和 $V(x, y) := \mu(B(x, d(x, y)))$. 由 (2.1) 式知 $V(x, y) \sim V(y, x)$. 如下定义的 RD-空间上的恒等逼近概念由文献 [23] 首次引入, 也见文献 [24].

定义 2.3 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$ 和 $\epsilon_3 > 0$. 称 $L^2(\mathcal{X})$ 上的有界线性积分算子列 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ 阶的恒等逼近 (简称 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI), 若存在常数 $C_4 > 0$, 使得对所有的 $k \in \mathbb{Z}$, x, x', y 和 $y' \in \mathcal{X}$, $S_k(x, y)$, S_k 的积分核为从 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 到 $\mathbb{C}$ 的函数, 且满足

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad |S_k(x, y)| \leq C_4 \frac{1}{V_{2^{-k}}(x) + V_{2^{-k}}(y) + V(x, y)} \frac{2^{-k\epsilon_2}}{(2^{-k} + d(x, y))^{\epsilon_2}}; \\ & \text{(ii)} \quad \text{若 } d(x, x') \leq (2^{-k} + d(x, y))/2, \text{ 则 } |S_k(x, y) - S_k(x', y)| \leq C_4 \frac{d(x, x')^{\epsilon_1}}{(2^{-k} + d(x, y))^{\epsilon_1}} \\ & \quad \times \frac{1}{V_{2^{-k}}(x) + V_{2^{-k}}(y) + V(x, y)} \frac{2^{-k\epsilon_2}}{(2^{-k} + d(x, y))^{\epsilon_2}}; \\ & \text{(iii)} \quad \text{性质 (ii) 在 } x \text{ 和 } y \text{ 交换位置后仍成立;} \end{aligned}$$

(iv) 若 $d(x, x') \leq (2^{-k} + d(x, y))/3$ 且 $d(y, y') \leq (2^{-k} + d(x, y))/3$, 则 $||S_k(x, y) - S_k(x, y')| - [S_k(x', y) - S_k(x', y')]| \leq C_4 \frac{d(x, x')^{\epsilon_1}}{(2^{-k} + d(x, y))^{\epsilon_1}} \frac{d(y, y')^{\epsilon_1}}{(2^{-k} + d(x, y))^{\epsilon_1}} \frac{1}{V_{2^{-k}}(x) + V_{2^{-k}}(y) + V(x, y)} \frac{2^{-k\epsilon_3}}{(2^{-k} + d(x, y))^{\epsilon_3}}$;

(v) $\int_{\mathcal{X}} S_k(x, y) d\mu(y) = \int_{\mathcal{X}} S_k(x, y) d\mu(x) = 1$.

注 2.4 记 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 如定义 2.3 所述, 文献 [23, 定理 2.1] 证明了存在 $\mathcal{X}$ 上具有有界支集的 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 此处“具有有界支集”意味着存在正常数 C , 使得对所有的 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $d(x, y) \geq C2^{-k}$, 有 $S_k(x, y) = 0$.

下面的检验函数空间在全文中起着重要作用, 它是文献 [23, 定义 2.3] 所定义的检验函数空间的一种等价变形 (也见文献 [24]).

定义 2.5 记 $x_1 \in \mathcal{X}, r \in (0, \infty), \beta \in (0, 1]$ 且 $\gamma \in (0, \infty)$. 称 $\mathcal{X}$ 上的函数 φ 为 (x_1, r, β, γ) 型检验函数, 若

- (i) 对所有 $x \in \mathcal{X}$ 有 $|\varphi(x)| \leq C \frac{1}{\mu(B(x, r+d(x, x_1)))} \left(\frac{r}{r+d(x_1, x)}\right)^\gamma$;
- (ii) 对所有 $x, y \in \mathcal{X}$ 满足 $d(x, y) \leq (r + d(x_1, x))/2$ 有 $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C \left(\frac{d(x, y)}{r+d(x_1, x)}\right)^\beta \times \frac{1}{\mu(B(x, r+d(x, x_1)))} \left(\frac{r}{r+d(x_1, x)}\right)^\gamma$.

记 $\mathcal{G}(x_1, r, \beta, \gamma)$ 为 (x_1, r, β, γ) 型检验函数全体所成的集合. 若 $\varphi \in \mathcal{G}(x_1, r, \beta, \gamma)$, 定义其范数为 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x_1, r, \beta, \gamma)} := \inf\{C : (i) \text{ 和 } (ii) \text{ 成立}\}$. 称空间 $\mathcal{G}(x_1, r, \beta, \gamma)$ 为检验函数空间.

注 2.6 (i) 若用 $V_r(x_1) + V(x_1, x)$ 代替定义 2.5 中的 $\mu(B(x, r+d(x, x_1)))$, 则 $\mathcal{G}(x_1, r, \beta, \gamma)$ 即为文献 [23, 定义 2.3] 的检验函数空间 (也见文献 [24]).

(ii) 由 (2.2) 式知 $\mu(B(x, r+d(x, x_1))) \sim V_r(x_1) + V(x_1, x)$. 这意味着定义 2.5 和文献 [23, 定义 2.3] 中的两个检验函数空间等价且其上的范数等价. 此外, 关于定义 2.5 的优越性见注 2.9 (iii).

贯穿全文, 我们固定 $x_1 \in \mathcal{X}$. 令 $\mathcal{G}(\beta, \gamma) := \mathcal{G}(x_1, 1, \beta, \gamma)$. 易得对任意 $x_2 \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$, 有 $\mathcal{G}(x_2, r, \beta, \gamma) = \mathcal{G}(\beta, \gamma)$ 且范数等价 (但其等价常数依赖于 x_1, x_2 和 r). 进一步, $\mathcal{G}(\beta, \gamma)$ 是一个 Banach 空间.

任给 $\epsilon \in (0, 1]$, 记 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 为空间 $\mathcal{G}(\epsilon, \epsilon)$ 在 $\mathcal{G}(\beta, \gamma)$ 中的完备化, 其中 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon]$. 显然 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\epsilon, \epsilon) = \mathcal{G}(\epsilon, \epsilon)$. 而且, $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 当且仅当 $\varphi \in \mathcal{G}(\beta, \gamma)$, 且存在 $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\epsilon, \epsilon)$, 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi - \phi_i\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} = 0$. 若 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 定义 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)} := \|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)}$. 显然 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 为 Banach 空间, 且对上面取定的 $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, 有 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\phi_i\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)}$.

定义具有零平均的检验函数空间

$$\mathring{\mathcal{G}}(x_1, r, \beta, \gamma) := \left\{ \varphi \in \mathcal{G}(x_1, r, \beta, \gamma) : \int_{\mathcal{X}} \varphi(x) d\mu(x) = 0 \right\}.$$

对 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon]$, 定义 $\mathring{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 为 $\mathring{\mathcal{G}}(\epsilon, \epsilon)$ 在 $\mathring{\mathcal{G}}(\beta, \gamma)$ 中的完备化. 若 $\varphi \in \mathring{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 定义 $\|\varphi\|_{\mathring{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma)} := \|\varphi\|_{\mathring{\mathcal{G}}(\beta, \gamma)}$.

记 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 为 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 的对偶空间, 即从 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 到 $\mathbb{C}$ 且满足如下性质的线性泛函全体: 存在正常数 C , 使得对所有的 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 有 $|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)}$. 用 $\langle f, \varphi \rangle$ 表示元素 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 和 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 之间的自然作用. 类似地, 记 $(\mathring{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 为从 $\mathring{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 到 $\mathbb{C}$ 的有界线性泛函全体.

如下由 Christ^[38] 构造的方体, 是 Euclid 空间上二进方体在齐型空间背景下的类似.

引理 2.7 记 $\mathcal{X}$ 为齐型空间, 则存在一组开集 $\{Q_\alpha^k \subset \mathcal{X} : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k\}$, 其中 I_k 是指标集, 及常数 $\delta \in (0, 1)$ 和 $C_5, C_6 > 0$, 使得

- (i) 对任意固定的 k , $\mu(\mathcal{X} \setminus \cup_{\alpha} Q_{\alpha}^k) = 0$, 且当 $\alpha \neq \beta$ 时, $Q_{\alpha}^k \cap Q_{\beta}^k = \emptyset$;
- (ii) 对任意 α, β, k, ℓ 满足 $\ell \geq k$, 必有 $Q_{\beta}^{\ell} \subset Q_{\alpha}^k$ 或 $Q_{\beta}^{\ell} \cap Q_{\alpha}^k = \emptyset$;
- (iii) 对任意 (k, α) 及 $\ell < k$, 存在唯一的 β , 使得 $Q_{\alpha}^k \subset Q_{\beta}^{\ell}$;
- (iv) $\text{diam}(Q_{\alpha}^k) \leq C_5 \delta^k$;
- (v) 任一个 Q_{α}^k 包含某个球 $B(z_{\alpha}^k, C_6 \delta^k)$, 其中 $z_{\alpha}^k \in \mathcal{X}$.

事实上, 可将 Q_{α}^k 看作以 z_{α}^k 为中心且直径约为 δ^k 的二进方体. 为简单起见, 在下文中不妨设 $\delta = 1/2$ (见文献 [23, p. 25] 或文献 [10, pp. 96–98] 关于怎样去掉这一限制). 对任意二进方体 Q 和任意函数 g , 记

$$m_Q(g) := \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q g(x) d\mu(x).$$

记 ϵ_1, ϵ_2 和 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 如定义 2.3, 以及 $\epsilon \in (0, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$. 注意到对任意固定的 $x \in \mathcal{X}$, $S_k(x, \cdot) \in \mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$, 其中 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon)$. 在下文中, 对任意 $k \in \mathbb{Z}$, $f \in (\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma))'$ 和 $x \in \mathcal{X}$, 定义

$$S_k(f)(x) := \langle f, S_k(x, \cdot) \rangle.$$

定义 2.8 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$, $\epsilon \in (0, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$ 及 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI. 设 $p \in (0, \infty]$, $\alpha \in (0, \infty)$ 和 $f \in (\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma))'$, 其中 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon)$. 对任意 $x \in \mathcal{X}$, 定义 f 的主极大函数为

$$f^*(x) := \sup\{|\langle f, \varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma), \|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, r, \beta, \gamma)} \leq 1 \text{ 对某 } r > 0\}; \quad (2.3)$$

f 的非切向极大函数为

$$\mathcal{M}_{\alpha}(f)(x) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{d(x, y) \leq \alpha 2^{-k}} |S_k(f)(y)|; \quad (2.4)$$

以及 f 的二进极大函数为

$$\mathcal{M}_d(f)(x) := \sup_{k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k} m_{Q_{\alpha}^k}(|S_k(f)|) \chi_{Q_{\alpha}^k}(x), \quad (2.5)$$

其中 $\{Q_{\alpha}^k\}_{k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k}$ 如引理 2.7.

分别记相应的 Hardy 空间为

$$H^{*, p}(\mathcal{X}) := \{f \in (\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma))' : \|f^*\|_{L^p(\mathcal{X})} < \infty\},$$

$$H_{\alpha}^p(\mathcal{X}) := \{f \in (\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma))' : \|\mathcal{M}_{\alpha}(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} < \infty\}$$

和 $H_d^p(\mathcal{X}) := \{f \in (\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma))' : \|\mathcal{M}_d(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} < \infty\}$. 进一步, 定义 $\|f\|_{H^{*, p}(\mathcal{X})} := \|f^*\|_{L^p(\mathcal{X})}$, $\|f\|_{H_{\alpha}^p(\mathcal{X})} := \|\mathcal{M}_{\alpha}(f)\|_{L^p(\mathcal{X})}$ 和 $\|f\|_{H_d^p(\mathcal{X})} := \|\mathcal{M}_d(f)\|_{L^p(\mathcal{X})}$.

注 2.9 (i) 引理 2.7 暗示了可等价地定义 $\mathcal{M}_d(f)(x)$ 为

$$\mathcal{M}_d(f)(x) := \sup\{m_{Q_{\alpha}^k}(|S_k(f)|) : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k, Q_{\alpha}^k \ni x\}, \quad (2.6)$$

其中 $\{Q_{\alpha}^k\}_{k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k}$ 如引理 2.7.

(ii) 记 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 α 如定义 2.8. 观察到存在正常数 C_{α} , 使得

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{d(x, y) \leq \alpha 2^{-k}} \|S_k(y, \cdot)\|_{\mathcal{G}(x, 2^{-k}, \epsilon_1, \epsilon_2)} =: C_{\alpha} < \infty,$$

从而对所有的 $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{M}_{\alpha}(f)(x) \leq C_{\alpha} f^*(x)$.

(iii) 对任意 $\lambda \in (0, \infty)$, 集合 $\Omega := \{x \in \mathcal{X} : f^*(x) > \lambda\}$ 为开. 此为第 4 节将用到的一个重要事实. 事实上, 若 $x_0 \in \Omega$, 则存在 $\varphi \in \mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$, 使得 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x_0, r, \beta, \gamma)} \leq 1$ 对某

$r > 0$ 成立, 并且 $|\langle f, \varphi \rangle| > \lambda$. 令 η 为满足 $|\langle f, \varphi \rangle| > \lambda(1 + \eta)$ 的充分小的正实数. 对任意的 $x \in B(x_0, r - r/(1 + \eta)^{1/\gamma})$, 取 $s \in (0, \infty)$ 满足 $r/(1 + \eta)^{1/\gamma} < s < r - d(x, x_0)$. 易证 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, s, \beta, \gamma)} < 1 + \eta$. 因此, $f^*(x) > \lambda$ 对所有的 $x \in B(x_0, r - r/(1 + \eta)^{1/\gamma})$ 成立, 故 Ω 开.

(iv) 下面的推论 3.11 证明了若 $p \in (1, \infty]$, 则 $H^{*,p}(\mathcal{X})$, $H_\alpha^p(\mathcal{X})$ 和 $H_d^p(\mathcal{X})$ 均等价于 $L^p(\mathcal{X})$.

(v) 记 $\epsilon \in (0, 1)$ 和 $p \in (n/(n + \epsilon), 1]$. 下面的注 3.15 说明了若 $n(1/p - 1) < \beta$, $\gamma < \epsilon$, 则 Hardy 空间 $H^{*,p}(\mathcal{X})$, $H_\alpha^p(\mathcal{X})$ 和 $H_d^p(\mathcal{X})$ 的定义不依赖于 AOTI 以及 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 的选取. 此外, 这些 Hardy 空间均彼此等价.

3 极大函数特征刻画

下述关于 RD- 空间的基本性质将在本文中多处使用(其证明见文献 [23, 引理 2.1, 命题 2.2 和 3.1]). 在下文中, 对任给 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathcal{X})$, 定义 Hardy-Littlewood 中心极大函数 $\mathcal{M}(f)$ 为: 对任意 $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| d\mu(y).$$

引理 3.1 记 $\delta > 0$, $a > 0$, $r > 0$ 和 $\theta \in (0, 1)$.

(i) 对所有的 $x, y \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$, 有 $\mu(B(x, r + d(x, y))) \sim \mu(B(y, r + d(x, y)))$.

(ii) 若 $x, x', x_1 \in \mathcal{X}$ 满足 $d(x, x') \leq \theta(r + d(x, x_1))$, 则 $r + d(x, x_1) \sim r + d(x', x_1)$ 且 $\mu(B(x, r + d(x, x_1))) \sim \mu(B(x', r + d(x', x_1)))$.

(iii) 若 $a > \eta \geq 0$, 则 $\int_{\mathcal{X}} \frac{1}{\mu(B(x, r + d(x, y)))} \left(\frac{r}{r + d(x, y)}\right)^a d(x, y)^\eta d\mu(x) \leq Cr^\eta$ 关于 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$ 一致成立.

(iv) 对所有的 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathcal{X})$ 和 $x \in \mathcal{X}$, 则 $\int_{d(x, y) > \delta} \frac{1}{V(x, y)} \frac{\delta^a}{d(x, y)^a} |f(y)| d\mu(y) \leq C\mathcal{M}(f)(x)$ 关于 $\delta > 0$, $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathcal{X})$ 和 $x \in \mathcal{X}$ 一致成立.

(v) 记 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI, 其中 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$ 且 $\epsilon_3 > 0$, 则 S_k 关于 $k \in \mathbb{Z}$ 在 $L^p(\mathcal{X})$ 上一致有界. 对任意 $p \in (1, \infty)$ 和 $f \in L^p(\mathcal{X})$, $\lim_{k \rightarrow -\infty} \|S_k(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} = 0$. 对任意 $p \in [1, \infty)$ 和 $f \in L^p(\mathcal{X})$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(f) - f\|_{L^p(\mathcal{X})} = 0.$$

下面引入 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上非齐次恒等逼近的概念. 这是文献 [23] 中所定义的恒等逼近的一个稍微变形.

定义 3.2 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$ 和 $\ell_0 \in \mathbb{Z}$. 称线性算子列 $\{S_k\}_{k=\ell_0}^\infty$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ 阶非齐次恒等逼近 (简称 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ - ℓ_0 -AOTI), 若对任意 $k \in \{\ell_0, \ell_0 + 1, \dots\}$, S_k 满足定义 2.3 中的 (i) 至 (v).

在下文中, 对 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $\tau \in I_k$, 记 $Q_\tau^{k, \nu}$, $\nu = 1, 2, \dots, N(k, \tau)$, 为满足 $Q_\tau^{k, \nu} \subset Q_\tau^k$ 的所有二进方体的集合, 其中 Q_τ^k 是如引理 2.7 所定义的二进方体且 $j_0 \in \mathbb{N}$ 满足

$$2^{-j_0} C_5 < 1/3. \quad (3.1)$$

记 $z_\tau^{k, \nu}$ 为 $Q_\tau^{k, \nu}$ 的中心以及 $y_\tau^{k, \nu}$ 为 $Q_\tau^{k, \nu}$ 中的任意一点.

对任意的 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ - ℓ_0 -AOTI, 重复文献 [23, 定理 4.6] 的证明过程, 可得到一个新的非齐次的离散的 Calderón 再生公式, 且它可从任意 $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ 开始. 由于其证明类似, 故略去证明细节. 非齐次的离散的 Calderón 再生公式在全文中起着重要作用且具有独立的意义.

定理 3.3 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$, $\epsilon \in (0, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$ 和 $\ell_0 \in \mathbb{Z}$. 令 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ - ℓ_0 -AOTI. 记 $D_{\ell_0} := S_{\ell_0}$. 对 $k \geq \ell_0 + 1$, 记 $D_k := S_k - S_{k-1}$. 对任给满足 (3.1) 式的充分大的 j_0 , 存在一组函数 $\{\tilde{D}_k(x, y)\}_{k=\ell_0}^\infty$, 使得对任意固定的 $y_\tau^{k, \nu} \in Q_\tau^{k, \nu}$ 及所有的 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$, 其中 $k \geq \ell_0 + 1$, $\tau \in I_k$, $\nu \in \{1, 2, \dots, N(k, \tau)\}$ 和 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon)$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\tau \in I_{\ell_0}} \sum_{\nu=1}^{N(\ell_0, \tau)} \int_{Q_\tau^{\ell_0, \nu}} \tilde{D}_{\ell_0}(x, y) d\mu(y) D_{\tau, 1}^{\ell_0, \nu}(f) \\ &\quad + \sum_{k=\ell_0+1}^\infty \sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k, \tau)} \mu(Q_\tau^{k, \nu}) \tilde{D}_k(x, y_\tau^{k, \nu}) D_k(f)(y_\tau^{k, \nu}) \\ &= \sum_{\tau \in I_{\ell_0}} \sum_{\nu=1}^{N(\ell_0, \tau)} \int_{Q_\tau^{\ell_0, \nu}} \tilde{D}_{\ell_0}(x, y) d\mu(y) D_{\tau, 1}^{\ell_0, \nu}(f) \\ &\quad + \sum_{k=\ell_0+1}^\infty \sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k, \tau)} \mu(Q_\tau^{k, \nu}) \tilde{D}_k(x, y_\tau^{k, \nu}) D_{\tau, 1}^{k, \nu}(f), \end{aligned}$$

此处所有的级数均在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中收敛, 且对 $k \geq \ell_0$, $\tau \in I_k$ 和 $\nu = 1, 2, \dots, N(k, \tau)$, $D_{\tau, 1}^{k, \nu}(z)$ 是核为 $D_{\tau, 1}^{k, \nu}(z) := m_{Q_\tau^{k, \nu}}(S_k(\cdot, z))$ 的相应的积分算子. 对 $k \geq \ell_0$, $\tilde{D}_k$ 满足用 $\epsilon' \in [\epsilon, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$ 代替定义 2.3 的 (i) 和 (ii) 中的 ϵ_1 和 ϵ_2 之后的条件, 且

$$\int_{\mathcal{X}} \tilde{D}_k(x, y) d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \tilde{D}_k(x, y) d\mu(y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = \ell_0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } k > \ell_0 \text{ 时.} \end{cases}$$

注 3.4 记 $\ell_0 \in \mathbb{Z}$. 从定理 3.3 的证明中, 我们得 $\{\tilde{D}_k\}_{k=\ell_0}^\infty$ 的尺寸估计和正则性估计 (定义 2.3 (i) 和 (ii)) 的常数 C 依赖 j_0 和 ϵ' , 但不依赖 ℓ_0 . 这一观察在应用中起着重要作用. 而且类似文献 [23, 定理 3.4] 的证明, 可知定理 3.3 的连续形式也成立.

现证明当 $p \in (1, \infty]$ 时, 定义 2.8 中所有的 Hardy 空间均与 $L^p(\mathcal{X})$ 等价. 这需用到下面的几个技术性引理. 应用文献 [23, 定理 2.3] 得到如下结果 (略去其证明细节):

引理 3.5 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$, $\epsilon \in (0, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$, $\beta, \gamma \in (0, \epsilon]$ 以及 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI, 则存在正常数 C , 使得对所有的 $k \geq 0$ 和 $\varphi \in \mathcal{G}(\beta, \gamma)$, 有 $\|S_k(\varphi)\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)}$.

引理 3.6 令所有的记号如引理 3.5, 则对所有的 $\varphi \in \mathcal{G}(\beta, \gamma)$ 和 $\beta' \in (0, \beta)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\varphi) = \varphi$$

在 $\mathcal{G}(\beta', \gamma)$ 中成立.

证明 注意到引理 3.5 暗示了对任意 $k \geq 0$, $S_k(\varphi) \in \mathcal{G}(\beta, \gamma) \subset \mathcal{G}(\beta', \gamma)$, 故只需证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(\varphi) - \varphi\|_{\mathcal{G}(\beta', \gamma)} = 0$. 令

$$W_1 := \{z \in \mathcal{X} : d(z, x) \leq (1 + d(x, x_1))/2\}$$

和 $W_2 := \{z \in \mathcal{X} : d(z, x) > (1 + d(x, x_1))/2\}$. 应用定义 2.3 (v) 得

$$\begin{aligned} |S_k(\varphi)(x) - \varphi(x)| &\leq \int_{W_1} |S_k(x, z)| |\varphi(z) - \varphi(x)| d\mu(z) \\ &\quad + |\varphi(x)| \int_{W_2} |S_k(x, z)| d\mu(z) + \int_{W_2} |S_k(x, z)| |\varphi(z)| d\mu(z) \\ &=: Z_1 + Z_2 + Z_3. \end{aligned}$$

由 S_k 的尺寸条件和 φ 的正则性条件及假设 $\beta < \epsilon_2$ 和引理 3.1(iii) 得

$$Z_1 \lesssim 2^{-k\beta} \frac{1}{\mu(B(x, 1+d(x, x_1)))} \left(\frac{1}{1+d(x, x_1)} \right)^\gamma.$$

利用 W_2 的定义、 S_k 和 φ 的尺寸条件, 并仿照 Z_1 的估计, 得

$$Z_2 \lesssim 2^{-k\gamma} \frac{1}{\mu(B(x, 1+d(x, x_1)))} \left(\frac{1}{1+d(x, x_1)} \right)^\gamma.$$

注意到 $\int_{\mathcal{X}} |\varphi(x)| d\mu(x) \lesssim 1$, 由此及 S_k 的尺寸条件与 W_2 的定义知

$$Z_3 \lesssim 2^{-k\gamma} \frac{1}{\mu(B(x, 1+d(x, x_1)))} \left(\frac{1}{1+d(x, x_1)} \right)^\gamma.$$

因此, 对所有的 $x \in \mathcal{X}$,

$$|S_k(\varphi)(x) - \varphi(x)| \lesssim 2^{-k(\beta \wedge \gamma)} \frac{1}{\mu(B(x, 1+d(x, x_1)))} \left(\frac{1}{1+d(x, x_1)} \right)^\gamma. \quad (3.2)$$

当 $x, x' \in \mathcal{X}$ 满足 $d(x, x') \leq (1+d(x, x_1))/2$ 时, 由引理 3.5 和 φ 的正则性得

$$\begin{aligned} & |[S_k(\varphi)(x) - \varphi(x)] - [S_k(\varphi)(x') - \varphi(x')]| \\ & \lesssim \left(\frac{d(x, x')}{1+d(x, x_1)} \right)^\beta \frac{1}{\mu(B(x, 1+d(x, x_1)))} \left(\frac{1}{1+d(x, x_1)} \right)^\gamma; \end{aligned}$$

另一方面, 由 (3.2) 式和假设 $d(x, x') \leq (1+d(x, x_1))/2$ 知,

$$\begin{aligned} & |[S_k(\varphi)(x) - \varphi(x)] - [S_k(\varphi)(x') - \varphi(x')]| \\ & \lesssim 2^{-k(\beta \wedge \gamma)} \frac{1}{\mu(B(x, 1+d(x, x_1)))} \left(\frac{1}{1+d(x, x_1)} \right)^\gamma. \end{aligned}$$

对上面最后两个式子取几何平均得

$$\begin{aligned} & |[S_k(\varphi)(x) - \varphi(x)] - [S_k(\varphi)(x') - \varphi(x')]| \\ & \lesssim 2^{-k(\beta \wedge \gamma)(1-\sigma)} \left(\frac{d(x, x')}{1+d(x, x_1)} \right)^{\sigma\beta} \frac{1}{\mu(B(x, 1+d(x, x_1)))} \left(\frac{1}{1+d(x, x_1)} \right)^\gamma, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 $\sigma \in (0, 1)$. 由估计 (3.2) 和 (3.3) 即得要证的结果, 这完成了引理 3.6 的证明.

命题 3.7 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$, $\epsilon \in (0, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$, $\beta \in (0, \epsilon)$, $\gamma \in (0, \epsilon]$ 以及 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI, 则对所有的 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\varphi) = \varphi$ 在 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 中成立; 且对所有的 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(f) = f$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立.

证明 不妨设 $k \in \mathbb{N}$. 若 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 则 $\varphi \in \mathcal{G}(\beta, \gamma)$ 且存在 $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\epsilon, \epsilon)$, 使得当 $j \rightarrow \infty$ 时, $\|\varphi - \phi_j\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} \rightarrow 0$. 应用引理 3.5 得 $S_k(\phi_j) \in \mathcal{G}(\epsilon, \epsilon)$ 以及

$$\lim_{j \rightarrow 0} \|S_k(\varphi) - S_k(\phi_j)\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} \lesssim \lim_{j \rightarrow 0} \|\varphi - \phi_j\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} = 0,$$

这暗示了 $S_k(\varphi) \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$. 对任意 $j, k \in \mathbb{N}$, 再次应用引理 3.5 得

$$\|S_k(\varphi) - \varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} \lesssim \|S_k(\phi_j) - \phi_j\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} + \|\phi_j - \varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)},$$

由此及引理 3.6 (此处需 $\beta < \epsilon$) 知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(\varphi) - \varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} = 0.$$

再利用关于对偶性的标准论证即得命题 3.7 的第 2 个结论.

命题 3.8 记 $H^{*,1}(\mathcal{X})$ 如定义 2.8, 则 $H^{*,1}(\mathcal{X}) \subset L^1(\mathcal{X})$.

证明 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$ 及 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI. 任给 $f \in H^{*,1}(\mathcal{X})$, 由定义得 $\|f^*\|_{L^1(\mathcal{X})} < \infty$. 注意到 (2.3) 式和定义 2.3 暗示了

$$\left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} |S_k(f)| \right\|_{L^1(\mathcal{X})} \lesssim \|f^*\|_{L^1(\mathcal{X})}.$$

因此 $\{S_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^1(\mathcal{X})$ 中的有界集. 故应用文献 [39, 定理 III.C.12] 得, $\{S_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 在 $L^1(\mathcal{X})$ 中相对弱紧. 由 Eberlein-Šmulian 定理 (见文献 [39, II.C]) 知, 存在 $\{S_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 的子序列 $\{S_{k_j}(f)\}_{j \in \mathbb{N}}$ 在 $L^1(\mathcal{X})$ 中弱收敛, 因此它在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中收敛. 由此以及命题 3.7 即得 $f \in L^1(\mathcal{X})$, 从而完成了命题 3.8 的证明.

命题 3.9 记 $p \in (0, \infty]$ 且所有的记号如定义 2.8, 则对任给 $\alpha \in (0, \infty)$, 存在正常数 C , 使得对所有的 $f \in L^p(\mathcal{X})$ 和 $x \in \mathcal{X}$, 有 $f^*(x) \leq C\mathcal{M}(f)(x)$ 和 $\mathcal{M}_d(f)(x) \leq C\mathcal{M}(\mathcal{M}_\alpha(f))(x)$. 进一步, 当 $p \in (1, \infty]$ 时, 存在常数 C , 使得对所有的 $f \in L^p(\mathcal{X})$,

$$\|\mathcal{M}_d(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} \leq C\|\mathcal{M}_\alpha(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} \leq C\|f^*\|_{L^p(\mathcal{X})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathcal{X})}.$$

证明 任给 $x \in \mathcal{X}$ 和 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 满足 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, r, \beta, \gamma)} \leq 1$ 对某 $r > 0$ 成立, 由 φ 的尺寸条件和引理 3.1(iv) 知

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &\lesssim \int_{d(z, x) \leq r} \frac{1}{\mu(B(x, r))} |f(z)| d\mu(z) \\ &\quad + \int_{d(z, x) > r} \frac{1}{\mu(B(z, d(z, x)))} \frac{r^\gamma}{d(x, z)^\gamma} |f(z)| d\mu(z) \lesssim \mathcal{M}(f)(x), \end{aligned} \quad (3.4)$$

这进一步暗示了对所有的 $x \in \mathcal{X}$, 有 $f^*(x) \lesssim \mathcal{M}(f)(x)$.

任给 $x \in \mathcal{X}$, 若 x 包含在某个二进方体 Q_α^k 中, 则由引理 2.7 知,

$$B(z_\alpha^k, C_6 2^{-k}) \subset Q_\alpha^k \subset B(x, C_5 2^{-k}) \subset B(z_\alpha^k, 2C_5 2^{-k}).$$

再应用 (2.2) 式即得 $\mu(Q_\alpha^k) \geq \mu(B(z_\alpha^k, C_6 2^{-k})) \gtrsim \mu(B(x, C_5 2^{-k}))$. 由此及 (2.6) 式推出对所有的 $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathcal{M}_d(f)(x) \lesssim \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{\mu(B(x, C_5 2^{-k}))} \int_{B(x, C_5 2^{-k})} \mathcal{M}_\alpha(f)(y) d\mu(y) \right\} \lesssim \mathcal{M}(\mathcal{M}_\alpha(f))(x).$$

由此和注 2.9 (ii) 及当 $p \in (1, \infty]$ 时 $\mathcal{M}$ 在 $L^p(\mathcal{X})$ 上的有界性 [5], 即可推得要证的不等式, 从而完成了命题 3.9 的证明.

定理 3.10 记 $p \in (1, \infty]$ 且所有的记号如定义 2.8, 则 $H_d^p(\mathcal{X}) = L^p(\mathcal{X})$. 此处等号在上述意义下成立: 存在不依赖于 f 的正常数 C , 使得若 $f \in L^p(\mathcal{X})$, 则 $f \in H_d^p(\mathcal{X})$ 且 $\|f\|_{H_d^p(\mathcal{X})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathcal{X})}$; 反之, 若 $f \in H_d^p(\mathcal{X})$, 则存在函数 $\tilde{f} \in L^p(\mathcal{X})$, 使得对所有的 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 有

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}(x) \varphi(x) d\mu(x).$$

而且, 存在不依赖于 f 和 x 的正常数 C , 使得 $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathcal{X})} \leq C\|f\|_{H_d^p(\mathcal{X})}$ 和 $|\tilde{f}(x)| \leq Cf^*(x)$ 几乎处处成立.

证明 由 $L^p(\mathcal{X}) \subset (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 和命题 3.9 知 $L^p(\mathcal{X}) \subset H_d^p(\mathcal{X})$. 反之, 若 $f \in H_d^p(\mathcal{X})$, 先证对所有的 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 有

$$|\langle f, \varphi \rangle| \lesssim \|f\|_{H_d^p(\mathcal{X})} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathcal{X})}, \quad (3.5)$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$. 为此, 固定满足 (3.1) 式的充分大的 j_0 . 对 $\ell_0 = j \in \mathbb{Z}$ 应用定理 3.3 即得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\tau \in I_j} \sum_{\nu=1}^{N(j,\tau)} \int_{Q_{\tau}^{j,\nu}} \tilde{D}_j(x, y) d\mu(y) D_{\tau,1}^{j,\nu}(f) \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k,\tau)} \mu(Q_{\tau}^{k,\nu}) \tilde{D}_k(x, y_{\tau}^{k,\nu}) D_{\tau,1}^{k,\nu}(f) \end{aligned} \quad (3.6)$$

在 $(\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma))'$ 中成立. 而且, 对任意 $Q_{\tau}^{k,\nu} \ni y_{\tau}^{k,\nu}$, 其中 $k \geq j$, 由定义知 $Q_{\tau}^{k,\nu} \subset Q_{\tau}^k$, 对某 $\tau' \in I_k$ 成立. 由此及 (2.2) 式推出 $\mu(Q_{\tau'}^k) \lesssim 2^{nj_0} \mu(Q_{\tau}^{k,\nu})$. 故对任意的 $y_{\tau}^{k,\nu} \in Q_{\tau}^{k,\nu}$,

$$|D_{\tau,1}^{k,\nu}(f)| \lesssim 2^{nj_0} \frac{1}{\mu(Q_{\tau'}^k)} \int_{Q_{\tau'}^k} |S_k(f)(z)| d\mu(z) \lesssim \mathcal{M}_d(f)(y_{\tau}^{k,\nu}). \quad (3.7)$$

任给 $\varphi \in \mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$, 命题 3.7 暗示了对所有的 $j \in \mathbb{Z}$, 有 $S_j(\varphi) \in \mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$. 由此及 (3.6) 和 (3.7) 式得对所有的 $\varphi \in \mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$, $j \in \mathbb{Z}$ 和 $y_{\tau}^{j,\nu} \in Q_{\tau}^{j,\nu}$,

$$\begin{aligned} |\langle f, S_j \varphi \rangle| &\lesssim \sum_{\tau \in I_j} \sum_{\nu=1}^{N(j,\tau)} \left| \int_{Q_{\tau}^{j,\nu}} \tilde{D}_j^*(S_j \varphi)(y) d\mu(y) \right| \mathcal{M}_d(f)(y_{\tau}^{j,\nu}) \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k,\tau)} \mu(Q_{\tau}^{k,\nu}) |\tilde{D}_k^*(S_j \varphi)(y_{\tau}^{k,\nu})| \mathcal{M}_d(f)(y_{\tau}^{k,\nu}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

此处及下文中, $\tilde{D}_k^*$ 代表核为 $\tilde{D}_k^*(x, y) = \tilde{D}_k(y, x)$ 的积分算子. 对任意 $k, j \in \mathbb{Z}$, 当 $k > j$ 时, 类似文献 [23, 引理 3.1] 的论证 (当 $k = j$ 时类似文献 [23, 引理 3.8] 的论证), 得对任意的 $\epsilon'_1 \in (0, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$,

$$|\tilde{D}_k^*(S_j \varphi)(z)| \lesssim 2^{-(k-j)\epsilon'_1} \frac{1}{V_{2^{-j}}(y) + V_{2^{-j}}(z) + V(y, z)} \frac{2^{-j\epsilon'_1}}{(2^{-j} + d(x, y))^{\epsilon'_1}}. \quad (3.9)$$

由 (3.9) 式及类似 (3.4) 式的证明知, 对任意 $k \geq j$ 和 $x \in \mathcal{X}$,

$$|D_k^*(S_j \varphi)(x)| \lesssim 2^{-(k-j)\epsilon'_1} \mathcal{M}(\varphi)(x). \quad (3.10)$$

而且, 从 (3.9) 式和引理 3.1 (iii) 直接可推出对所有的 $k \geq j$,

$$\left| \int_{\mathcal{X}} D_k^*(S_j \varphi)(y) d\mu(y) \right| \lesssim 2^{-(k-j)\epsilon'_1} \|\varphi\|_{L^1(\mathcal{X})}. \quad (3.11)$$

当 $p \in (1, \infty)$ 时, 由 (3.8) 式、 $y_{\tau}^{k,\nu}$ 的任意性、(3.10) 式、Hölder 不等式及 $p \in (1, \infty]$ 时 $\mathcal{M}$ 在 $L^p(\mathcal{X})$ 上的有界性, 进一步有

$$\begin{aligned} |\langle f, S_j \varphi \rangle| &\lesssim \sum_{k=j}^{\infty} \int_{\mathcal{X}} |D_k^*(S_j \varphi)(y)| \mathcal{M}_d(f)(y) d\mu(y) \\ &\lesssim \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-(k-j)\epsilon'_1} \|\mathcal{M}(\varphi)\|_{L^{p'}(\mathcal{X})} \|\mathcal{M}_d(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} \lesssim \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathcal{X})} \|f\|_{H_d^p(\mathcal{X})}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

当 $p = \infty$ 时, 由 (3.8) 和 (3.11) 式直接可推出 (3.12) 式. 对任意 $\varphi \in \mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$, 由命题 3.7 得 $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j(\varphi) = \varphi$ 在 $\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$ 中成立, 这与 (3.12) 式一起暗示了 (3.5) 式.

由 (3.5) 式和 $\mathcal{G}_0^{\epsilon}(\beta, \gamma)$ 在 $L^{p'}(\mathcal{X})$ 中的稠密性 (见文献 [23, 推论 2.1]) 推出 f 可唯一地延拓为 $L^{p'}(\mathcal{X})$ 上的有界线性泛函, 其中 $1/p + 1/p' = 1$. 利用著名的 Riesz 表示定理得, 存在唯一的函数 $\tilde{f} \in L^p(\mathcal{X})$, 使得对所有的 $\varphi \in L^{p'}(\mathcal{X})$,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}(x) \varphi(x) d\mu(x),$$

且 $\|f\|_{L^p(\mathcal{X})} \lesssim \|f\|_{H_\alpha^p(\mathcal{X})}$. 引理 3.1 (v) 和 Riesz 引理进一步暗示了, 存在 $\{k_i\}_i \subset \mathbb{N}$, 使得 $\tilde{f}(x) = \lim_{k_i \rightarrow \infty} S_{k_i} \tilde{f}(x)$ 对几乎所有 $x \in \mathcal{X}$ 成立. 由此及 (2.3) 式知, 对几乎所有 $x \in \mathcal{X}$,

$$|\tilde{f}(x)| \leq \lim_{k_i \rightarrow \infty} |S_{k_i} \tilde{f}(x)| \lesssim \tilde{f}^*(x) = f^*(x),$$

从而完成了定理 3.10 的证明.

结合命题 3.9 和定理 3.10 即得如下结论:

推论 3.11 记所有的记号如定义 2.8, 则当 $p \in (1, \infty]$ 时, $H_\alpha^p(\mathcal{X}) = H_\alpha^p(\mathcal{X}) = H^{*,p}(\mathcal{X}) = L^p(\mathcal{X})$ 且具有等价的范数.

为证明 $p \leq 1$ 时上述定义的 Hardy 空间彼此等价, 需要以下的技术性引理 (见文献 [23, 引理 5.2]):

引理 3.12 令 $\epsilon > 0$, $k', k \in \mathbb{Z}$ 以及 $y_\tau^{k,\nu}$ 为 $Q_\tau^{k,\nu}$ 中任意固定的一点, 其中 $\tau \in I_k$ 且 $\nu = 1, 2, \dots, N(k, \tau)$, 则对 $r \in (n/(n+\epsilon), 1]$, 存在正常数 C , 使得对所有的 $a_\tau^{k,\nu} \in \mathbb{C}$ 和 $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k,\tau)} \mu(Q_\tau^{k,\nu}) \frac{1}{V_{2^{-(k' \wedge k)}}(x) + V(x, y_\tau^{k,\nu})} \frac{2^{-(k' \wedge k)\epsilon}}{(2^{-(k' \wedge k)} + d(x, y_\tau^{k,\nu}))^\epsilon} |a_\tau^{k,\nu}| \\ & \leq C 2^{[(k' \wedge k) - k]n(1-1/r)} \left\{ \mathcal{M} \left(\sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k,\tau)} \left| a_\tau^{k,\nu} \right|^r \chi_{Q_\tau^{k,\nu}} \right) (x) \right\}^{1/r}, \end{aligned}$$

其中 C 依赖 r 但不依赖 k, k', τ 和 ν .

定理 3.13 令所有的记号如定义 2.8. 记 $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$ 且 $\beta, \gamma \in (n(1/p-1), \epsilon)$, 则 $H_\alpha^p(\mathcal{X}) = H_\alpha^p(\mathcal{X}) = H^{*,p}(\mathcal{X})$ 且具有等价的拟范数.

证明 任给 $\alpha \in (0, \infty)$, 由注 2.9 (ii) 知 $H^{*,p}(\mathcal{X}) \subset H_\alpha^p(\mathcal{X})$, 且对所有的 $f \in H^{*,p}(\mathcal{X})$ 有 $\|f\|_{H_\alpha^p(\mathcal{X})} \lesssim \|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})}$.

为证 $H_\alpha^p(\mathcal{X}) \subset H^{*,p}(\mathcal{X})$, 只需证明对任意 $\kappa \in (n/[n + (\beta \wedge \gamma)], 1]$, 存在正常数 C_κ , 使得对所有的 $f \in H_\alpha^p(\mathcal{X})$ 和 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$f^*(x) \leq C_\kappa \{ \mathcal{M}([M_\alpha(f)]^\kappa)(x) \}^{1/\kappa}. \quad (3.13)$$

先设 (3.13) 式对某 $\kappa \in (n/[n + (\beta \wedge \gamma)], p)$ 成立, 由此及当 $p \in (1, \infty]$ 时 $\mathcal{M}$ 在 $L^p(\mathcal{X})$ 上的有界性知, 对所有的 $f \in H_\alpha^p(\mathcal{X})$, 有

$$\|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})} = \|f^*\|_{L^p(\mathcal{X})} \lesssim \{ \mathcal{M}([M_\alpha(f)]^\kappa) \}^{1/\kappa} \|f\|_{L^p(\mathcal{X})} \lesssim \|M_\alpha(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} = \|f\|_{H_\alpha^p(\mathcal{X})},$$

此即暗示了 $H_\alpha^p(\mathcal{X}) \subset H^{*,p}(\mathcal{X})$.

为证 (3.13) 式, 任意固定 $x \in \mathcal{X}$. 对任意的 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 且 φ 满足 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, r, \beta, \gamma)} \leq 1$ 对某 $r > 0$ 成立, 取 $\ell_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $2^{-\ell_0} \leq r < 2^{-\ell_0+1}$. 易证存在不依赖于 x 和 ℓ_0 的正常数 C , 使得 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, 2^{-\ell_0}, \beta, \gamma)} \leq C$. 取 $j_0 \in \mathbb{N}$ 充分大且满足 (3.1) 式和 $C_5 2^{-j_0} < \alpha$. 对此 j_0 应用定理 3.3 得, 对任意 $y_\tau^{k,\nu} \in Q_\tau^{k,\nu}$, 有

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| & \leq \left| \sum_{\tau \in I_{\ell_0}} \sum_{\nu=1}^{N(\ell_0, \tau)} \int_{Q_\tau^{\ell_0, \nu}} \tilde{D}_{\ell_0}^*(\varphi)(y) d\mu(y) D_{\tau, 1}^{\ell_0, \nu}(f) \right| \\ & + \left| \sum_{k=\ell_0+1}^{\infty} \sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k, \tau)} \mu(Q_\tau^{k, \nu}) \tilde{D}_k^*(\varphi)(y_\tau^{k, \nu}) D_k(f)(y_\tau^{k, \nu}) \right|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

由于对所有的 $k \geq \ell_0$, $\tau \in I_k$ 和 $\nu = 1, 2, \dots, N(\tau, k)$, 有 $\text{diam}(Q_\tau^{k,\nu}) \leq C_5 2^{-k-j_0} < \alpha 2^{-k}$, 则对任意 $y_\tau^{\ell_0,\nu} \in Q_\tau^{\ell_0,\nu}$,

$$|D_{\tau,1}^{\ell_0,\nu}(f)| = \left| \frac{1}{\mu(Q_\tau^{\ell_0,\nu})} \int_{Q_\tau^{\ell_0,\nu}} S_{\ell_0}(f)(w) d\mu(w) \right| \leq \mathcal{M}_\alpha(f)(y_\tau^{\ell_0,\nu}); \quad (3.15)$$

并且当 $k > \ell_0$ 时, 对任意的 $y_\tau^{k,\nu} \in Q_\tau^{k,\nu}$,

$$|D_k(f)(y_\tau^{k,\nu})| \leq |S_k(f)(y_\tau^{k,\nu})| + |S_{k-1}(f)(y_\tau^{k,\nu})| \leq 2\mathcal{M}_\alpha(f)(y_\tau^{k,\nu}). \quad (3.16)$$

类似文献 [23, 引理 3.1] 的证明, 可证对任意 $k \geq \ell_0$, $y \in \mathcal{X}$ 和 $\epsilon'_1 \in (0, \beta \wedge \gamma)$,

$$|\tilde{D}_k^*(\varphi)(y)| \lesssim 2^{-(k-\ell_0)\epsilon'_1} \frac{1}{\mu(B(y, 2^{-\ell_0} + d(y, x)))} \frac{2^{-\ell_0\gamma}}{(2^{-\ell_0} + d(y, x))^\gamma}. \quad (3.17)$$

进一步, 由关于度量 d 的三角不等式和 (2.2) 式知, 对任意的 $y_\tau^{\ell_0,\nu}$, $z \in Q_\tau^{\ell_0,\nu}$,

$$2^{-\ell_0} + d(y_\tau^{\ell_0,\nu}, x) \sim 2^{-\ell_0} + d(z, x) \quad (3.18)$$

且

$$\mu(B(y_\tau^{\ell_0,\nu}, 2^{-\ell_0} + d(y_\tau^{\ell_0,\nu}, x))) \sim \mu(B(z, 2^{-\ell_0} + d(z, x))). \quad (3.19)$$

利用 (3.14) 式、估计 (3.15)–(3.19) 式、引理 3.12 和 $y_\tau^{k,\nu}$ 在 $Q_\tau^{k,\nu}$ 中的任意性, 我们推出对任意 $\kappa \in (n/(n + (\beta \wedge \gamma)), 1]$,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \lesssim \sum_{k=\ell_0}^{\infty} 2^{-(k-\ell_0)[\epsilon'_1 + n(1-1/\kappa)]} \left\{ \mathcal{M} \left(\sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k,\tau)} [\mathcal{M}_\alpha(f)]^\kappa \chi_{Q_\tau^{k,\nu}} \right) (x) \right\}^{1/\kappa}. \quad (3.20)$$

注意到

$$\mathcal{M} \left(\sum_{\tau \in I_k} \sum_{\nu=1}^{N(k,\tau)} [\mathcal{M}_\alpha(f)]^\kappa \chi_{Q_\tau^{k,\nu}} \right) (x) = \mathcal{M}([\mathcal{M}_\alpha(f)]^\kappa)(x), \quad (3.21)$$

因此, 对任意的 $\kappa \in (n/(n + \beta \wedge \gamma), \epsilon)$, 若取 $\epsilon'_1 \in (0, \beta \wedge \gamma)$ 且 $\epsilon'_1 > n(1/\kappa - 1)$, 则结合 (3.20) 和 (3.21) 式即得 (3.13) 式. 故对任意的 $\alpha \in (0, \infty)$, $H^{*,p}(\mathcal{X}) = H_\alpha^p(\mathcal{X})$ 且具有等价的拟范数.

用 (3.6) 式代替 (3.14) 式, 用 (3.7) 式代替 (3.15) 和 (3.16) 式, 并重复 $H_\alpha^p(\mathcal{X}) \subset H^{*,p}(\mathcal{X})$ 的证明, 得 $H_d^p(\mathcal{X}) \subset H^{*,p}(\mathcal{X})$. 由引理 2.7 (iv) 和 (2.6) 式知 $\mathcal{M}_d(f)(x) \leq \mathcal{M}_{C_5}(f)(x)$, 这暗示了 $H_{C_5}^p(\mathcal{X}) \subset H_d^p(\mathcal{X})$. 由此及 $H_{C_5}^p(\mathcal{X}) = H^{*,p}(\mathcal{X})$ 进一步暗示了 $H^{*,p}(\mathcal{X}) \subset H_d^p(\mathcal{X})$. 故 $H^{*,p}(\mathcal{X}) = H_d^p(\mathcal{X})$ 且具有等价的拟范数, 从而完成了定理 3.13 的证明.

应用定理 3.3 的 Calderón 再生公式, 也可验证 Hardy 空间的定义不依赖分布空间的选取; 详见文献 [23, 命题 5.3].

命题 3.14 记所有的记号如定义 2.8, $\alpha \in (0, \infty)$ 且 $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$. 若 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta_1, \gamma_1))'$, 其中

$$n(1/p - 1) < \beta_1, \quad \gamma_1 < \epsilon, \quad (3.22)$$

且 $\|f\|_{H_\alpha^p(\mathcal{X})} < \infty$, 则对满足 (3.22) 式的任意的 β_2 和 γ_2 , 均有 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta_2, \gamma_2))'$.

注 3.15 记 $\epsilon \in (0, 1)$ 及 $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$, 则

(i) 任给 β 和 γ 满足 (3.22) 式, 由定理 3.13 知 $H_\alpha^p(\mathcal{X})$ 和 $H_d^p(\mathcal{X})$ 的定义不依赖于 $\alpha \in (0, \infty)$ 及 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 的选取, 其中 $(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2) > \epsilon$, $\epsilon_1 \leq 1$ 且 $\epsilon_3 > 0$.

(ii) 定理 3.13 和命题 3.14 蕴含着 $H^{*,p}(\mathcal{X})$, $H_\alpha^p(\mathcal{X})$ 和 $H_d^p(\mathcal{X})$ 的定义也不依赖 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 的选取, 其中 $\alpha \in (0, \infty)$, β 和 γ 满足 (3.22) 式.

(iii) 在下文中, 任给 $p \in (n/(n+1), 1]$, 当提到 Hardy 空间 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 和 $H_\alpha^p(\mathcal{X})$ ($\alpha \in (0, \infty)$) 或 $H_d^p(\mathcal{X})$ 时, 总设已选取 $\epsilon \in (n(1/p-1), 1)$, 使得 $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$, 且设这些 Hardy 空间是经由某分布空间 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 和某 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 所定义, 其中 β 及 γ 满足 (3.22) 式, $(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2) > \epsilon$, $\epsilon_1 \leq 1$ 且 $\epsilon_3 > 0$. 由定理 3.13, 这些 Hardy 空间相互一致.

类似文献 [6, 引理 (2.8)] (也见文献 [9, 定理 2.1]) 的证明, 可证如下结论 (略去其证明细节):

命题 3.16 记 $p \in (n/(n+1), 1]$, 则 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 是完备的拟 Banach 空间.

4 原子分解

以下关于 Hardy 空间 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ ($p \in (n/(n+1), 1]$) 原子分解的程序类似如文献 [6] (也见文献 [9]) 中的过程. 为缩短本文长度, 只给出证明的大致框架. 先从原子和原子 Hardy 空间的定义开始.

定义 4.1 记 $p \in (0, 1]$ 且 $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$. 称函数 $a \in L^q(\mathcal{X})$ 为 (p, q) - 原子, 若

(A1) $\text{supp } a \subset B(x_0, r)$ 对某 $x_0 \in \mathcal{X}$ 及 $r > 0$ 成立;

(A2) $\|a\|_{L^q(\mathcal{X})} \leq [\mu(B(x_0, r))]^{1/q-1/p}$;

(A3) $\int_{\mathcal{X}} a(x) d\mu(x) = 0$.

定义 4.2 记 $p \in (0, 1]$, $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$, $\epsilon \in (0, 1)$ 且 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon)$. 称分布 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 为 $H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 中的元素, 若存在 $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 及 (p, q) - 原子 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, 使得 $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j a_j$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立且 $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|^p < \infty$. 进一步, 定义

$$\|f\|_{H_{\text{at}}^{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \inf \left\{ \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|^p \right)^{1/p} \right\},$$

其中下确界取遍 f 的所有上述分解.

注 4.3 (i) 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$, $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$ 和 $\beta, \gamma \in (n(1/p-1), \epsilon)$. 由于任一个 (p, ∞) - 原子均是 (p, q) - 原子, 故 $H_{\text{at}}^{p,\infty}(\mathcal{X}) \subset H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X})$. 下面的定理 4.5 和 4.16 将进一步证明 $H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X}) \subset H^{*,p}(\mathcal{X})$ 和 $H^{*,p}(\mathcal{X}) \subset H_{\text{at}}^{p,\infty}(\mathcal{X})$. 这意味着 $H_{\text{at}}^{p,\infty}(\mathcal{X}) = H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X})$.

(ii) 在不引起混淆的情形下, 将 $H_{\text{at}}^{p,\infty}(\mathcal{X})$ 简记为 $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$.

类似文献 [6, 引理 2.3] 的论证可得如下结论; 此处略去其证明细节.

引理 4.4 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$, $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$, $\beta \in (n(1/p-1), \epsilon]$ 和 $\gamma \in (0, \epsilon]$, 则存在正常数 $C_{p,q}$, 使得对所有的 $h \in L^q(\mathcal{X})$ 满足 $\int_{\mathcal{X}} h(x) d\mu(x) = 0$ 及 $\text{supp } h \subset B(x_0, r_0)$, 其中 $x_0 \in \mathcal{X}$ 且 $r_0 > 0$, 有

$$\int_{\mathcal{X}} [h^*(x)]^p d\mu(x) \leq C_{p,q} [\mu(B(x_0, r_0))]^{1-p/q} \|h\|_{L^q(\mathcal{X})}^p.$$

利用引理 4.4 和一个标准的论证即得下面的命题.

命题 4.5 记所有的记号如引理 4.4, 则 $H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X}) \subset H^{*,p}(\mathcal{X})$; 且存在正常数 C , 使得对所有的 $f \in H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X})$, $\|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})} \leq C \|f\|_{H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X})}$.

本节余下的部分致力于依照文献 [6] 中的程序来证明 $H^{*,p}(\mathcal{X}) \subset H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 当 Ω 为有界集 (即 Ω 包含于 $\mathcal{X}$ 的某个球) 时, 下面的引理 4.6 在文献 [4, pp. 70–71] 和文献 [5, 定理 3.2] 中已被证明. 目前引理 4.6 的形式陈述在文献 [4, p. 70] 中, 但并未证明; 关于此引理的另一

形式也见文献 [6, p. 277]. 借鉴文献 [3, pp. 15–16] 的一些想法, 可给出引理 4.6 的详细证明 (略去其细节).

引理 4.6 令 Ω 为 $\mathcal{X}$ 的真开子集, 且令 $d(x) := \inf\{d(x, y) : y \notin \Omega\}$. 任给 $C \geq 1$, 记 $r(x) := d(x)/(2C)$, 则存在仅依赖 C 和 C_3 但不依赖 Ω 的正整数 M , 及序列 $\{x_k\}_k$, 其中简记 $r(x_k)$ 为 r_k , 使得

- (i) $\{B(x_k, r_k/4)\}_k$ 互不相交;
- (ii) $\cup_k B(x_k, r_k) = \Omega$;
- (iii) 任给 k , 则 $B(x_k, Cr_k) \subset \Omega$;
- (iv) 对任意给定的 k , 若 $x \in B(x_k, Cr_k)$, 则 $Cr_k < d(x) < 3Cr_k$;
- (v) 对任意给定的 k , 存在 $y_k \notin \Omega$, 使得 $d(x_k, y_k) < 3Cr_k$;
- (vi) 对任意给定的 k , 与球 $B(x_k, Cr_k)$ 相交非空的球 $B(x_i, Cr_i)$ 的个数不超过 M .

注 4.7 若 Ω 为 $\mathcal{X}$ 的有界开子集且引理 4.6 中的 $\{r_k\}_k$ 为一无限正序列, 则由文献 [5, pp. 623–624] 和 [4, p. 69] 的证明, 进一步得 $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$.

利用引理 4.6 并仿照文献 [6, 引理 2.16] 的证明, 可得如下的技术性引理:

引理 4.8 记 Ω 为 $\mathcal{X}$ 中具有有限测度的开子集. 令 $\{x_k\}_k$ 和 $\{r_k\}_k$ 为引理 4.6 中由 $C = 15$ 所给出的序列, 则存在非负函数列 $\{\phi_k\}_k$ 满足:

- (i) 对任给 k , 有 $0 \leq \phi_k \leq 1$, $\text{supp } \phi_k \subset B(x_k, 2r_k)$ 且 $\sum_k \phi_k = \chi_\Omega$;
- (ii) 对任给 k 和 $x \in B(x_k, r_k)$, 有 $\phi_k(x) \geq 1/M$;
- (iii) 存在不依赖 Ω 的正常数 $\tilde{C}$, 使得对所有的 k 和 $\epsilon \in (0, 1]$, 有 $\|\phi_k\|_{\mathcal{G}(x_k, r_k, \epsilon, \epsilon)} \leq \tilde{C}V_{r_k}(x_k)$.

从引理 4.8 和类似文献 [6, 引理 3.1] 的一个证明可导出如下结论:

引理 4.9 记 $\epsilon \in (0, 1]$, $\beta, \gamma \in (0, \epsilon]$, 及 $\{\phi_k\}_k$ 为如引理 4.8 中所得的与开集 Ω 相关的单位分解, 则对任意给定的 k , 线性算子

$$\Phi_k(\varphi)(x) := \phi_k(x) \left[\int_{\mathcal{X}} \phi_k(z) d\mu(z) \right]^{-1} \int_{\mathcal{X}} [\varphi(x) - \varphi(z)] \phi_k(z) d\mu(z)$$

在 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 上有界且算子范数依赖于 k .

引理 4.10 记 $\beta > 0$, $q \in (n/(n + \beta), \infty)$ 和 $M \in \mathbb{N}$, 则存在仅依赖于 q, β 和 M 的正常数 C , 使得对任意的点列 $\{x_k\}_k \subset \mathcal{X}$ 和任意的正数列 $\{r_k\}_k$, 若它们满足 $\mathcal{X}$ 中的任一点属于球列 $\{B(x_k, r_k)\}_k$ 中的至多 M 个球, 则有

$$\int_{\mathcal{X}} \left[\sum_k \frac{\mu(B(x_k, r_k))}{\mu(B(x, r_k + d(x, x_k)))} \left(\frac{r_k}{r_k + d(x_k, x)} \right)^\beta \right]^q d\mu(x) \leq C \mu \left(\bigcup_k B(x_k, r_k) \right). \quad (4.1)$$

证明 由 (2.2) 式和 $\mathcal{M}$ 的定义知,

$$\frac{r_k}{r_k + d(x_k, x)} \lesssim \left(\frac{\mu(B(x_k, r_k))}{\mu(B(x, r_k + d(x, x_k)))} \right)^{1/n} \lesssim [\mathcal{M}(\chi_{B(x_k, r_k)})(x)]^{1/n}.$$

由此不等式, 假设 $q(n + \beta)/n > 1$, RD- 空间上的 Fefferman-Stein 向量值不等式^[40] 以及

$\{B(x_k, r_k)\}_k$ 的有限交性质, 得 (4.1) 式的左边不超过常数倍的

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \left[\sum_k (\mathcal{M}(\chi_{B(x_k, r_k)})(x))^{(n+\beta)/n} \right]^q d\mu(x) &\lesssim \int_{\mathcal{X}} \left[\sum_k (\chi_{B(x_k, r_k)}(x))^{(n+\beta)/n} \right]^q d\mu(x) \\ &\lesssim \mu\left(\bigcup_k B(x_k, r_k)\right), \end{aligned}$$

从而完成了引理 4.10 的证明.

记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$, $\beta, \gamma \in (n(1/p-1), \epsilon)$ 以及 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 如 (2.3) 式所定义. 对 $f \in H^{*,p}(\mathcal{X})$ 和 $t \in (0, \infty)$, 令 $\Omega := \{x \in \mathcal{X} : f^*(x) > t\}$. 由注 2.9 (iii), Ω 开. 显然 $\mu(\Omega) < \infty$. 记 $\{\phi_k\}_k$ 为由引理 4.8 得到的与 Ω 相关的单位分解. 令 $\{\Phi_k\}_k$ 为引理 4.9 中定义的相应的算子列. 对任意 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, 定义分布 b_k 如下:

$$\langle b_k, \varphi \rangle := \langle f, \Phi_k(\varphi) \rangle. \quad (4.2)$$

依照文献 [6, 引理 3.2] 或 [9, 引理 3.7] 中的逼近, 可得如下的 Calderón-Zygmund 型分解. 为限制本文的长度, 略去其证明细节. 在下文中, 对任意集合 $E \subset \mathcal{X}$, 记 $\mathcal{X} \setminus E$ 为 E^c .

命题 4.11 令所有的记号如上, 则存在正常数 C , 使得对所有的 k 和 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$\begin{aligned} b_k^*(x) &\leq Ct \frac{V_{r_k}(x_k)}{\mu(B(x_k, r_k + d(x, x_k)))} \left(\frac{r_k}{r_k + d(x_k, x)} \right)^\beta \chi_{B(x_k, 10r_k)}(x) \\ &\quad + Cf^*(x) \chi_{B(x_k, 10r_k)}(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

及

$$\int_{\mathcal{X}} [b_k^*(x)]^p d\mu(x) \leq C \int_{B(x_k, 10r_k)} [f^*(x)]^p d\mu(x); \quad (4.4)$$

此外, 级数 $\sum_k b_k$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中收敛到分布 b , 且

$$b^*(x) \leq Ct \sum_k \frac{V_{r_k}(x_k)}{\mu(B(x_k, r_k + d(x, x_k)))} \left(\frac{r_k}{r_k + d(x_k, x)} \right)^\beta + Cf^*(x) \chi_\Omega(x) \quad (4.5)$$

及

$$\int_{\mathcal{X}} [b^*(x)]^p d\mu(x) \leq C \int_\Omega [f^*(x)]^p d\mu(x); \quad (4.6)$$

分布 $g := f - b$ 满足 $g \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 及

$$g^*(x) \leq Ct \sum_k \frac{V_{r_k}(x_k)}{\mu(B(x_k, r_k + d(x, x_k)))} \left(\frac{r_k}{r_k + d(x_k, x)} \right)^\beta + Cf^*(x) \chi_{\Omega^c}(x). \quad (4.7)$$

应用命题 4.11 和引理 4.10 及推论 3.11, 并由一个类似如文献 [6, 定理 3.34] 的论证, 可得如下 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 的稠密性结论:

命题 4.12 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$, $\beta, \gamma \in (n(1/p-1), \epsilon)$ 以及 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 是如定义 2.8 中借助于分布空间 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 所定义的 Hardy 空间. 若 $q \in (1, \infty)$, 则 $L^q(\mathcal{X}) \cap H^{*,p}(\mathcal{X})$ 在 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 中稠.

结合引理 4.6、引理 4.8、引理 4.9 和命题 4.12, 并由一个类似如文献 [6, 引理 3.36] 的证明, 可得如下命题:

命题 4.13 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$, $\beta, \gamma \in (n(1/p-1), \epsilon)$, $q \in (1, \infty)$ 和 $f \in L^q(\mathcal{X}) \cap H^{*,p}(\mathcal{X})$. 设存在正常数 $\tilde{C}$, 使得对所有的 $x \in \mathcal{X}$, 有 $f(x) \leq \tilde{C}f^*(x)$. 令所有的记号如命题 4.11, 则存在不依赖 f, k 和 t 的正常数 C , 使得

- (i) 若 $m_k := [\int_{\mathcal{X}} \phi_k(\xi) d\mu(\xi)]^{-1} \int_{\mathcal{X}} f(\xi) \phi_k(\xi) d\mu(\xi)$, 则对所有的 k , $|m_k| \leq Ct$;
 (ii) 若 $b_k := (f - m_k)\phi_k$, 则 $\text{supp } b_k \subset B(x_k, 2r_k)$ 且由 b_k 在 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 上诱导的分布与命题 4.11 中的 b_k 相同;
 (iii) 级数 $\sum_k b_k$ 在 $L^q(\mathcal{X})$ 中收敛. 它在 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 上诱导的分布与命题 4.11 中的 b 相同, 仍记之为 b . 而且, $\text{supp } b \subset \Omega_t$;

(iv) 令 $g := f - b$, 则 $g = f\chi_{\Omega^c} + \sum_k m_k \phi_k$, 且对所有的 $x \in \mathcal{X}$, $|g(x)| \leq Ct$. 而且 g 在 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 上诱导的分布与命题 4.11 中的 g 相同.

注 4.14 (a) 若 f 不满足 $|f(x)| \leq \tilde{C}f^*(x)$ 关于 $x \in \mathcal{X}$ 一致成立, 则由定理 3.10, 存在函数 h , 使得 f 和 h 诱导相同的分布且 $|h(x)| \leq \tilde{C}f^*(x) = \tilde{C}h^*(x)$ 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 成立. 由于我们只关注 f 作为分布 (而不是作为函数) 的行为, 故不妨用 h 代替 f .

(b) 记 $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ 为 $\mathcal{X}$ 上连续函数全体. 若 $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, 由命题 4.13 (ii) 知, 对所有的 k 有 $b_k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$. 对 $\sum_k b_k$ 应用引理 4.6 (vi) 得对任意给定的 $x \in \mathcal{X}$, 级数 $\sum_k b_k(x)$ 限制在 x 的一个充分小的邻域上只有有限项非零. 这暗示了 $b \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$.

引理 4.15 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $q \in (n/(n + \epsilon), 1)$, $p \in (q, 1]$ 及 $\beta, \gamma \in (n(1/p - 1), \epsilon)$. 若 $h \in L^2(\mathcal{X})$ 满足 $|h(x)| \leq 1$ 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 成立且 $h^* \in L^q(\mathcal{X})$, 则存在 $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 和 (p, ∞) - 原子列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, 使得 $h = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中且几乎处处成立. 进一步, 存在不依赖于 h 的正常数 C , 使得 $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|^p \leq C \|h^*\|_{L^q(\mathcal{X})}^q$, $\|\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k\|_{L^\infty(\mathcal{X})} \leq C$, 且若 $r \in [1, \infty)$, 有 $\|\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k\|_{L^r(\mathcal{X})} \leq C \|h^*\|_{L^q(\mathcal{X})}^q$.

证明 任给 $\theta \in (0, 1)$, 定义函数列 $\{H_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 如下: 记 $H_0 := h$. 应用归纳法, 设已定义 H_{m-1} . 然后令 $\Omega_m := \{x \in \mathcal{X} : (H_{m-1})^*(x) > \theta^m\}$ 并定义 H_m 为命题 4.13 中由 $f = H_{m-1}$ 和 $t = \theta^m$ 所确定的函数 g . 注意到每个 Ω_m 都满足引理 4.6 的 (i) 至 (vi) 的分解 $\Omega_m = \cup_i B(x_{m,i}, r_{m,i})$. 再依照引理 4.8 的方法定义 $\{\phi_{m,i}\}_i$. 若 $m \geq 1$, 则

$$H_m = H_{m-1} - \sum_i b_{m,i}, \quad (4.8)$$

其中 $b_{m,i}$ 如命题 4.12 (ii) 所定义. 此外, 存在正常数 C_7 , 使得对所有的 $m \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathcal{X}$ 有

$$|H_m(x)| \leq C_7 \theta^m \quad (4.9)$$

及

$$H_m^*(x) \leq h^*(x) + C_7 \sum_{i=1}^m \theta^i \sum_j \frac{\mu(B(x_{i,j}, r_{i,j}))}{\mu(B(x_{i,j}, r_{i,j} + d(x_{i,j}, x)))} \left(\frac{r_{i,j}}{r_{i,j} + d(x_{i,j}, x)} \right)^\beta. \quad (4.10)$$

注意到由 H_m 的定义和命题 4.13 (iv) 立得 (4.9) 式. 为证 (4.10) 式, 对任意 $x \notin \Omega_m$, 由 (4.8) 和 (4.5) 式知,

$$H_m^*(x) \leq H_{m-1}^*(x) + C \theta^m \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mu(B(x_{m,j}, r_{m,j}))}{\mu(B(x_{m,j}, r_{m,j} + d(x_{m,j}, x)))} \left(\frac{r_{m,j}}{r_{m,j} + d(x_{m,j}, x)} \right)^\beta, \quad (4.11)$$

其中 C 为 (4.5) 式中的常数. 观察到对任意 $x \in \Omega_m$, 引理 4.6 (ii) 暗示了 $x \in B(x_{m,j}, r_{m,j})$ 对某 $j \in \mathbb{N}$ 成立. 由此及 (4.7) 式知, 若 $x \in \Omega_m$, 则

$$H_m^*(x) \lesssim t \lesssim \theta^m \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mu(B(x_{m,j}, r_{m,j}))}{\mu(B(x_{m,j}, r_{m,j} + d(x_{m,j}, x)))} \left(\frac{r_{m,j}}{r_{m,j} + d(x_{m,j}, x)} \right)^\beta. \quad (4.12)$$

结合 (4.11) 和 (4.12) 式并重复此过程 m 次即得 (4.10) 式.

对 $k \in \mathbb{N}$, 由 (4.8) 式得 $h = H_k + \sum_{m=1}^k \sum_j b_{m,j}$ 几乎处处成立. 利用命题 4.13 (iii), 注 4.14 和 (4.9) 式得 $h = \sum_{m=1}^\infty \sum_j b_{m,j}$ 几乎处处成立. 进一步, 假设 $h^* \in L^2(\mathcal{X})$ 及 (4.10) 式和引理 4.10 暗示了 $H_m \in L^2(\mathcal{X})$. 因此由 (4.9) 式和 φ 的尺寸条件得, 对任意 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\varepsilon(\beta, \gamma)$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\left| \langle h, \varphi \rangle - \sum_{m=1}^k \sum_j \langle b_{m,j}, \varphi \rangle \right| = |\langle H_k, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathcal{X}} H_k(x) \varphi(x) d\mu(x) \right| \lesssim \theta^k \|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} \rightarrow 0,$$

这进一步暗示了

$$h = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k \sum_j b_{m,j} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_j b_{m,j} \quad (4.13)$$

在 $(\mathcal{G}_0^\varepsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立. 利用命题 4.13 (ii) 所给的 $b_{m,j}$ 的表达式、(4.9) 式和命题 4.13 (i), 得对所有的 $x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} |b_{m,j}(x)| &\leq |H_{m-1}(x)| + \left| \left[\int_{\mathcal{X}} \phi_{m,j}(x) d\mu(x) \right]^{-1} \int_{\mathcal{X}} H_{m-1}(x) \phi_{m,j}(x) d\mu(x) \right| \\ &\leq 2C_7 \theta^{m-1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

令 $\lambda_{m,j} := 2C_7 \theta^{m-1} \mu(B(x_{m,j}, 2r_{m,j}))^{1/p}$ 和 $e_{m,j} := (\lambda_{m,j})^{-1} b_{m,j}$. 易证每个 $e_{m,j}$ 都是 (p, ∞) -原子, 从而由 (4.13) 式推出,

$$h = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_j \lambda_{m,j} e_{m,j} \quad (4.15)$$

在 $(\mathcal{G}_0^\varepsilon(\beta, \gamma))'$ 以及几乎处处意义下均成立. 为估计 $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_j |\lambda_{m,j}|^p$, 由引理 4.6,

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_j |\lambda_{m,j}|^p \lesssim \sum_{m \in \mathbb{N}} \theta^{mp} \mu(\Omega_m).$$

由 Ω_m 的定义, (4.10) 式和引理 4.10 得, 存在正常数 C_8 , 使得对所有的 $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \theta^{mq} \mu(\Omega_m) &\leq \int_{\mathcal{X}} [H_{m-1}^*(x)]^q d\mu(x) \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} [h^*(x)]^q d\mu(x) + (C_7)^q \sum_{i=1}^{m-1} \theta^{iq} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{X}} \left[\sum_j \frac{\mu(B(x_{i,j}, r_{i,j}))}{\mu(B(x_{i,j}, r_{i,j} + d(x_{i,j}, x)))} \left(\frac{r_{i,j}}{r_{i,j} + d(x_{i,j}, x)} \right)^\beta \right]^q d\mu(x) \\ &\leq C_8 \left[\int_{\mathcal{X}} [h^*(x)]^q d\mu(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \theta^{iq} \mu(\Omega_i) \right]. \end{aligned}$$

令 $b_0 := \int_{\mathcal{X}} [h^*(x)]^q d\mu(x)$, 且对 $m \in \mathbb{N}$, 令 $b_m := \theta^{mq} \mu(\Omega_m)$. 从而上式可写为 $b_m \leq C_8 \sum_{i=0}^{m-1} b_i$.

由归纳法得, 对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 有 $b_i \leq b_0 (C_8 + 2)^i$, 即

$$\theta^{iq} \mu(\Omega_i) \leq (C_8 + 2)^i \int_{\mathcal{X}} [h^*(x)]^q d\mu(x).$$

取 $\theta > 0$ 充分小, 使得 $\theta^{p-q}(C_8 + 2) < 1$, 则

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_j |\lambda_{m,j}|^p \lesssim \sum_{m \in \mathbb{N}} \theta^{(p-q)m} (C_8 + 2)^m \int_{\mathcal{X}} [h^*(x)]^q d\mu(x) \lesssim \int_{\mathcal{X}} [h^*(x)]^q d\mu(x).$$

利用 $\text{supp } e_{m,j} \subset B(x_{m,j}, r_{m,j})$ 和 (4.14) 式及引理 4.6 得, 对所有的 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$\sum_{m,j} |\lambda_{m,j} e_{m,j}(x)| \lesssim \sum_{m \in \mathbb{N}} \theta^m \chi_{\Omega_m}(x) \lesssim 1,$$

进一步有 $\sum_{m,j} |\lambda_{m,j} e_{m,j}| \in L^\infty(\mathcal{X})$. 当 $r \in [1, \infty)$ 时, 由 Hölder 不等式, 得

$$\left\| \sum_{m,j} |\lambda_{m,j} e_{m,j}| \right\|_{L^r(\mathcal{X})} \lesssim \sum_{m \in \mathbb{N}} \theta^m [\mu(\Omega_m)]^{1/r} \lesssim \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \theta^{mp} \mu(\Omega_m) \right]^{1/r}.$$

因此 $\|\sum_{m,j} |\lambda_{m,j} e_{m,j}|\|_{L^r(\mathcal{X})}^r \lesssim \|h^*\|_{L^q(\mathcal{X})}^q$. 于是完成了引理 4.15 的证明.

定理 4.16 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$ 和 $\beta, \gamma \in (n(1/p-1), \epsilon)$. 若 $f \in H^{*,p}(\mathcal{X})$, 则存在 $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 和 (p, ∞) - 原子列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, 使得 $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立. 此外, 存在常数 $C \geq 1$, 使得

$$\frac{1}{C} \|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})} \leq \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|^p \right\}^{1/p} \leq C \|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})}.$$

证明 由于该定理与文献 [6, 定理 4.13] 的证明类似, 故这里只给出证明的框架. 先设 $f^* \in L^p(\mathcal{X}) \cap L^2(\mathcal{X})$, 由定理 3.10 知 f 可表示为满足 $|f(x)| \leq C f^*(x)$ 的函数. 任给 $k \in \mathbb{Z}$, 令 $\Omega_k := \{x \in \mathcal{X} : f^*(x) > 2^k\}$. 由命题 4.13 知 $f = B_k + G_k$, 其中 B_k 和 G_k 分别是命题 4.13 中由 $t = 2^k$ 所确定的函数 b 和 g . 由于 $B_k + G_k = B_{k+1} + G_{k+1}$, 定义

$$h_k := G_{k+1} - G_k = B_k - B_{k+1}. \quad (4.16)$$

因此对任意 $m \in \mathbb{N}$, 有 $f - \sum_{k=-m}^m h_k = B_{m+1} + G_{-m}$. 注意到由命题 4.13, $|G_{-m}(x)| \lesssim 2^{-m}$ 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 成立且 $\text{supp } B_m \subset \Omega_m$. 对任意 $q \in (n/(n+\epsilon), 1]$, 依照文献 [6, p. 300] 的论证并利用引理 4.10 和命题 4.11, 可推出 $\|h_k^*\|_{L^q(\mathcal{X})} \lesssim 2^k \mu(\Omega_k)$; 而且 $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立 (此处需命题 3.16) 且几乎处处成立.

由 (4.16) 式得, $\text{supp } h_k \subset \Omega_k$ 且存在正常数 $\tilde{C}$, 使得 $|h_k(x)| \leq \tilde{C} 2^k$ 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 成立. 对 $\tilde{C}^{-1} 2^{-k} h_k$ 和 $q \in (n/(n+\epsilon), p)$ 应用引理 4.15 推出 $\tilde{C}^{-1} 2^{-k} h_k = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_{k,i} a_{k,i}$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 及几乎处处意义下成立, 其中 $\{a_{k,j}\}_j$ 为 (p, ∞) - 原子且 $\{\lambda_{k,j}\}_j \subset \mathbb{C}$ 满足 $\sum_i |\lambda_{k,i}|^p \lesssim \|2^{-k} h_k^*\|_{L^q(\mathcal{X})}^q \lesssim \mu(\Omega_k)$. 令 $\rho_{k,i} := \tilde{C} 2^k \lambda_{k,i}$, 则 $h_k = \sum_i \rho_{k,i} a_{k,i}$, 从而 $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_i \rho_{k,i} a_{k,i}$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 及几乎处处意义下成立, 且

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_i |\rho_{k,i}|^p \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \mu(\Omega_k) \lesssim \|f^*\|_{L^p(\mathcal{X})}^p.$$

由此及命题 4.5 知定理在 $f^* \in L^2(\mathcal{X})$ 的假设下成立. 更一般的结论可由 $L^2(\mathcal{X}) \cap H^{*,p}(\mathcal{X})$ 在 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 中稠以及类似文献 [6, pp. 301–302] 的一个标准论证得到, 从而完成了定理 4.16 的证明.

对 $\epsilon \in (0, 1]$ 和 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon)$, 记 $\mathring{\mathcal{G}}_b^\epsilon(\beta, \gamma)$ 为 $\mathring{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 中具有有界支集的函数全体. 令 $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ 为在无穷远处趋于 0 的 $\mathcal{X}$ 上的连续函数全体. 利用定理 4.16 和具有有界支集的恒等逼近的存在性 (见文献 [23, 定理 2.1]) 可推出下面稠密性结果 (略去其证明细节):

命题 4.17 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n+\epsilon), 1]$ 和 $\beta, \gamma \in (n(1/p-1), \epsilon)$, 则 $\mathring{\mathcal{G}}_b^\epsilon(\beta, \gamma)$ 在 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 中稠; 对任意的 $p \in [1, \infty)$, $\mathring{\mathcal{G}}_b^\epsilon(\beta, \gamma)$ 在 $L^p(\mathcal{X})$ 中稠; 若 $p = \infty$, $\mathring{\mathcal{G}}_b^\epsilon(\beta, \gamma)$ 在 $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ 中稠.

命题 4.5、定理 4.16、注 3.15 和 2.4 暗示了如下结论:

推论 4.18 记 $\alpha \in (0, \infty)$, $p \in (n/(n+1), 1]$ 和 $q \in (p, \infty] \cap [1, \infty]$, 则 $H_{\text{at}}^{p,q}(\mathcal{X}) = H^{*,p}(\mathcal{X}) = H_\alpha^p(\mathcal{X}) = H_d^p(\mathcal{X})$ 且具有等价的拟范数.

注 4.19 记 ϵ, p, β 和 γ 如定理 4.16 中所设. 对任意 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 及 $x \in \mathcal{X}$, 定义

$$\tilde{f}^*(x) := \sup\{|\langle f, \varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{G}(\epsilon, \epsilon), \|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, r, \epsilon, \epsilon)} \leq 1 \text{ 对某 } r > 0 \text{ 成立}\}$$

和 $\tilde{H}^{*,p}(\mathcal{X}) := \{f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))' : \|\tilde{f}^*\|_{L^p(\mathcal{X})} < \infty\}$ 以及 $\|f\|_{\tilde{H}^{*,p}(\mathcal{X})} := \|\tilde{f}^*\|_{L^p(\mathcal{X})}$. 由定义, 显然有 $\tilde{f}^*(x) \lesssim f^*(x)$ 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 成立, 这暗示了 $H^{*,p}(\mathcal{X}) \subset \tilde{H}^{*,p}(\mathcal{X})$. 重复上述原子分解的过程, 可看出若用 $\tilde{H}^{*,p}(\mathcal{X})$ 代替 $H^{*,p}(\mathcal{X})$, 则定理 4.16 仍成立, 这进一步暗示了 $\tilde{H}^{*,p}(\mathcal{X}) \subset H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 由此及推论 4.18 知 $H^{*,p}(\mathcal{X}) = \tilde{H}^{*,p}(\mathcal{X})$. 应当指出, 当 $p \in (1, \infty]$ 时, 对命题 3.9 和推论 3.11 的证明稍做修改即可得 $\tilde{H}^{*,p}(\mathcal{X}) = L^p(\mathcal{X})$ 对所有的 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon)$ 成立. 该注中的结果在文献 [35] 中用到.

5 一些应用

作为第 1 个应用, 利用原子分解特征, 我们证明 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 和文献 [23, 24] 中由 Littlewood-Paley 函数所定义的 Hardy 空间 $H^p(\mathcal{X})$ 相一致.

定义 5.1 记 $\epsilon_1 \in (0, 1]$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$ 以及 $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ -AOTI. 令 $\epsilon \in (0, \epsilon_1 \wedge \epsilon_2)$, $p \in (n/(n + \epsilon), 1]$ 且 $\beta, \gamma \in (n(1/p - 1), \epsilon)$. 对 $k \in \mathbb{Z}$, 记 $D_k := S_k - S_{k-1}$. 任给 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$, 定义 Lusin-面积函数 $\dot{S}(f)$ (或称为 Littlewood-Paley S-函数) 为

$$\dot{S}(f)(x) := \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{d(x,y) < 2^{-k}} |D_k(f)(y)|^2 \frac{d\mu(y)}{V_{2^{-k}}(x)} \right\}^{1/2}.$$

定义 $H^p(\mathcal{X}) := \{f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))' : \|\dot{S}(f)\|_{L^p(\mathcal{X})} < \infty\}$ 和 $\|f\|_{H^p(\mathcal{X})} := \|\dot{S}(f)\|_{L^p(\mathcal{X})}$.

记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n + \epsilon), 1]$ 和 $\beta, \gamma \in (n(1/p - 1), \epsilon)$. 定义 $\dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 为用分布空间 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 代替 $H_{\text{at}}^{p,2}(\mathcal{X})$ 的定义中的分布空间 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 之后所得的 Hardy 空间 (见定义 4.2 或文献 [23, 24]). 当 $p \in (n/(n + 1), 1]$ 时, 从文献 [24, 定理 2.21] 推出 $\dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 和 $H^p(\mathcal{X})$ 相一致. 由此及定理 4.16 知, 为证 $H^p(\mathcal{X}) = H^{*,p}(\mathcal{X})$, 只需证明 $\dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X}) = H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 为此, 先引进如下两个技术性引理. 其中第 1 个引理的证明是平凡的, 故略去其细节.

引理 5.2 记 $\epsilon \in (0, 1)$ 和 $\beta, \gamma \in (0, \epsilon)$. 若 $f \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$, 且对任意 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$, $\langle f, \varphi \rangle = 0$, 则 f 为常数.

记 $\alpha \in (0, \infty)$. Coifman 和 Weiss (见文献 [5, (2.2) 式]) 引进了如下的 Lipschitz 空间 $\text{Lip}_\alpha(\mathcal{X})$, 即 $\varphi \in \text{Lip}_\alpha(\mathcal{X})$ 当且仅当对所有的 $x, y \in \mathcal{X}$ 和 $x \neq y$, 有 $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C[\mu(B)]^\alpha$, 其中 B 为包含 x 和 y 的任意球且 C 为只依赖 φ 的正常数. 定义 $\tilde{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 为用 $(\text{Lip}_{1/p-1}(\mathcal{X}))'$ 代替定义 4.2 中的 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 所得的 Hardy 空间, 其中 $(\text{Lip}_{1/p-1}(\mathcal{X}))'$ 是 $\text{Lip}_{1/p-1}(\mathcal{X})$ 的对偶空间 [5].

如下的重要观察建立了检验函数空间和上面的 Lipschitz 空间之间的联系. 这在建立本文引入的 Hardy 空间、 $H^p(\mathcal{X})$ 与 Coifman 和 Weiss 意义下的原子 Hardy 空间 $\tilde{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 之间的关系时起着重要作用 (见下面的注 5.5).

引理 5.3 记 $\beta \in (0, 1]$ 和 $\gamma \in (0, \infty)$, 则存在正常数 C , 使得对所有的 $\varphi \in \mathcal{G}(\beta, \gamma)$ 和 $x, y \in \mathcal{X}$, 有 $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)}[\mu(B(x, d(x, y)))]^{\beta/n}$.

证明 对任意 $x, y \in \mathcal{X}$ 满足 $d(x, y) \leq (1 + d(x, x_1))/2$, 由 $\mu(B(x_1, 1 + d(x, x_1))) \sim \mu(B(x, 1 + d(x, x_1)))$ 和 (2.2) 式得,

$$\frac{\mu(B(x_1, 1 + d(x, x_1)))}{\mu(B(x, d(x, y)))} \lesssim \frac{\mu(B(x, 1 + d(x, x_1)))}{\mu(B(x, d(x, y)))} \lesssim \left(\frac{1 + d(x, x_1)}{d(x, y)} \right)^n.$$

由此及 φ 的正则性推出

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)}[\mu(B(x, d(x, y)))]^{\beta/n}.$$

对任意 $x, y \in \mathcal{X}$ 满足 $d(x, y) > (1 + d(x, x_1))/2$, 再次利用

$$\mu(B(x_1, 1 + d(x, x_1))) \sim \mu(B(x, 1 + d(x, x_1)))$$

和 (2.2) 式, 得到

$$\frac{\mu(B(x_1, 1 + d(x, x_1)))}{\mu(B(x, d(x, y)))} \lesssim \left(\frac{1 + d(x, x_1)}{d(x, y)} \right)^\kappa.$$

由此及 φ 的尺寸条件推出

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{G}(\beta, \gamma)} [\mu(B(x, d(x, y)))]^{\beta/n},$$

从而完成了引理 5.3 的证明.

定理 5.4 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n + \epsilon), 1]$ 且 β 和 γ 满足 (3.22) 式, 则 $\dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X}) = H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 且具有等价的拟范数.

证明 由于 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))' \subset (\dot{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$, 故显然有 $H_{\text{at}}^{p, 2}(\mathcal{X}) \subset \dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 由推论 4.18, 仍需证 $\dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X}) \subset H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 若 $f \in \dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$, 则存在某 β 和 γ 满足 (3.22) 式使得 $f \in (\dot{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$, 且存在 $(p, 2)$ - 原子列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 和 $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, 使得 $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k$ 在 $(\dot{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立, 其中 $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|^p < \infty$. 对任意的 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 且 β 和 γ 满足 (3.22) 式, 令

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle := \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \langle a_k, \varphi \rangle. \quad (5.1)$$

记 a 为支在 $B := B(x_0, r_0)$ 上的 $(p, 2)$ - 原子且 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$. 注意到 $\varphi \in \mathcal{G}(n(1/p - 1), \gamma)$, 这是因为 $\beta > n(1/p - 1)$. 应用 (A3)、引理 5.3、Hölder 不等式和 (A2) 得到,

$$|\langle a, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathcal{X}} a(x) [\varphi(x) - \varphi(x_0)] d\mu(x) \right| \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)}.$$

由此及 (5.1) 式推出

$$|\langle \tilde{f}, \varphi \rangle| \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k| \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|^p \right)^{1/p},$$

这进一步暗示了 $\tilde{f} \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$, $\tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立且 $\tilde{f} = f$ 在 $\dot{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 中成立. 此外, $\tilde{f} \in H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$.

假设存在 f 的另一个延拓 $\tilde{g} \in H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$, 则 $\tilde{g} \in (\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 且 $\tilde{g} = f$ 在 $\dot{\mathcal{G}}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 中成立. 由引理 5.2, $\tilde{f} - \tilde{g}$ 为常数. 注意到 $\tilde{f} \in H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 且任意的非零常值函数不属于 $H_{\text{d}}^p(\mathcal{X}) = H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ (见推论 4.18), 因此 $\tilde{g} \notin H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 这一矛盾暗示了 $\tilde{f} \in H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 是 $f \in H^p(\mathcal{X})$ 的唯一延拓. 取遍 f 的所有的原子分解即得 $\|\tilde{f}\|_{H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{\dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})}$, 于是完成了定理 5.4 的证明.

注 5.5 (i) 注意到 $\epsilon \in (0, 1)$ 是任意的. 由定理 5.4 和推论 4.18 得, 对任意 $p \in (n/(n + 1), 1]$, $H^{*, p}(\mathcal{X})$ 与 $H^p(\mathcal{X})$ 一致且具有等价的拟范数, 从而 $H^{*, p}(\mathcal{X})$ 与 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}_{p, 2}^0(\mathcal{X})$ 等价^[23].

(ii) 记 $\epsilon \in (0, 1)$, $p \in (n/(n + \epsilon), 1]$ 和 $\beta, \gamma \in (n(1/p - 1), \epsilon)$. 引理 5.3 暗示了 $\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma) \subset \text{Lip}_{1/p-1}(\mathcal{X})$, 故由定义知 $\tilde{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X}) \subset H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 反之, 任给 $f \in H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$, 则 f 有分解 $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j a_j$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立, 其中 $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 为 (p, ∞) - 原子列且 $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|^p < \infty$. 不难验证 (见定理 5.4) $\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j a_j$ 收敛到 $(\text{Lip}_{1/p-1}(\mathcal{X}))'$ 中的某一元素, 记为 $\tilde{f}$. 由此及引理 5.3 知, $\tilde{f} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j a_j$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 中成立, 故 $f = \tilde{f} \in \tilde{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$, 这暗示了 $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X}) \subset \tilde{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$. 所以 $\tilde{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X}) = H_{\text{at}}^p(\mathcal{X}) = \dot{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 且具有等价的拟范数, 此即回答了文献 [24, 注 2.30] 中的一个问题.

(iii) 从现在起, 对 $p \in (n/(n+1), 1]$, 在不引起混淆的情形下, 用 $H^p(\mathcal{X})$ 记 $H^{*,p}(\mathcal{X})$, $H_\alpha^p(\mathcal{X})$ (其中 $\alpha \in (0, \infty)$), $H_d^p(\mathcal{X})$, $\tilde{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$, $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 或 $\hat{H}_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$.

作为另一个应用, 我们将文献 [25] 的结论推广到 RD- 空间. 设 $p \in (n/(n+1), 1]$ 和 $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$. 记 $H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 为所有 (p, q) - 原子的有限线性组合所成的向量空间. 注意到 $H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 包含 $L^q(\mathcal{X})$ 中所有具有有界支集且积分为零的函数. 显然 $H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 是 $H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})$ 的稠子集. 定义 $H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 上的拟范数如下:

$$\|f\|_{H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})} := \inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^p \right)^{1/p} : f = \sum_{j=1}^N \lambda_j a_j, N \in \mathbb{N}, \{\lambda_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{C}, \text{ 且 } \{a_j\}_{j=1}^N \text{ 是 } (p, q)\text{- 原子} \right\}.$$

受文献 [25] 的启发, 利用第 4 节中对 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 的原子特征刻画, 我们可得如下定理:

定理 5.6 记 $p \in (n/(n+1), 1]$, 则以下命题成立:

- (a) 若 $q \in (p, \infty) \cap [1, \infty]$, 则 $\|\cdot\|_{H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})}$ 和 $\|\cdot\|_{H^p(\mathcal{X})}$ 是 $H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 上的等价拟范数.
- (b) $\|\cdot\|_{H_{\text{fin}}^{p,\infty}(\mathcal{X})}$ 和 $\|\cdot\|_{H^p(\mathcal{X})}$ 是 $H_{\text{fin}}^{p,\infty}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{X})$ 上的等价拟范数.

证明 对任意 $f \in H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$, 其中 $p \in (n/(n+1), 1]$ 且 $q \in (p, \infty) \cap [1, \infty]$, 显然有 $\|f\|_{H_{\text{at}}^p(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})}$. 由注 5.5 (iii), 进一步有 $\|f\|_{H^p(\mathcal{X})} \lesssim \|f\|_{H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})}$. 故为完成定理的证明, 只需说明对 $f \in H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ ($q < \infty$ 时) 或者 $f \in H_{\text{fin}}^{p,\infty}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{X})$, 均有 $\|f\|_{H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})} \lesssim \|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})}$.

记 x_1 如定义 2.5. 不妨设 $f \in H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 且 $\|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})} = 1$, 进一步设存在 $R > 0$, 使得 $\text{supp } f \subset B(x_1, R)$. 令所有的记号如第 4 节所定义. 对 $k \in \mathbb{Z}$, 令 $\Omega_k := \{x \in \mathcal{X} : f^*(x) > 2^k\}$. 记 $H_0^k := \tilde{C}^{-1} 2^{-k} h_k$, 其中 h_k 和 $\tilde{C}$ 如定理 4.16. 对 $m \in \mathbb{N}$, 分别用 H_0^k , θ_k , H_{m-1}^k 和 Ω_m^k 代替引理 4.15 中的 h , θ , H_{m-1} 和 Ω_m . 对 H_0^k , θ_k , H_{m-1}^k 和 Ω_m^k , 重复引理 4.15 的证明, 得 $\Omega_m^k := \{x \in \mathcal{X} : (H_{m-1}^k)^*(x) > (\theta_k)^m\} = \cup_i B(x_{m,i}^k, r_{m,i}^k)$, 其中球 $\{B(x_{m,i}^k, r_{m,i}^k)\}_i$ 满足引理 4.6 的 (i) 至 (vi), 以及 $H_m^k = H_{m-1}^k - \sum_i b_{m,i}^k$ 和

$$b_{m,i}^k = \left\{ H_{m-1}^k - \left[\int_{\mathcal{X}} \phi_{m,i}^k(x) d\mu(x) \right]^{-1} \int_{\mathcal{X}} H_{m-1}^k(x) \phi_{m,i}^k(x) d\mu(x) \right\} \phi_{m,i}^k, \quad (5.2)$$

此处 $\{\phi_{m,i}^k\}_i$ 是引理 4.8 中与集合 $\Omega = \Omega_m^k$ 有关的单位分解.

重复定理 4.16 和引理 4.15 中对 f 做原子分解的过程, 得到

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_i \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k \quad (5.3)$$

在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 和几乎处处意义下成立. 此外, 从定理 4.16 和引理 4.15 的证明中还可推出

- (i) 每个 $a_{m,i}^k$ 是 (p, ∞) - 原子且 $\text{supp } a_{m,i}^k \subset B(x_{m,i}^k, 2r_{m,i}^k) \subset \Omega_m^k$;
- (ii) $b_{m,i}^k = C 2^{-k} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k$, 其中 C 是不依赖于 k, m 和 i 的正常数;
- (iii) 对 $k \in \mathbb{Z}$, 有 $h_k = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_i \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k$ 和 $\text{supp } h_k \subset \Omega_k$;
- (iv) 对 $L \in \mathbb{Z}_+$, 有 $H_L^k = \sum_{m=L+1}^\infty \sum_i b_{m,i}^k$ 在 $(\mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma))'$ 和几乎处处意义下成立;
- (v) 存在不依赖于 f 的正常数 C , 使得 $\sum_{k,m,i} |\rho_{m,i}^k|^p \leq C \|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})}^p = C$;
- (vi) 任给 $r \in [1, \infty]$, 存在不依赖于 f 和 $k \in \mathbb{Z}$ 的正常数 C , 使得 $\|\sum_{m,i} |\rho_{m,i}^k a_{m,i}^k|\|_{L^r(\mathcal{X})} \leq C 2^k [\mu(\Omega_k)]^{1/r}$.

我们断言: 存在只依赖 $\mathcal{X}$ 的正常数 $\tilde{C}$, 使得对所有的 $x \in \mathcal{X} \setminus B(x_1, 16R)$, 有

$$f^*(x) \leq \tilde{C} [\mu(B(x_1, R))]^{-1/p}. \quad (5.4)$$

先设 (5.4) 式成立, 其证明将在定理 5.6 证明的最后给出. 记 k' 为满足

$$2^k \leq \tilde{C}[\mu(B(x_1, R))]^{-1/p}$$

的最大整数. 则对任意 $k > k'$, 有 $\Omega_k \subset B(x_1, 16R)$. 分别定义 h 和 ℓ 为

$$h := \sum_{k \leq k'} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_i \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k, \quad \ell := \sum_{k > k'} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_i \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k. \quad (5.5)$$

注意到 $\text{supp } \ell \subset B(x_1, 16R)$. 由此及 $\text{supp } f \subset B(x_1, R)$ 和 $f = h + \ell$ 推出 $\text{supp } h \subset B(x_1, 16R)$. 由上面的性质 (vi) 知

$$|h| \leq \sum_{k \leq k'} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_i |\rho_{m,i}^k a_{m,i}^k| \lesssim \sum_{k \leq k'} 2^k \lesssim [\mu(B(x_1, R))]^{-1/p}.$$

由此及 $\text{supp } h \subset B(x_1, 16R)$ 和 Lebesgue 控制收敛定理, 进一步得 $\sum_{k \leq k'} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_i \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k$ 在 $L^1(\mathcal{X})$ 中收敛, 故 h 积分为 0. 因此, h 是某 (p, ∞) - 原子的常数倍.

现设 $q \in [1, \infty) \cap (p, \infty)$ 并证明 (a). 对任意 $N := (N_1, N_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 令

$$\ell_N := \sum_{k=k'+1}^{N_1} \sum_{i+m \leq N_2} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k.$$

显然 $\ell_N \in H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$. 注意到 $f = h + \ell_N + (\ell - \ell_N)$. 因此, 为完成 (a) 的证明, 只需说明当 N_1 和 N_2 充分大时, $\ell - \ell_N$ 是某 (p, q) - 原子的充分小倍数. 由于 ℓ 和 ℓ_N 都有有界支集, 故 $\ell - \ell_N$ 也有有界支集. 而且

$$\int_{\mathcal{X}} [\ell(x) - \ell_N(x)] d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} [f(x) - h(x) - \ell_N(x)] d\mu(x) = 0.$$

所以只需证明对任意 $\eta > 0$, 存在 N_1 和 $N_2 \in \mathbb{N}$ 充分大, 使得

$$\|\ell - \ell_N\|_{L^q(\mathcal{X})} < \eta. \quad (5.6)$$

下面证明 (5.6) 式. 注意到由 (5.5) 式知,

$$\|\ell - \ell_N\|_{L^q(\mathcal{X})} \leq \left\| \sum_{k > N_1} \left\| \sum_{m,i} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k \right\|_{L^q(\mathcal{X})} \right\| + \left\| \sum_{k=k'+1}^{N_1} \left\| \sum_{i+m > N_2} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k \right\|_{L^q(\mathcal{X})} \right\| =: \text{I} + \text{II}.$$

对任意 $s \in \mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $z \in (\Omega_s \setminus \Omega_{s+1})$, 由上面的性质 (iii) 和 (vi) 得,

$$\sum_{k > k'} \left\| \sum_{m,i} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k(z) \right\| \leq C \sum_{k' < k \leq s} 2^k \leq C 2^s \leq C f^*(z),$$

其中 C 是不依赖于 f 和 s 的正常数. 由此推得对所有的 $z \in \mathcal{X}$,

$$\sum_{k > k'} \left\| \sum_{m,i} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k(z) \right\| \lesssim f^*(z). \quad (5.7)$$

首先设 $q > 1$. 由于 $f \in L^q(\mathcal{X})$, 故 $f^* \in L^q(\mathcal{X})$. 由此及 (5.7) 式和 Lebesgue 控制收敛定理知, 当 $N_1 \rightarrow \infty$ 时, I 趋于 0. 现设 $q = 1$. 注意到由性质 (iii) 知 $\text{supp } \sum_{k > N_1} |h_k| \subset \Omega_{N_1}$. 由此及 (5.3) 式推出

$$\sum_{k > N_1} |h_k(z)| \leq \left| f(z) - \sum_{k \leq N_1} |h_k| \right| \leq |f(z)| + C 2^{N_1}.$$

对 $k \in \mathbb{Z}$, 令 $f_1^k := f \chi_{\{|f| > 2^k\}}$ 和 $f_2^k := f - f_1^k$. 由此, 以及 $f^*(x) \lesssim \mathcal{M}(f)(x)$ 对所有的 $x \in \mathcal{X}$ 成立, $\mathcal{M}$ 从 $L^1(\mathcal{X})$ 到弱 $-L^1(\mathcal{X})$ 有界 [5], 和 $f \in L^1(\mathcal{X})$, 得当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} 2^k \mu(\Omega_k) &\lesssim 2^k \mu(\{x \in \mathcal{X} : \mathcal{M}(f)(x) > 2^k\}) \\ &\lesssim 2^k \mu(\{x \in \mathcal{X} : \mathcal{M}(f_1^k)(x) > 2^{k-1}\}) \lesssim \|f_1^k\|_{L^1(\mathcal{X})} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

这意味着当 $q = 1$ 且 $N_1 \rightarrow \infty$ 时, 仍有 $I \lesssim \int_{\Omega_{N_1}} [f(x) + 2^k] d\mu(x) \rightarrow 0$. 性质 (vi) 暗示了对任意 $\eta > 0$ 以及任意给定的 $N_1 \in \mathbb{N}$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 充分大, 使得 $II < \eta$, 故 (5.6) 式成立.

从而, 利用上面的性质 (v) 得

$$\|f\|_{H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})}^p \leq C^p + \sum_{k=k'+1}^{N_1} |\rho_{m,i}^k|^p + \eta^p \lesssim 1,$$

这完成了 (a) 的证明.

现在证明 (b). 由于 $f^*(x) \leq C_{\mathcal{X}} \|f\|_{L^\infty(\mathcal{X})}$, 其中 $C_{\mathcal{X}}$ 是只依赖于 $\mathcal{X}$ 的正常数, 故对 k 满足 $2^k \geq C_{\mathcal{X}} \|f\|_{L^\infty(\mathcal{X})}$, 有 $\Omega_k = \emptyset$. 记 k'' 为使得 $2^k \geq C_{\mathcal{X}} \|f\|_{L^\infty(\mathcal{X})}$ 不成立的最大整数. 由此及 Ω_k 的定义和 (5.5) 式知,

$$\ell = \sum_{k' < k \leq k''} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_i \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k, \quad (5.8)$$

因对任意 $k' < k \leq k''$, 有 $\text{supp } h_k \subset \Omega_k \subset B(x_1, 16R)$. 进一步, 由 (4.16) 式和注 4.14 (b) 知 $h_k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ 对所有的 $k \in \mathbb{Z}$ 成立. 由此及 (5.2) 式推出 $b_{1,i}^k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$. 故由引理 4.6 (vi) 知 $H_1^k = h_k - \sum_i b_{1,i}^k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$. 从此并由关于 m 的一个归纳论证知, 对所有的 k, m 和 i , 有 $H_m^k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ 和 $b_{m,i}^k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$. 因此, 由性质 (ii) 知 $a_{m,i}^k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$.

对任意 $L \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$, 令 $F_1^L := \{(k, m, i) : k' < k \leq k'', m > L\}$,

$$F_2^{L,\delta} := \{(k, m, i) : k' < k \leq k'', 1 \leq m \leq L, 2r_{m,i} \leq \delta\}$$

以及 $F_3^{L,\delta} := \{(k, m, i) : k' < k \leq k'', 1 \leq m \leq L, 2r_{m,i} > \delta\}$. 由 (5.8) 式, 将 ℓ 写为 $\ell = \ell_1^L + \ell_2^{L,\delta} + \ell_3^{L,\delta}$, 其中 $\ell_1^L := \sum_{(k,m,i) \in F_1^L} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k$ 且对 $j = 2, 3$,

$$\ell_j^{L,\delta} := \sum_{(k,m,i) \in F_j^{L,\delta}} \rho_{m,i}^k a_{m,i}^k.$$

我们断言: 对任给 k 和 m , 若 $\{r_{m,i}^k\}_i$ 是一个无限序列, 则 $\lim_{i \rightarrow \infty} r_{m,i}^k = 0$. 事实上, 由注 4.7, 只需说明每一个 Ω_m^k 在 $\mathcal{X}$ 中有界. 为验证 Ω_m^k 有界, 回顾文献 [5, 引理 3.9] 暗示了若 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathcal{X})$ 且具有有界支集, 则对任意 $\alpha > 0$, 集合 $\{x \in \mathcal{X} : \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}$ 包含在半径依赖于 α 的球中. 由此及 $(H_{m-1}^k)^* \lesssim \mathcal{M}(H_{m-1}^k)$ (见命题 3.9), 只需说明每个 H_{m-1}^k 具有有界支集即可, 这可由归纳论证得到. 事实上, 因为 $\text{supp } f \subset B(x_1, R)$, 故由文献 [5, 引理 3.9] 和 $f^* \lesssim \mathcal{M}(f)$ 知每个 Ω_k 在 $\mathcal{X}$ 中有界, 由此及 $\text{supp } H_0^k = \text{supp } h_k \subset \Omega_k$ 推出 H_0^k 具有有界支集. 注意到由命题 4.13 (iii) 知 $H_m^k = H_{m-1}^k - \sum_i b_{m,i}^k$ 和 $\text{supp } (\sum_i b_{m,i}^k) \subset \Omega_m^k$. 因此, 若 $\text{supp } H_{m-1}^k$ 有界, 那么类似上面的讨论得 Ω_m^k 有界, 从而得 $\text{supp } H_m^k$ 在 $\mathcal{X}$ 中有界. 故上面的断言成立. 对任意 $L \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$, 利用此断言得 $F_3^{L,\delta}$ 有限且 $\ell_3^{L,\delta}$ 是连续 (p, ∞) -原子的有限线性组合.

从上面的性质 (ii)、(iv) 和 (4.9) 式, 得对所有的 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$|\ell_1^L(x)| \lesssim \sum_{k' < k \leq k''} 2^k |H_L^k(x)| \lesssim \sum_{k' < k \leq k''} 2^k (\theta_k)^L,$$

这暗示了 $\lim_{L \rightarrow \infty} \|\ell_1^L\|_{L^\infty(\mathcal{X})} = 0$.

任给 $L \in \mathbb{N}$, 现在证明对任意 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $\|\ell_2^{L,\delta}\|_{L^\infty(\mathcal{X})} < \eta$. 注意到对任意 k 和 m , $H_m^k \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ 具有有界支集. 因此, 对任意 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $k' < k \leq k''$ 和 $0 \leq m \leq L$ 及任意 $x, y \in \mathcal{X}$ 满足 $d(x, y) < \delta$, 有 $|H_m^k(x) - H_m^k(y)| < \eta/L$. 对

任意 $(k, m, i) \in F_2^{L, \delta}$, 由 (5.2) 式知,

$$\begin{aligned} |b_{m,i}^k(x)| &= \left| H_{m-1}^k(x) - H_{m-1}^k(x_{m,i}^k) \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_{\mathcal{X}} \phi_{m,i}^k(z) d\mu(z) \right]^{-1} \int_{\mathcal{X}} \left(H_{m-1}^k(z) - H_{m-1}^k(x_{m,i}^k) \right) \phi_{m,i}^k(z) d\mu(z) \right| \phi_{m,i}^k(x) \\ &< 2\eta/L, \end{aligned}$$

这进一步暗示了对任意 $L \in \mathbb{N}$, 存在正数 δ , 使得 $\|\ell_2^{L, \delta}\|_{L^\infty(\mathcal{X})} \lesssim \sum_{k' < k \leq k''} 2^k \sum_{m \leq L} \eta/L \lesssim \eta$. 故 ℓ 可分解为一个连续的部分和某个一致任意小的量, 即 $\ell_3^{L, \delta}$ 和 $\ell_1^L + \ell_2^{L, \delta}$, 因此 ℓ 连续. 进一步, $h = f - \ell$ 连续且 h 是某连续 (p, ∞) - 原子的常数倍.

为获得 ℓ 的有限原子分解, 再次利用分解 $\ell = (\ell_1^L + \ell_2^{L, \delta}) + \ell_3^{L, \delta}$. 显然, $\ell_3^{L, \delta}$ 是连续 (p, ∞) - 原子的有限线性组合且 $\|\ell_3^{L, \delta}\|_{H_{\text{fin}}^{p, \infty}(\mathcal{X})} \leq \|f\|_{H^{*, p}(\mathcal{X})}$. 注意到 $\ell_1^L + \ell_2^{L, \delta} = \ell - \ell_3^{L, \delta}$, 故 $\ell_1^L + \ell_2^{L, \delta}$ 有有界支集且积分为 0, 这是因为 ℓ 和 $\ell_3^{L, \delta}$ 积分均为 0. 由此及 $\|\ell_1^L + \ell_2^{L, \delta}\|_{L^\infty(\mathcal{X})}$ 可任意小这一已知的事实得 $\ell_1^L + \ell_2^{L, \delta}$ 是某连续的 (p, ∞) - 原子的充分小的倍数, 故 $f = h + \ell_3^{L, \delta} + (\ell_1^L + \ell_2^{L, \delta})$ 且 $\|f\|_{H_{\text{fin}}^{p, \infty}(\mathcal{X})} \lesssim 1$, 这完成了 (b) 的证明.

为完成定理的证明, 仍需证 (5.4) 式. 记 $\epsilon \in (0, 1)$ 和 $\beta, \gamma \in (n(1/p - 1), \epsilon)$. 回顾

$$f^*(x) := \sup\{|\langle f, \varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma), \|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, r, \beta, \gamma)} \leq 1 \text{ 对某 } r > 0 \text{ 成立}\}.$$

若 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 满足 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, r, \beta, \gamma)} \leq 1$ 对某 $r \geq 4d(x, x_1)/3$ 成立, 则由类似文献 [9, 引理 2.2] 的证明知, 存在只依赖 $\mathcal{X}, \beta$ 和 γ 的正常数 C , 使得对任意 $y \in B(x, d(x, x_1))$, 有 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(y, r, \beta, \gamma)} \leq C$. 这暗示了对任意 $y \in B(x, d(x, x_1))$, 有 $|\langle f, \varphi \rangle| \lesssim f^*(y)$. 对此不等式的两边分别取 p 次幂再在球 $B(x, d(x, x_1))$ 上做积分平均, 并利用 $B(x_1, R) \subset B(x, 2d(x, x_1))$ 和 (2.2) 式及 $\|f^*\|_{L^p(\mathcal{X})} \lesssim 1$, 得

$$|\langle f, \varphi \rangle| \lesssim \left\{ \frac{1}{\mu(B(x, d(x, x_1)))} \int_{B(x, d(x, x_1))} [f^*(y)]^p d\mu(y) \right\}^{1/p} \lesssim [\mu(B(x_1, R))]^{-1/p}. \quad (5.9)$$

现设 $\varphi \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$ 满足 $\|\varphi\|_{\mathcal{G}(x, r, \beta, \gamma)} \leq 1$ 对某 $r \in (0, 4d(x, x_1)/3)$ 成立. 取 $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi(x) = 1$ 若 $|x| \leq 1$; 及 $\xi(x) = 0$ 若 $|x| \geq 2$. 令 $\tilde{\varphi}(z) := \varphi(z)\xi(\frac{16d(z, x_1)}{d(x, x_1)})$. 显然 $\tilde{\varphi} \in \mathcal{G}_0^\epsilon(\beta, \gamma)$. 而且存在不依赖 φ 的正常数 C , 使得对所有的 $y \in B(x_1, d(x, x_1))$, 有

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{G}(y, r, \beta, \gamma)} \leq C. \quad (5.10)$$

暂设 (5.10) 式成立, 则由 (5.10) 式和 $\text{supp } f \subset B(x_1, R)$ 知, $|\langle f, \varphi \rangle| = |\langle f, \tilde{\varphi} \rangle| \leq f^*(y)$ 对所有的 $y \in B(x_1, R)$ 成立, 由此及一个类似于 (5.9) 式的论证可推出 $|\langle f, \varphi \rangle| \lesssim [\mu(B(x_1, R))]^{-1/p}$. 这与 (5.9) 式一起即得 (5.4) 式.

为证 (5.4) 式, 只需证 (5.10) 式. 注意到若 $\tilde{\varphi}(z) \neq 0$, 则 $d(z, x) \geq d(x, x_1) - d(z, x_1) \geq 7d(x, x_1)/8$, 因此对任意 $y \in B(x_1, d(x, x_1))$, 有 $d(z, y) \leq 23d(z, x)/7$. 由此及 φ 的尺寸条件知,

$$|\tilde{\varphi}(z)| \leq |\varphi(z)| \chi_{\{d(z, x_1) \leq d(x, x_1)/8\}}(z) \lesssim \frac{1}{\mu(B(z, r + d(z, y)))} \left(\frac{r}{r + d(z, y)} \right)^\gamma. \quad (5.11)$$

对任意 $z, z' \in \mathcal{X}$ 满足 $d(z, z') \leq (r + d(z, y))/2$, 分以下两种情形估计 $|\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(z')|$. 先设 $d(z, z') \leq (r + d(z, x))/4$. 注意到若 $\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(z') \neq 0$, 则 $\max\{d(z, x_1), d(z', x_1)\} \leq d(x, x_1)/8$. 由此及 $d(z, z') \leq (r + d(z, x))/4$ 和 $r < 4d(x, x_1)/3$ 知 $d(z, x_1) \leq 17d(x, x_1)/18$, 从而有 $d(x, x_1)/18 \leq d(z, x) \leq 35d(x, x_1)/18$. 进一步有 $d(z, y) \leq 37d(z, x)$. 从这些估计及 (2.2)

式推出, 当 $d(z, z') \leq (r + d(z, x))/4$ 时,

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(z')| &\leq \varphi(z) \left[\xi \left(\frac{16d(z, x_1)}{d(x, x_1)} \right) - \xi \left(\frac{16d(z', x_1)}{d(x, x_1)} \right) \right] + |\varphi(z) - \varphi(z')| \\ &\lesssim \left(\frac{d(z, z')}{r + d(z, y)} \right)^\beta \frac{1}{\mu(B(z, r + d(z, y)))} \left(\frac{r}{r + d(z, y)} \right)^\gamma. \end{aligned}$$

现设 $d(z, z') > (r + d(z, x))/4$. 由于 $|\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(z')| \leq |\tilde{\varphi}(z)| + |\tilde{\varphi}(z')|$, 故只需证 $|\tilde{\varphi}(z)| + |\tilde{\varphi}(z')|$ 也具有如上的估计. 为此, 考虑到 $\tilde{\varphi}$ 的支集条件, 不妨设 $d(z, x_1) \leq d(x, x_1)/8$ 以及 $d(z', x_1) \leq d(x, x_1)/8$. 由这些假设以及 $d(z, z') \leq (r + d(z, x))/4$ 和 $r < 4d(x, x_1)/3$, 推出 $d(z, y) \leq 5d(z, x)$ 和 $r + d(z, y) \leq 10(r + d(z', x))$. 由此及 (2.2) 式推出, 当 $d(z, z') \leq (r + d(z, y))/2$ 且 $d(z, z') > (r + d(z, x))/4$ 时,

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(z) - \tilde{\varphi}(z')| &\leq \left(\frac{d(z, z')}{r + d(z, x)} \right)^\beta \left[\frac{1}{\mu(B(z, r + d(z, x)))} \left(\frac{r}{r + d(z, x)} \right)^\gamma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu(B(z', r + d(z', x)))} \left(\frac{r}{r + d(z', x)} \right)^\gamma \right] \\ &\lesssim \left(\frac{d(z, z')}{r + d(z, y)} \right)^\beta \frac{1}{\mu(B(z, r + d(z, y)))} \left(\frac{r}{r + d(z, y)} \right)^\gamma. \end{aligned}$$

这与 (5.11) 式一起产生了 (5.10) 式. 故 (5.4) 式成立. 于是完成了定理 5.6 的证明.

注 5.7 记 $p \in (n/(n+1), 1]$, $f \in \dot{G}_b^\epsilon(\beta, \gamma)$ 对某 $\epsilon \in (0, 1)$ 成立, 令 $\beta, \gamma \in (n(1/p - 1), \epsilon)$. 从命题 4.17 和定理 5.6 (b) 的证明易推出 f 具有如下形式的原子分解:

$$f = \sum_{j=1}^N \lambda_j a_j,$$

其中 $N \in \mathbb{N}$, $\{a_j\}_{j=1}^N \subset \dot{G}_b^\epsilon(\beta, \gamma)$ 是 (p, ∞) -原子, $\{\lambda_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{C}$ 且 $\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^p \lesssim \|f\|_{H^{*,p}(\mathcal{X})}^p$. 由此及 $\dot{G}_b^\epsilon(\beta, \gamma)$ 在 $H^{*,p}(\mathcal{X})$ 中稠和注 5.5, 即得到 $H_{\text{fin}}^{p,\infty}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{X})$ 在 $H_{\text{at}}^{p,\infty}(\mathcal{X})$ 中稠.

在考虑算子有界性之前, 先回顾如下概念^[34]:

定义 5.8 (i) 所谓拟 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 是赋予了一个拟范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ 的向量空间, 其中拟范数意味着 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ 非负、非退化 (即 $\|f\|_{\mathcal{B}} = 0$ 当且仅当 $f = 0$)、齐次且满足拟三角不等式, 即存在常数 $K \geq 1$, 使得对所有的 $f, g \in \mathcal{B}$, 有

$$\|f + g\|_{\mathcal{B}} \leq K(\|f\|_{\mathcal{B}} + \|g\|_{\mathcal{B}}).$$

(ii) 记 $r \in (0, 1]$. 称赋予拟范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_r}$ 的拟 Banach 空间 $\mathcal{B}_r$ 为 r -拟 Banach 空间, 若

$$\|f + g\|_{\mathcal{B}_r}^r \leq \|f\|_{\mathcal{B}_r}^r + \|g\|_{\mathcal{B}_r}^r$$

对所有的 $f, g \in \mathcal{B}$ 成立.

(iii) 任给 r -拟 Banach 空间 $\mathcal{B}_r$ 以及线性空间 $\mathcal{Y}$, 其中 $r \in (0, 1]$. 称算子 $T: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 $\mathcal{B}_r$ -次线性的, 若对任意的 $f, g \in \mathcal{Y}$ 和 $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$, 有

$$\|T(\lambda f + \nu g)\|_{\mathcal{B}_r} \leq (|\lambda|^r \|T(f)\|_{\mathcal{B}_r}^r + |\nu|^r \|T(g)\|_{\mathcal{B}_r}^r)^{1/r} \quad (5.12)$$

和

$$\|T(f) - T(g)\|_{\mathcal{B}_r} \leq \|T(f - g)\|_{\mathcal{B}_r}. \quad (5.13)$$

利用定理 5.6, 易得如下次线性算子在 $H^p(\mathcal{X})$ 上有界的判定准则.

定理 5.9 记 $p \in (n/(n+1), 1]$ 和 $r \in [p, 1]$. 设 $\mathcal{B}_r$ 是 r -拟 Banach 空间, 且以下两条中至少有一条成立:

(i) $q \in (p, \infty) \cap [1, \infty)$ 且 $\mathcal{B}_r$ -次线性算子 $T: H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{B}_r$ 满足

$$A := \sup\{\|Ta\|_{\mathcal{B}_r} : a \text{ 是 } (p, q)\text{-原子}\} < \infty;$$

(ii) $\mathcal{B}_r$ -次线性算子 $T: H_{\text{fin}}^{p,\infty}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{B}_r$ 满足

$$A := \sup\{\|Ta\|_{\mathcal{B}_r} : a \text{ 是连续的 } (p, \infty)\text{-原子}\} < \infty,$$

则 T 可唯一延拓为从 $H^p(\mathcal{X})$ 到 $\mathcal{B}_r$ 的有界 $\mathcal{B}_r$ -次线性算子.

证明 设 (i) 成立, 则对任意 $f \in H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$, 有 $f = \sum_{j=1}^N \lambda_j a_j$, 其中 $N \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{C}$ 且 $\{a_j\}_{j=1}^N$ 是 (p, q) -原子. 利用 (i) 和 (5.12) 式以及 $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq \{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^\nu\}^{1/\nu}$ 对任意 $\nu \in (0, 1]$ 成立, 得

$$\|T(f)\|_{\mathcal{B}_r} \lesssim \left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j|^p \right)^{1/p}.$$

对 f 的所有有限原子分解取下确界并利用定理 5.6 和注 5.5, 推得对所有 $f \in H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$, 有

$$\|Tf\|_{\mathcal{B}_r} \lesssim \|f\|_{H^p(\mathcal{X})}. \quad (5.14)$$

对任意 $f \in H^p(\mathcal{X})$, 利用 $H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$ 在 $H^p(\mathcal{X})$ 中稠知, 存在序列 $\{f_N\}_{N=1}^{\infty} \subset H_{\text{fin}}^{p,q}(\mathcal{X})$, 使得 $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_{H^p(\mathcal{X})} = 0$. 由此及 (5.13) 和 (5.14) 式知 $\{T(f_N)\}_N$ 是 $\mathcal{B}_r$ 中的 Cauchy 列. 定义

$$\tilde{T}(f) := \lim_{N \rightarrow \infty} T(f_N)$$

为 $\mathcal{B}_r$ 中的极限. 由 (5.13) 和 (5.14) 式易知 $\tilde{T}(f)$ 是很好定义的, 唯一确定的且满足 (5.14) 式, 故 $\tilde{T}$ 是 T 的延拓.

若 (ii) 成立, 则由注 5.7 并类似 (i) 的讨论, 同样可得定理的结论. 这完成了定理 5.9 的证明.

注 5.10 (i) 注意到任意 Banach 空间均是 1-拟 Banach 空间, 且拟 Banach 空间 ℓ^q , $L^q(\mathcal{X})$ 和 $H^q(\mathcal{X})$, 其中 $q < 1$, 是典型的 q -拟 Banach 空间.

(ii) 由 Aoki-Rolewicz 定理^[41, 42] 知, 任意拟 Banach 空间本质上都是 q -拟 Banach 空间, 其中 $q = 1/\log_2(2K)$ 且 K 如定义 5.8 (i), 因此, 定理 5.9 的结论实质上对任意拟 Banach 空间均成立.

致谢 作者衷心感谢审稿人仔细阅读全文并提出了一些有益建议.

参考文献

- 1 Stein E M, Weiss G. On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p -spaces. *Acta Math*, **103**: 25–62 (1960)
- 2 Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables. *Acta Math*, **129**: 137–193 (1972)
- 3 Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993

- 4 Coifman R R, Weiss G. Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes. In: Lecture Notes in Math, Vol. 242. Berlin: Springer, 1971
- 5 Coifman R R, Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull Amer Math Soc*, **83**: 569–645 (1977)
- 6 Macías R A, Segovia C. A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type. *Adv Math*, **33**: 271–309 (1979)
- 7 Han Y. Triebel-Lizorkin spaces on spaces of homogeneous type. *Studia Math*, **108**: 247–273 (1994)
- 8 Duong X T, Yan L. Hardy spaces of spaces of homogeneous type. *Proc Amer Math Soc*, **131**: 3181–3189 (2003)
- 9 Li W M. A maximal function characterization of Hardy spaces on spaces of homogeneous type. *Anal Theory Appl*, **14**(2): 12–27 (1998)
- 10 Han Y, Sawyer E T. Littlewood-Paley theory on spaces of homogeneous type and the classical function spaces. *Mem Amer Math Soc*, **110**(530): 1–126 (1994)
- 11 Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces. New York: Springer-Verlag, 2001
- 12 Triebel H. Theory of Function Spaces, III. Basel: Birkhäuser Verlag, 2006
- 13 Alexopoulos G. Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth. *Proc Amer Math Soc*, **120**: 973–979 (1994)
- 14 Varopoulos N T. Analysis on Lie groups. *J Funct Anal*, **76**: 346–410 (1988)
- 15 Varopoulos N T, Saloff-Coste L, Coulhon T. Analysis and Geometry on Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
- 16 Nagel A, Stein E M, Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties. *Acta Math*, **155**: 103–147 (1985)
- 17 Nagel A, Stein E M. The $\square_b$ -heat equation on pseudoconvex manifolds of finite type in $\mathbb{C}^2$. *Math Z*, **238**: 37–88 (2001)
- 18 Nagel A, Stein E M. Differentiable control metrics and scaled bump functions. *J Differential Geom*, **57**: 465–492 (2001)
- 19 Nagel A, Stein E M. On the product theory of singular integrals. *Rev Mat Iberoamericana*, **20**: 531–561 (2004)
- 20 Nagel A, Stein E M. The $\overline{\partial}_b$ -complex on decoupled boundaries in $\mathbb{C}^n$. *Ann of Math* (2), **164**: 649–713 (2006)
- 21 Danielli D, Garofalo N, Nhieu D M. Non-doubling Ahlfors measures, perimeter measures, and the characterization of the trace spaces of Sobolev functions in Carnot-Carathéodory spaces. *Mem Amer Math Soc*, **182**(857): 1–119 (2006)
- 22 Stein E M. Some geometrical concepts arising in harmonic analysis. *Geom Funct Anal*, **Special Volume**: 434–453 (2000)
- 23 Han Y, Müller D, Yang D. A theory of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on metric measure spaces modeled on Carnot-Carathéodory spaces. Submitted
- 24 Han Y, Müller D, Yang D. Littlewood-Paley characterizations for Hardy spaces on spaces of homogeneous type. *Math Nachr*, **279**: 1505–1537 (2006)
- 25 Meda S, Sjögren P, Vallarino M. On the H^1 - L^1 boundedness of operators. *Proc Amer Math Soc*, in press
- 26 Meyer Y, Taibleson M, Weiss G. Some functional analytic properties of the spaces B_q generated by blocks. *Indiana Univ Math J*, **34**: 493–515 (1985)
- 27 García-Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1985
- 28 Bownik M. Boundedness of operators on Hardy spaces via atomic decompositions. *Proc Amer Math Soc*, **133**: 3535–3542 (2005)
- 29 Meyer Y, Coifman R. Wavelets: Calderón-Zygmund and Multilinear Operators. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 30 Yabuta K. A remark on the (H^1, L^1) boundedness. *Bull Fac Sci Ibaraki Univ Ser A*, **25**: 19–21 (1993)

- 31 Yang D, Zhou Y. A bounded criterion via atoms for linear operators in Hardy spaces. *Constr Approx*, in press
- 32 Bownik M, Li B, Yang D, et al. Weighted anisotropic Hardy spaces and their applications in boundedness of sublinear operators. *Indiana Univ Math J*, in press
- 33 Hu G, Yang D, Zhou Y. Boundedness of singular integrals in Hardy spaces on spaces of homogeneous type. *Taiwanese J Math*, in press
- 34 Yang D, Zhou Y. Boundedness of sublinear operators in Hardy spaces on RD-spaces via atoms. *J Math Anal Appl*, **339**: 622–635 (2008)
- 35 Grafakos L, Liu L, Yang D. Radial maximal function characterizations for Hardy spaces on RD-spaces. Submitted
- 36 Nakai E, Yabuta K. Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation on spaces of homogeneous type. *Math Japon*, **46**: 15–28 (1997)
- 37 Macías R A, Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Adv Math*, **3**: 257–270 (1979)
- 38 Christ M. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloq Math*, **60–61**: 601–628 (1990)
- 39 Wojtaszczyk P. Banach Spaces for Analysts. Cambridge: Cambridge University Press, 1991
- 40 Grafakos L, Liu L, Yang D. Vector-valued singular integrals and maximal functions on spaces of homogeneous type. *Math Scand*, in press
- 41 Aoki T. Locally bounded linear topological spaces. *Proc Imp Acad Tokyo*, **18**: 588–594 (1942)
- 42 Rolewicz S. Metric Linear Spaces. 2nd ed. Mathematics and its Applications (East European Series), 20. Dordrecht-Warsaw: D. Reidel Publishing Co. and PWN-Polish Scientific Publishers, 1985