中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 7 期: 779～810
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
自然科学基金项目进展专栏 综 述

强不定问题的变分方法

丁彦恒[1,2]

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;
2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100190
E-mail: dingyh@math.ac.cn

收稿日期: 2016-09-18; 接受日期: 2017-01-17; 网络出版日期: 2017-06-05; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10831005, 11331010, 10421001 和 10640420049) 资助项目

摘要 本文概述作者承担的国家自然科学基金项目所获得的部分成果, 特别是从源头出发系统地培育强不定问题变分方法的特色方向, 并开启一些应用问题的研究, 包括 (1) 建立强不定问题的变分框架的基本方法; (2) 建立局部凸拓扑线性空间的形变理论, 相应得到处理强不定问题的临界点定理; (3) 首次研究非自治稳态 Dirac 系统解的存在性, 特别是突破强不定困难获得其半经典解的存在性、集中现象和指数衰减性; (4) 首次得到非线性 (非自治、无界 Hamilton 型) 反应 - 扩散系统整体解的存在性和多重性, 特别是奇异扰动下其基态解的存在性、集中现象和衰减性; (5) 深入研究 Hamilton 系统的同宿轨和 Schrödinger 方程的全局解; (6) 其他初始性工作, 如自旋流形上的 Dirac 方程的分歧现象.

关键词 强不定问题 变分框架 形变理论 Dirac 系统 无界 Hamilton 系统 自旋流形
MSC (2010) 主题分类 58E05, 46A03, 35A01, 49S05, 37J45, 37K05

1 强不定问题的变分理论

在国家自然科学基金的资助下, 我们致力于培育强不定问题的变分方法这一特色研究方向, 该理论的基础由两部分组成: 强不定问题的变分框架; 非距离拓扑空间的形变理论及相应的处理强不定问题的临界点定理.

1.1 强不定问题的变分框架

我们所建立的强不定问题统一的变分框架已成为研究的基本方法. 原创点: 利用自共轭算子的绝对值构造工作空间; 利用线性算子插值理论研究空间的嵌入性质, 利用算子的谱进行空间分解, 进而给出非线性条件, 得到泛函的规范结构以适合应用临界点理论.

考虑形如

$$Au = N(u), \quad u \in H \tag{1.1}$$

英文引用格式: Ding Y H. Variational methods for strongly indefinite problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 779–810, doi: 10.1360/N012016-00164

© 2017《中国科学》杂志社

的半线性方程, 其中 H 代表 Hilbert 空间, A 是 (无界) 自共轭算子, 其定义域 $\mathcal{D}(A)\subset H$, $N:\mathcal{D}(A)\to H$ 是 (非线性) 梯度映射, 换言之, 存在函数 $\Psi:\mathcal{D}(A)\subset H\to H$ 使得 $N(u)=\nabla\Psi(u)$. 形式上, (1.1) 的解是泛函

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}(Au,u)_H-\Psi(u) \tag{1.2}$$

的临界点, 其中 $(\cdot,\cdot)_H$ 记 H 的内积 (其对应的范数记作 $\|\cdot\|_H$). 一般而言, 形式 (1.2) 没有提供足够的信息. 注意 Φ 仅定义于 H 的一个真子空间上, 应用中很难对 Ψ 给出可验证的条件以保证 (1.1) 的解的存在. 例如, 如何处理量子力学中的非线性 Dirac 系统、力学中的无穷维 Hamilton 系统、反应 - 扩散系统? 于是需要选择合适的工作空间 E (既不能 "太大" 也不能 "太小"), 在 E 上重新恰当地表示 Φ 使得它的临界点对应问题 (1.1) 的解, 且具有易于研究的表达形式. 这就是建立变分框架 (或变分原理).

我们对此的贡献是找到利用算子插值理论予以研究的方法, 系统地处理相关的问题. 这里介绍的思路首先出现在文献 [1] (用以研究 1 阶 Hamilton 系统的同宿轨), 随后在文献 [2] 中得以完善.

以 $\sigma(A)$、$\sigma_e(A)$ 和 $\sigma_d(A)$ 分别记 A 的谱、本质谱和有限重特征值集合. 根据算子理论, Hilbert 空间 H 具有正交分解:

$$H=H^-\oplus H^0\oplus H^+,\quad u=u^-+u^0+u^+,$$

使得 A 在 H^- 和 H^+ 分别是负定和正定的, H^0 是 A 的零空间. 以 $\{E(\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$ 记 A 的谱族, $U=I-E(0)-E(-0)$, $|A|$ 记 A 的绝对值, $|A|^{1/2}$ 记 $|A|$ 的平方根. 由定义知, U 与 $|A|$ 可交换, 从而与 $|A|^{1/2}$ 可交换. 取 $E=\mathcal{D}(|A|^{1/2})$, 并在 E 上引进内积

$$(u,v)_E=(|A|^{1/2}u,|A|^{1/2}v)_H+(u,v)_H.$$

以 $\|\cdot\|_E$ 记 $(\cdot,\cdot)_E$ 导出的范数, 则 E 有关于内积 $(\cdot,\cdot)_H$ 和 $(\cdot,\cdot)_E$ 都正交的分解:

$$E=E^-\oplus E^0\oplus E^+,\quad u=u^-+u^0+u^+, \tag{1.3}$$

其中 $E^\pm=E\cap H^\pm$, $E^0=H^0$.

设 $\Psi\in C^1(E,\mathbb{R})$ 且 $\Psi'(u)=N(u)$ (在应用中, 只要对非线性项作适当的假设, 就能满足这一要求). 在 E 上定义泛函

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}(\||A|^{1/2}u^+\|_H^2-\||A|^{1/2}u^-\|_H^2)-\Psi(u),\quad \forall\, u=u^-+u^0+u^+\in E, \tag{1.4}$$

则 $\Phi\in C^1(E,\mathbb{R})$. 进一步, 当 $u\in\mathcal{D}(A)$ 是 Φ 的临界点时, 它就是方程 (1.1) 的解. 事实上, 对任何 $v\in E$, 有

$$\begin{aligned}0&=(|A|^{1/2}u^+,|A|^{1/2}v^+)_H-(|A|^{1/2}u^-,|A|^{1/2}v^-)_H-(N(u),v)_H\\&=(|A|(u^+-u^-),v)_H-(N(u),v)_H\\&=(|A|Uu,v)_H-(N(u),v)_H\\&=(Au-N(u),v)_H.\end{aligned}$$

注 1 当 0 至多是 A 的有限重特征值时, 为更方便起见, 通常在 E 上定义下述等价内积:

$$(u,v)=(|A|^{1/2}u,|A|^{1/2}v)_H+(u^0,v^0)_H.$$

此时, 以 $\|\cdot\|$ 记由 $(\cdot,\cdot)$ 导出的范数, Φ 可表示为

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}(\|u^+\|^2-\|u^-\|^2)-\Psi(u). \tag{1.5}$$

注 2 在应用中建立变分框架时, 重要的是要利用算子插值理论得到 E 到有关空间中的嵌入性质, 从而对非线性项做出合理的假设.

注 3 1973 年, 数学家 Ambrosetti 和 Rabinowitz [3] 发表了著名的 "Mountain-Pass" (山路) 定理. 自此, 近代变分方法迅速发展. 特别是在 20 世纪 80 年代, 大批数学工作者置身于 Minimax 方法、Lusternik-Schnireman 理论和 Morse 理论的研究 (参见文献 [3–8] 及其参考文献). 当时人们把大量的精力投放在研究下述情形: $\sigma(A)=\sigma_d(A)$ 且下方有界 (如有界区域上的椭圆边值问题); $\emptyset\neq\sigma(A)\cap(-\infty,0)\subset\sigma_d(A)$ 且 $\emptyset\neq\sigma(A)\cap(0,\infty)\subset\sigma_d(A)$ (如一阶 Hamilton 系统的周期解和波方程的周期解). 一般而言, 对于这些情形, 利用分部积分或人们熟知的特征值和特征函数表示容易建立方程 (1.1) 对应的 Lagrange 泛函 Φ. 20 世纪 90 年代以来, 人们越来越对强不定问题感兴趣 (参见文献 [9]).

定义 1 称问题 (1.1) 是强不定的, 如果 $\sigma(A)\cap(-\infty,0)$ 和 $\sigma(A)\cap(0,\infty)$ 都是无限集. 称问题 (1.1) 是非常强不定的, 如果 $\sigma_e(A)\cap(-\infty,0)\neq\emptyset$ 且 $\sigma_e(A)\cap(0,\infty)\neq\emptyset$.

显然, 如果 (1.1) 是非常强不定的, 则其必是强不定的, 如后面将展开讨论的一阶 (非自治) Hamilton 系统的同宿轨、非线性 Dirac 方程的稳定态和反应 - 扩散系统的同宿型解等, 都是非常强不定的. 变分框架 (1.3) 和 (1.4) 不仅可用以处理以前的问题, 重要的是可用以处理这里所指非常强不定问题.

1.2 局部凸拓扑线性空间中的形变理论

观察对于非常强不定泛函 (1.4), 由于一方面 $\sigma_e(A)\cap(-\infty,0)\neq\emptyset$ 且 $\sigma_e(A)\cap(0,\infty)\neq\emptyset$, 从而导致 $E^{\pm}$ 都是无穷维的子空间; 另一方面通常用以处理无界区域上的变分问题, 而无界区域上的 Sobolev 型嵌入是非紧的, 因此, Φ 一般不具有紧性 (即常说的 Palais-Smale 条件 (简称 (PS) 条件)), 所以问题十分复杂. 特别是不能应用 Leray-Schauder 度以判别所谓的 "相交数" 问题. 下面主要介绍文献 [2,10,11] 在这方面相对系统的工作, 其原创点: 引入规度空间 (gage space, 非距离拓扑) 的 Lipschitz 正规性概念, 建立 Lipschitz 单位分解; 建立局部凸拓扑线性空间上的常微分方程的 Cauchy 问题流的存在唯一性这一基础性理论; 获得新的形变理论, 把无穷维水平集依弱拓扑局部形变到有限维空间中. 基于此, 我们得到了一系列新的 Minimax 方法, 发展了指标、畴数理论及其他几何拓扑方法. 非距离拓扑空间的形变理论, 特别是规度空间的 Lipschitz 正规型概念等都是首次出现的, 具有基础及应用基础理论两方面的重要价值.

1.2.1 形变理论

以往的形变理论通常依赖于距离拓扑, 有标准的关于常微分方程流的存在唯一性定理作为支撑, 参见文献 [5,6,8,12,13] (也可参见文献 [9] 的简述). 因弱拓扑是非距离的, 故须从源头出发建立定义其上的 Cauchy 问题的流的存在唯一性理论. Banach 空间上的存在唯一性定理的建立需要标准的 (局部) Lipschitz 连续的单位分解理论. 如何谈论非距离空间上的 Lipschitz 连续单位分解?

设 X 是一个集合, $\mathfrak{D}$ 为 X 上的一族半距离, 称 $(X,\mathfrak{D})$ 为规度空间, 用 $\mathcal{T}_d$ 记 d 导出的拓扑 $(\forall\, d\in\mathfrak{D})$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{D}}$ 记由所有 $\mathcal{T}_d$ $(d\in\mathfrak{D})$ 生成的拓扑. 称 $\mathfrak{D}$ 是饱和的, 如果当 $d,d'\in\mathfrak{D}$ 时, $\max\{d,d'\}\in\mathfrak{D}$. 下面不妨假设 $\mathfrak{D}$ 是饱和的.

定义 2 [10] 称从 X 到半距离空间 (M,d_M) 的映射 f 是 Lipschitz (连续) 的, 如果存在 $d\in\mathfrak{D}$ 和 $\lambda>0$ 使得

$$d_M(f(x),f(y))\leqslant\lambda d(x,y),\quad\forall\, x,y\in X.$$

称 f 是局部 Lipschitz 的, 如果每个 $x\in X$ 有邻域 U_x 使得 $f\,|_{U_x}$ 是 Lipschitz 的. 称规度空间 $(X,\mathfrak{D})$

和 $(Y,\mathcal{E})$ 是等价的, 如果存在同胚映射 $h: X \to Y$ 使得 $\forall f: (Y,\mathcal{E}) \to (M,d_M)$ 成立: f 是 (局部) Lipschitz 的当且仅当 $f\circ h$ 是 (局部) Lipschitz 的.

引理 1 [10] $f: X \to M$ 是局部 Lipschitz 的当且仅当 $\forall x \in X$, 存在 $d \in \mathfrak{D}$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ 使得

$$d_M(f(y), f(z)) \leqslant \lambda d(y,z), \quad \forall y,z \in U_\varepsilon(x;d),$$

其中 $U_\varepsilon(x;d)$ 表示 x 的一个 $\mathcal{T}_d$ 邻域.

定义 3 [10] 称规度空间 $(X,\mathfrak{D})$ 是 Lipschitz 正规的, 如果 X 是 Hausdorff 的, 且任给两个不相交的闭集 $A,B \subset X$, 存在一个局部 Lipschitz 映射 $f: X \to [0,1]$ 满足 $f|_A \equiv 0$ 和 $f|_B \equiv 1$.

Lipschitz 正规性概念的重要性主要表现在建立非距离拓扑空间的单位分解.

引理 2 [10] 假设 $(X,\mathfrak{D})$ 是 Lipschitz 正规的和仿紧的, 则对 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$ 都有从属于它的局部有限的单位分解 Π 使得每个 $\pi \in \Pi$ 是局部 Lipschitz 映射.

引理 3 [10] 下述结论成立:

(i) 若 X 是 σ- 紧的 (即 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots, X_n$紧, $\bigcup_n X_n = X$), 则 X 是 Lipschitz 正规的;

(ii) Lipschitz 正规空间的 F_σ- 子空间是 Lipschitz 正规的;

(iii) 若 X 是 σ- 紧的, Y 是仿紧且 Lipschitz 正规的, 则 $X\times Y$ 是 Lipschitz 正规的.

下面, 设 E 是一个实向量空间, $\mathfrak{P}$ 是一族半范数 (从而 E 是局部凸拓扑线性空间, 显然是规度空间), 记相应的拓扑为 $T_{\mathfrak{P}}$. 考虑 E 的开子集 W, 设 $\{\pi_j : j \in J\}$ 是 W 的一个局部有限单位分解 ($\pi_j: E \to [0,1]$ 是一族 Lipschitz 映射), $\{w_j : j \in J\} \subset E$. 令

$$f: W \to E, \quad f(u) = \sum_{j\in J} \pi_j(u) w_j,$$

直接验证可知, $\forall u \in W$, 下述 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varphi(t,u) = f(\varphi(t,u)), \\ \varphi(0,u) = u \end{cases} \tag{1.6}$$

具有唯一解 $\varphi(\cdot,u): I_u = (T^-(u), T^+(u)) \to W$ 定义于最大区间 $I_u \subset \mathbb{R}$. 令

$$\mathcal{O} := \{(t,u) : u \in W, t \in I_u\} \subset \mathbb{R}\times W.$$

显然, $\varphi: \mathcal{O} \to W$ 是 W 上的流.

定理 1 [10] 下述断言成立:

(i) $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}\times W$ 的开子集;

(ii) φ 是局部 Lipschitz 的.

粗糙地讲, 上述理论的重要性在于, 这样的流把每一元素的某个 (弱) 开邻域映到有限维空间中.

为了临界点理论的需要, 进一步假设 E 上存在范数 $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ 使得 $(E,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. $\forall p \in \mathfrak{P}$, 存在 $u_p^* \in E^*$ 满足 $p(u) = |u_p^*(u)|$. 于是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{P}}$ 包含在 E 的弱拓扑中. 显然, 若 f 映 $(E,\mathfrak{P})$ 入距离空间 (M,d) 是 (局部) Lipschitz 的, 则 $f: (E,\|\cdot\|) \to (M,d)$ 也是 (局部) Lipschitz 的.

假设泛函 $\Phi: E \to \mathbb{R}$ 关于 $\|\cdot\|$ 是 C^1 的. $\forall a,b \in \mathbb{R}$, 记 $\Phi^a := \{u \in E : \Phi(u) \leqslant a\}$, $\Phi_a := \{u \in E : \Phi(u) \geqslant a\}$, $\Phi_a^b := \Phi_a \cap \Phi^b$. 在应用中, Φ 通常是 $\mathfrak{P}$- 上半连续的, 但不必是 $\mathfrak{P}$- 连续的.

定理 2 [10] 设 $a < b$, Φ_a 是 $\mathfrak{P}$- 闭的, $\Phi': (\Phi_a^b, \mathcal{T}_{\mathfrak{P}}) \to (E^*, \mathcal{T}_{w^*})$ 连续, 且

$$\alpha := \inf\{\|\Phi'(u)\| : u \in \Phi_a^b\} > 0, \tag{1.7}$$

则存在形变 $\eta:[0,1]\times\Phi^b\to\Phi^b$ 满足:

(i) η 在 Φ^b 上关于 $\mathfrak{P}$- 拓扑和范数拓扑都连续;

(ii) $\forall\, t$, 从 Φ^b 到 $\eta(t,\Phi^b)$ 上的映射 $u\mapsto\eta(t,u)$ 关于 $\mathfrak{P}$- 拓扑和范数拓扑都是同胚的;

(iii) $\eta(0,u)=u$, $\forall\, u\in\Phi^b$;

(iv) $\eta(t,\Phi^c)\subset\Phi^c$, $\forall\, c\in[a,b]$, $\forall\, t\in[0,1]$;

(v) $\eta(1,\Phi^b)\subset\Phi^a$;

(vi) 每个 $u\in\Phi^b$ 有 $\mathfrak{P}$- 邻域 $U\subset\Phi^b$ 使得集 $\{v-\eta(t,v):v\in U,0\leqslant t\leqslant 1\}$ 包含在 E 的有限维子空间中;

(vii) 若有限群 G 等距作用于 E 使得 Φ 是 G- 不变的, 则 η 关于 u 是 G- 等变的.

回顾, 称 $\{u_n\}\subset E$ 是 Φ 的 $(\mathrm{PS})_c$- 序列 $(c\in\mathbb{R})$, 如果 $\Phi(u_n)\to c$ 和 $\Phi'(u_n)\to 0$; 称 Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$- 条件, 如果任何 $(\mathrm{PS})_c$- 序列都有收敛子序列. 称 $\{u_n\}$ 是 Φ 的 $(\mathrm{C})_c$- 序列, 如果 $\Phi(u_n)\to c$ 且 $(1+\|u_n\|)\Phi'(u_n)\to 0$; 称 Φ 满足 $(\mathrm{C})_c$- 条件, 如果任何 $(\mathrm{C})_c$- 序列都有收敛子序列 (参见文献 [14]). 集合 $\mathcal{A}\subset E$ 称为 $(\mathrm{PS})_c$- 吸引集, 如果 $\forall\,\varepsilon,\delta>0$, $\forall\,(\mathrm{PS})_c$- 序列 $\{u_n\}$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $u_n\in U_\varepsilon(\mathcal{A}\cap\Phi_{c-\delta}^{c+\delta})$, $\forall\, n\geqslant n_0$. 类似地, 定义 $(\mathrm{C})_c$- 吸引集, 如果这个性质对任何 $(\mathrm{C})_c$- 序列成立. 任给 $I\subset\mathbb{R}$, 称 $\mathcal{A}$ 是 $(\mathrm{PS})_I$- 吸引集 (或 $(\mathrm{C})_I$- 吸引集), 如果任给 $c\in I$, $\mathcal{A}$ 是 $(\mathrm{PS})_c$- 吸引集 (或 $(\mathrm{C})_c$- 吸引集). $(\mathrm{PS})_c$- 吸引集和 $(\mathrm{C})_c$- 吸引集的概念参见文献 [2,10,15].

定理 3 [10] 假设 $c\in\mathbb{R}$ 是 Φ 的正则值, 且存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\Phi_{c-\varepsilon}$ 是 $\mathfrak{P}$- 闭的, $\forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $\Phi':(\mathrm{clos}_{\mathfrak{P}}(\Phi_{c-\varepsilon_0}^{c+\varepsilon_0}),\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})\to(E^*,\mathcal{T}_{w^*})$ 连续. 若 Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$- 条件, 则存在 $\delta>0$ 和形变 $\eta:[0,1]\times\Phi^{c+\delta}\to\Phi^{c+\delta}$ 满足定理 2 的断言 (i)–(vii), 其中 $a:=c-\delta$, $b:=c+\delta$.

处理强不定问题时, 我们遇到下面的情形: $E=X\oplus Y$, 其中 X 和 Y 是 Banach 空间, 且 X 可分又自反. 设 $\mathfrak{S}\subset X^*$ 稠密, $\mathfrak{Q}$ 记 X 上的半范数 $q_s(x):=|\langle x,s\rangle_{X,X^*}|$ $(s\in\mathfrak{S})$ 作成的集合, $\mathfrak{D}=\{d_s:s\in\mathfrak{S}\}$ 记对应的 $X\cong X^{**}$ 上的半距离. 以 $\mathfrak{P}$ 记 E 上的所有下述形式的半范数作成的集合:

$$p_s:E=X\oplus Y\to\mathbb{R},\quad p_s(x+y)=q_s(x)+\|y\|,\quad s\in\mathfrak{S}.$$

令 $P_X:E=X\oplus Y\to X$ 表到 X 的投影, $P_Y:=I-P_X:E\to Y$ 表到 Y 的投影.

定理 4 [10] 设 $a<b$, Φ_a 是 $\mathfrak{P}$- 闭的, $\Phi':(\Phi_a^b,\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})\to(E^*,\mathcal{T}_{w^*})$ 是连续的. 又设

$$\alpha:=\inf\{(1+\|u\|)\|\Phi'(u)\|:u\in\Phi_a^b\}>0, \tag{1.8}$$

并且

$$\text{存在 } \gamma>0 \text{ 使得 } \|u\|<\gamma\|P_Yu\|,\quad \forall\, u\in\Phi_a^b, \tag{1.9}$$

则存在形变 $\eta:[0,1]\times\Phi^b\to\Phi^b$ 满足定理 2 中的断言 (i)–(vii).

定理 5 [10] 设 $c\in\mathbb{R}$ 是 Φ 的正则值, 且存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\Phi_{c-\varepsilon}$ 是 $\mathfrak{P}$- 闭的, $\forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $\Phi':(\mathrm{clos}_{\mathfrak{P}}(\Phi_{c-\varepsilon_0}^{c+\varepsilon_0}),\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})\to(E^*,\mathcal{T}_{w^*})$ 是连续的. 若 Φ 满足 (3.4) 和 $(\mathrm{C})_c$- 条件, 则存在 $\delta>0$ 和形变 $\eta:[0,1]\times\Phi^{c+\delta}\to\Phi^{c+\delta}$ 满足定理 2 的性质 (i)–(vii), 其中 $a:=c-\delta$, $b:=c+\delta$.

当 (1.2) (或 (1.3)) 不满足时, 我们有下面的定理:

定理 6 [10] 设 $a<b$, $I:=[a,b]$, Φ_a 是 $\mathfrak{P}$- 闭的, $\Phi':(\mathrm{clos}_{\mathfrak{P}}(\Phi_a^b),\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})\to(E^*,\mathcal{T}_{w^*})$ 是连续的, 且

$$\Phi'(u)\neq 0,\quad \forall\, u\in\mathrm{clos}_{\mathfrak{P}}(\Phi_a^b), \tag{1.10}$$

则有下述断言:

(i) 若 Φ 有 $(\mathrm{PS})_I$- 吸引集 $\mathcal{A}$ 使得 $P_X\mathcal{A}\subset X$ 有界, 且

$$\beta := \inf\{\|P_Y u - P_Y v\| : u, v \in \mathcal{A}, P_Y u \neq P_Y v\} > 0, \tag{1.11}$$

则存在形变 $\eta : [0,1]\times\Phi^b \to \Phi^b$ 满足定理 2(i) 和 2(iii)–2(vii);

(ii) 若 Φ 有 $(\mathrm{C})_I$- 吸引集 $\mathcal{A}$ 使得 (1.6) 成立, $P_Y\mathcal{A}\subset Y$ 有界, (1.4) 成立, 则存在与 (i) 同样的 η.

当临界点出现时, 有下面的定理 (处理多重临界点存在性时用):

定理 7 [10] 设 $a<b$, $I:=[a,b]$, $\Phi : (\Phi_a^b, \mathcal{T}_{\mathfrak{P}}) \to \mathbb{R}$ 上半连续, $\Phi' : (\Phi_a^b, \mathcal{T}_{\mathfrak{P}}) \to (E^*, \mathscr{T}_{w^*})$ 连续.

(1) 若 Φ 有 $(\mathrm{PS})_I$- 吸引集 $\mathcal{A}$, 则 $\forall\, c\in(a,b)$, $\forall\,\sigma>0$, 存在形变 $\eta : [0,1]\times\Phi^b\to\Phi^b$ 满足定理 2 中的 (i)–(iv)、(vi) 和 (vii), 及

(viii) $\eta(1,\Phi^{c+\delta})\subset\Phi^{c-\delta}\cup U_\sigma$, $\eta(1,\Phi^{c+\delta}\setminus U_\sigma)\subset\Phi^{c-\delta}$, $\forall\,\delta>0$ 充分小 $U_\sigma = X\times U_\sigma(P_Y\mathcal{A})$.

(2) 若 Φ 有 $(\mathrm{C})_I$- 吸引集 $\mathcal{A}$ 使得 $P_Y\mathcal{A}\subset Y$ 有界且 (1.4) 满足, 则 (1) 的断言成立.

1.2.2 几个临界点定理

基于新的形变理论, 我们可建立一系列 (处理强不定问题) 临界点定理, 下面陈述其中常用的几个. 本节总假设 $E = X\oplus Y$ 是 Banach 空间, 其中 X 可分自反. 以 $\|\cdot\|$ 记 X、Y 和 E 的范数. 取 $\mathfrak{S}\subset X^*$ 为稠密子集, $\mathfrak{D} = \{d_s : s\in\mathfrak{S}\}$ 记 $X\cong X^{**}$ 上对应的半范数族. 如前令 $\mathfrak{P}$ 记 E 上的半范数族: $p_s\in\mathfrak{P}$ 当且仅当

$$p_s : E = X\oplus Y\to\mathbb{R},\quad p_s(x+y) = |s(x)| + \|y\|,\quad s\in\mathfrak{S}.$$

我们的基本假设是

(Φ_0) $\Phi\in C^1(E,\mathbb{R})$; $\Phi : (E,\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})\to\mathbb{R}$ 上半连续 (换言之, Φ_a 是 $\mathfrak{P}$- 闭的, $\forall\, a\in\mathbb{R}$), 且 $\Phi' : (\Phi_a,\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})\to(E^*,\mathcal{T}_{w^*})$ 连续, $\forall\, a\in\mathbb{R}$.

命题 1 [10] 如果 $\Phi\in C^1(E,\mathbb{R})$ 有形式

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2) - \Psi(u),\quad \forall\, u = x+y\in E = X\oplus Y,$$

且

(i) $\Psi\in C^1(E,\mathbb{R})$ 下有界;

(ii) $\Psi : (E,\mathcal{T}_w)\to\mathbb{R}$ 下半序列连续;

(iii) $\Psi' : (E,\mathcal{T}_w)\to(E^*,\mathcal{T}_{w^*})$ 序列连续;

(iv) $\nu : E\to\mathbb{R}$, $\nu(u) = \|u\|^2$, 是 C^1 的, $\nu' : (E,\mathcal{T}_w)\to(E^*,\mathcal{T}_{w^*})$ 序列连续,

则 Φ 满足 (Φ_0).

下面, 对于局部凸拓扑线性空间 Z 的子集 A, 以 $L(A) := \overline{\mathrm{span}(A)}$ 表示含 A 的最小线性子空间, ∂A 记 A 在 $L(A)$ 中的边界. 对线性子空间 $F\subset Z$, 记 $A_F := A\cap F$. 令 $I = [0,1]$.

定义 4 [10] 任给 $Q,S\subset Z$ 使得 $S\cap\partial Q = \emptyset$, 称 Q 与 S 有限地环绕, 如果对任何与 S 相交的有限维线性子空间 $F\subset Z$, 任何连续的 $h : I\times Q_F\to F + L(S)$, $h(0,u) = u$ (任给 u), $h(I\times\partial Q_F)\cap S = \emptyset$ 的形变, 必有 $h(t,Q_F)\cap S\neq\emptyset$, $\forall\, t\in I$.

考虑 $\Phi : E\to\mathbb{R}$. 若 $Q\subset E$ 与 $S\subset E$ 有限地环绕, 令

$$\Gamma_{Q,S} := \{h\in C(I\times Q,E) : h \text{ 满足 } (\mathrm{h}_1)\text{–}(\mathrm{h}_5)\},$$

其中

(h_1) $h: I\times(Q,\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})\to(E,\mathcal{T}_{\mathfrak{P}})$ 连续;

(h_2) $h(0,u)=u$, $\forall\, u\in Q$;

(h_3) $\Phi(h(t,u))\leqslant\Phi(u)$, $\forall\, t\in I$, $u\in Q$;

(h_4) $h(I\times\partial Q)\cap S=\emptyset$;

(h_5) 每点 $(t,u)\in I\times Q$ 有 $\mathfrak{P}$- 开邻域 W 使得集 $\{v-h(s,v):(s,v)\in W\cap(I\times Q)\}$ 包含于 E 的有限维子空间中.

定理 8 [10] 假设 Φ 满足 (Φ_0), $\mathfrak{P}$ 可数; $Q,S\subset E$, Q 是 $\mathfrak{P}$- 紧的, Q 与 S 有限地环绕. 若 $\sup\Phi(\partial Q)\leqslant\inf\Phi(S)$, 则存在 $(\mathrm{PS})_c$- 序列, 其中

$$c:=\inf_{h\in\Gamma_{Q,S}}\sup_{u\in Q}\Phi(h(1,u))\in[\inf\Phi(S),\sup\Phi(Q)].$$

若 $c=\inf\Phi(S)$, 且对任何 $\delta>0$ 集合 $S^\delta:=\{u\in E:\mathrm{dist}_{\|\cdot\|}(u,S)\leqslant\delta\}$ 是 $\mathfrak{P}$- 闭的, 则存在 $(\mathrm{PS})_c$- 序列 $(u_n)_n$ 满足 $u_n\to S$ (关于范数).

早先 Kryszewski 和 Szulkin [16] 的广义环绕定理 (基于距离) 处理 Hilbert 空间 E 上的形如命题 1 中的泛函 Φ, 并要求 $\inf\Phi(S)>\Phi(0)\geqslant\sup\Phi(\partial Q)$ (值分离). 定理 8 提供了更多的信息, 即当 $c=\inf\Phi(S)$ 发生时, 仍然有 $(\mathrm{PS})_c$- 序列趋于 S. 在应用中是重要的, 因当 $c=\Phi(0)$ 仍可得到非平凡临界点.

类似地, 有限地环绕也产生 $(\mathrm{C})_c$- 序列. 为此假设:

(Φ_+) 存在 $\zeta>0$ 使得 $\|u\|<\zeta\|P_Yu\|$, $\forall\, u\in\Phi_0$.

定理 9 [10] 假设 Φ 满足 (Φ_0) 和 (Φ_+). 又设 Q 和 S 有限地环绕且 Q 是 $\mathfrak{P}$- 紧的. 若 $\kappa:=\inf\Phi(S)>0$, $\sup\Phi(\partial Q)\leqslant\kappa$, 则 Φ 有 $(\mathrm{C})_c$- 序列满足 $\kappa\leqslant c\leqslant\sup\Phi(Q)$.

定理 10 [10] 考虑 $\Phi:E\to\mathbb{R}$ 如命题 1. 设 (Φ_0) 满足, $\mathfrak{P}$ 可数. 又设存在 $R>r>0$ 和 $e\in Y$, $\|e\|=1$, 使得对于 $S:=\{u\in Y:\|u\|=r\}$ 和 $Q=\{v+te\in E:v\in X,\|v\|<R,0<t<R\}$, 成立 $\inf\Phi(S)\geqslant\Phi(0)\geqslant\sup\Phi(\partial Q)$, 则存在 $(\mathrm{PS})_c$- 序列

$$c:=\inf_{h\in\Gamma_{Q,S}}\sup_{u\in Q}\Phi(h(1,u))\in[\inf\Phi(S),\sup\Phi(Q)].$$

如果 $c=\inf\Phi(S)$, 则存在 $(\mathrm{PS})_c$- 序列 $(u_n)_n$ 满足 $u_n\to S$ (关于范数).

定理 11 [10] 设 Φ 满足 (Φ_0) 和 (Φ_+), 且存在 $R>r>0$ 和 $e\in Y$, $\|e\|=1$, 使得对于 $S:=\{u\in Y:\|u\|=r\}$ 和 $Q=\{v+te\in E:v\in X,\|v\|<R,0<t<R\}$, 有 $\kappa:=\inf\Phi(S)>0$ 和 $\sup\Phi(\partial Q)\leqslant\kappa$, 则 Φ 有 $(\mathrm{C})_c$- 序列满足 $\kappa\leqslant c\leqslant\sup\Phi(Q)$.

为了研究泛函的多个临界点的存在性, 假设紧对称群 G 线性等距地作用于 X 和 Y, 从而 $E=X\times Y$, 使得 $E^G:=\{u\in E:gu=u,\forall\, g\in G\}=\{0\}$. 设

(Φ_1) Φ 是 G- 不变的;

(Φ_2) 存在 $r>0$ 使得 $\kappa:=\inf\Phi(S_rY)>\Phi(0)=0$, 其中 $S_rY:=\{y\in Y:\|y\|=r\}$;

(Φ_3) 存在有限维 G- 不变子空间 $Y_0\subset Y$ 和 $R>r$ 使得 $b:=\sup\Phi(E_0)<\infty$ 且 $\sup\Phi(E_0\setminus B_0)<\inf\Phi(B_rY)$, 其中 $E_0:=X\times Y_0$, $B_0:=\{u\in E_0:\|u\|\leqslant R\}$.

定理 12 [10] 假设 (Φ_0) 和 (Φ_1)–(Φ_3) 成立, 且要么 $\mathfrak{P}$ 可数而 Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$- 条件, $\forall\, c\in[\kappa,b]$; 要么 (Φ_+) 为真而 Φ 满足 $(\mathrm{C})_c$- 条件, $\forall\, c\in[\kappa,b]$, 则 Φ 至少有 $n:=\dim Y_0$ 条临界点 G- 轨道.

为得到更多的临界点, 可用下面的条件取代 (Φ_3):

(Φ_4) 存在递增的有限维 G- 不变子空间序列 $Y_n \subset Y$ 和数列 $R_n > r$ 使得 $\sup \Phi(X \times Y_n) < \infty$ 和 $\sup \Phi(X \times Y_n \setminus B_n) < \beta := \inf \Phi(\{u \in Y : \|u\| \leqslant r\})$, 其中 $r > 0$ 源于 (Φ_2), $B_n := \{u \in X \times Y_n : \|u\| \leqslant R_n\}$.

此外需要下面的紧性条件:

(Φ_I) 下述之一成立:

(i) $\mathfrak{P}$ 可数, Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$- 条件, $\forall\, c \in I$;

(ii) $\mathfrak{P}$ 可数, Φ 有 $(\mathrm{PS})_I$- 吸引集 $\mathcal{A}$, $P_X\mathcal{A} \subset X \setminus \{0\}$ 有界, 满足 (1.6);

(iii) (Φ_+) 成立, Φ 有 $(\mathrm{C})_I$- 吸引集 $\mathcal{A}$, $P_Y\mathcal{A} \subset Y \setminus \{0\}$ 有界, 满足 (1.6).

定理 13 [10] 若 Φ 满足 (Φ_0)、(Φ_2)、(Φ_4) 和 (Φ_I) (任给紧区间 $I \subset (0, \infty)$), 则 Φ 具有无界的临界值序列.

最后陈述一个抽象定理, 它有效应用于处理半经典 (或奇异摄动) 问题. 下面令 G 表 Lie 群, $E = X \oplus Y$ 是 G-Hilbert 空间, 其内积为 $(\cdot, \cdot)$. 设

(i) $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{L}(E)$ 是 G- 等变的自伴算子族;

(ii) $\{\Psi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^2(E, \mathbb{R})$ 是 G- 不变泛函族, $\psi_\varepsilon = \nabla\Psi_\varepsilon : E \to E$.

考察

$$\Phi_\varepsilon : E \to \mathbb{R}, \quad \Phi_\varepsilon(z) := \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2) + \frac{1}{2}(A_\varepsilon z, z) - \Psi_\varepsilon(z), \quad \forall\, z = x + y.$$

设 $A_0 \in \mathcal{L}(E)$ 是一个 G- 等变自伴算子且 Ψ_0 为 G- 不变的 C^2 泛函, 记 $\psi_0 := \nabla\Psi_0 : E \to E$, 则作为奇异极限泛函,

$$\Phi_0 : E \to \mathbb{R}, \quad \Phi_0(z) := \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2) + \frac{1}{2}(A_0 z, z) - \Psi_0(z).$$

取 $\mathcal{E} = [0, 1]$, 我们关心这样的泛函族 $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}} := \{\Phi_0\} \cup \{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$:

(A1) 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得 $\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \|A_\varepsilon\| \leqslant \theta$.

(A2) 在 $\mathcal{L}(E)$ 中, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $A_\varepsilon \to A_0$.

(N1) 对每个 $\varepsilon \in \mathcal{E}$, Ψ_ε 是非负凸泛函, 且 $\psi_\varepsilon : E_w \to E_w$ 序列连续.

(N2) 对任意的 $z \in E$, 在 E 中, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 有 $\psi_\varepsilon(z) \to \psi_0(z)$.

(N3) 存在函数 $\kappa \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ $(\mathbb{R}^+ = [0, \infty))$, 与 ε 选取无关, 使得对所有的 $z, v, w \in E$ 和 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 都有

$$|\Psi''_\varepsilon(z)[v, w]| \leqslant \kappa(\|z\|) \cdot \|v\| \cdot \|w\|.$$

(N4) 对所有的 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 和 $z \in E \setminus \{0\}$, 有 $\widehat{\Psi}_\varepsilon(z) := \frac{1}{2}\Psi'_\varepsilon(z)z - \Psi_\varepsilon(z) > 0$, 并且 $\widehat{\Psi}_\varepsilon : E_w \to \mathbb{R}$ 是序列下半连续的.

(N5) 对任意的 $\varepsilon \in \mathcal{E}$, 任取 $z \in E \setminus \{0\}$ 和 $w \in E$, 都成立

$$(\Psi''_\varepsilon(z)[z, z] - \Psi'_\varepsilon(z)z) + 2(\Psi''_\varepsilon(z)[z, w] - \Psi'_\varepsilon(z)w) + \Psi''_\varepsilon(z)[w, w] > 0.$$

下面, 称一个 G- 不变泛函 $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ 满足 G- 弱 $(\mathrm{C})_c$- 条件, 如果对任意 $(\mathrm{C})_c$- 序列 $\{z_n\}$ 都存在相应的 $\{g_n\} \subset G$ 使得 $\{g_n z_n\}$ 在子列意义下弱收敛并且弱极限在 $E \setminus \{0\}$ 中.

定理 14 [17] 设泛函族 $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ 满足 (A1)、(A2) 和 (N1)–(N5), 并且

(I1) 存在 $\rho, \tau > 0$, 与 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 无关, 使得 $\Phi_\varepsilon|_{B^X_\rho} \geqslant 0$ 并且 $\Phi_\varepsilon|_{S^X_\rho} \geqslant \tau$, 其中 $B^X_\rho := B_\rho \cap X = \{z \in X : \|z\| \leqslant \rho\}$, $S^X_\rho := \partial B^X_\rho = \{z \in X : \|z\| = \rho\}$;

(I2) 对任意的 $e \in X \setminus \{0\}$, 记 $E_e = \mathbb{R}^+ e \oplus Y$, 则 $\sup_{z\in E_e} \Phi_0(z) = +\infty$ 或 $\Phi_0(z) \to -\infty$, 当 $z \in E_e$ 且 $\|z\| \to \infty$ 时 (其中 $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$).

若对任意的 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $\varepsilon \neq 0$, Φ_ε 还满足 G- 弱 $(\mathrm{C})_c$- 条件, 且

$$c_0 = \inf_{e \in X} \sup_{z \in E_e} \Phi_0(z) < +\infty$$

是 Φ_0 的临界值, 则

(1) 对任意小的 ε, Φ_ε 都有一个临界值

$$c_\varepsilon = \inf_{e \in X} \sup_{z \in E_e} \Phi_\varepsilon(z);$$

(2) c_ε 是 Φ_ε 的极小能量, 并且当 $\varepsilon \to 0$ 时, $c_\varepsilon \leqslant c_0 + o(1)$.

2 非线性 Dirac 系统

我们发展的前述变分理论相当成功地应用于研究非线性 Dirac 方程. 因为 Dirac 算子具有上方和下方均无界的本质谱, 是典型的强不定问题, 在变分学中 "具有挑战性". 我们的工作主要围绕两个方面: 开启了对非自治非线性 Dirac 系统的稳定态的存在性和多重性研究; 突破了强不定的困难建立起半经典稳定态的存在性和集中现象.

粒子物理学中出现的 Dirac 方程是由英国物理学家 Dirac 提出的一种相对论下的复向量方程, 其中 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ 上自由的 (即无外力场) Dirac 方程:

$$-\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi = \mathrm{i}c\hbar \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \partial_k \psi - mc^2\beta\psi, \quad \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^4,$$

已经被公认为是用于描述带有质量的相对论电子的基本模型. 方程中的 c 是光速, $\hbar$ 是 Planck 常数, m 是带电粒子的质量, α_1、α_2、α_3 和 β 是 4×4 的 Pauli 矩阵:

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

此处,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这个自由模型很好地给出了自然界许多真实粒子的近似描述. 为了更进一步地刻画真实的粒子运动, 我们就必须引入 (新的) 非线性项. 一般来讲, 在非线性外力场下 Dirac 方程可表为

$$-\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi = \mathrm{i}c\hbar \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \partial_k \psi - mc^2\beta\psi - N(x)\psi + \nabla_\psi F(x, \psi). \tag{2.1}$$

此方程中出现的函数 $N(x)$ (对称矩阵值函数) 和 $\nabla_\psi F(x, \psi)$ 来自于非线性粒子物理中的数学模型, 主要用于逼近刻画真实的外力场. 其中非线性耦合项 $\nabla_\psi F(x, \psi)$ 刻画了量子电动力学中的自耦合作用, 给出了一个与真实粒子非常接近的描述. 关于非线性项 F 的例子可以在标量自耦合作用理论中找到, 它既可以是多项式型的, 也可以是非多项式型的函数 (这里就包括了 $|\psi|^\lambda$ 和 $\sin|\psi|$ 等特殊情形). 大量的非线性函数已经被公认为是统一场论中合理的基本数学模型.

对于 Dirac 方程的研究, 从变分学的角度讲, 人们关心形如 $\psi(t, x) = \exp(\mathrm{i}\xi t/\hbar)u(x)$ 的稳态解 (也可称为驻波解). 于是在研究稳定态问题中, 一个自然的假设是

$$\nabla_\psi F(x, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\, \nabla_\psi F(x, \phi)$$

对所有的 $\xi \in \mathbb{R}$ 和 $\phi \in \mathbb{C}^4$ 成立. 在此条件下, 稳态解 ψ 满足方程 (2.1) 当且仅当函数 u 满足方程

$$-\mathrm{i}c\hbar \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \partial_k u + mc^2 \beta u + (N(x) + \xi)u = \nabla_\psi F(x, u). \tag{2.2}$$

整理并令 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$$\alpha \cdot \nabla = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \partial_k,$$

我们就得到了如下的 (一般型) 稳态 Dirac 方程 ($a > 0$, $M(x)$ 是对称矩阵值函数):

$$-\mathrm{i}\alpha \cdot \nabla u + a\beta u + M(x)u = G_u(x, u) \tag{2.3}$$

或

$$-\mathrm{i}\hbar\alpha \cdot \nabla u + a\beta u + M(x)u = G_u(x, u). \tag{2.4}$$

2.1 稳态解的存在性和多重性

稳态 Dirac 方程吸引着众多学者的关注. 文献中较早研究非线性 Dirac 方程 (2.3) 的工作只是自治系统, 即 $M = \omega$ 是常数, $G(x, u) = G(u)$ 不依赖于空间变量 x. Balabane 等 (参见文献 [18] 的评述及其参考文献) 研究了所谓 Soler 模型, 即 G 满足

$$G(\varphi) = \frac{1}{2} F(\beta\varphi \cdot \varphi), \quad F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \text{其中 } \beta\varphi \cdot \varphi := (\beta\varphi, \varphi). \tag{2.5}$$

与此对应的 (2.3) 等价于一个常微分方程组, 于是, 在适当的关于 $F(t)$ 的条件下, 他们用 "打靶" 方法得到了解的存在性 (多重性). 在假设了 $M(x) \equiv \omega \in (-a, 0)$ 后, Esteban 和 Séré [18] 率先用变分法研究了 Soler 模型和一些更一般的非线性模型并得到解的存在性. 需强调的是, 文献 [18] 的变分公式依赖于常系数微分算子的 Fourier 分析, 不适合研究非自治系统. 而量子理论着实关注非自治系统 (如 Coulomb 位势), 为推动变分研究量子力学的数学理论, 势必要建立一般的非自治非线性 Dirac 系统的变分框架. 我们建立的强不定问题的变分理论正是适应了这一要求.

令

$$A := -\mathrm{i}\alpha \cdot \nabla + a\beta + M, \quad \Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, u) dx,$$

则 (2.3) 呈 (1.1) 的形式. 此时 $\sigma(A)$ 既无上界又无下界, 一般而言, $\sigma_e(A) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$, $\sigma_e(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$. 这表明 (2.3) 是非常强不定的. 继续前面的记号: 令空间 $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ 由 (1.3) 定义, 泛函 $\Phi(u)$ 由 (1.5) 给出.

命题 2 下述结论为真:

(1) $\sigma(A) = \sigma_c(A) = \mathbb{R} \setminus (-a + \omega, a + \omega)$, 如果

(V_1) $M(x) \equiv \omega$.

(2) $\sigma(A) = \sigma_c(A)$ 是一列两两无交的闭区间的并, 如果

(V_2) $M(x)$ 关于 x_j 是 $T_j > 0$ 周期的, $j = 1, 2, 3$.

(3) $\sigma(A) = \{\pm\mu_j : j = 0, 1, \ldots\}$, 每个 μ_j 是有限重特征值, $\lim_{j\to\infty} \mu_j = \infty$, 如果

(V_3) $\forall\, b > 0$, $B_b := \{x : M(x) \leqslant b\}$ 的测度有限.

命题 3 E 连续地嵌入 L^q, $\forall\, q \in [2, 3]$, 紧地嵌入 L^q_{loc}, $\forall\, q \in [1, 3)$.

2.1.1 周期外力场

文献 [19] 研究了周期外力场下方程 (2.3) 稳定态的存在性和多重性. 该文献的要紧处在于开启了用变分法对非线性非自治 Dirac 系统的研究. 精确地, 假设

(V_1) $M(x)$ 是连续的 4×4 矩阵值函数, 且关于 x_j 是 $T_j>0$ 周期的, $j=1,2,3$.

(G_0) $G(x,u)$ 关于 x_j 是 $T_j>0$ 周期的, $j=1,2,3$.

命题 4 [19] 在条件 (V_1) 下, $\sigma(A)=\sigma_c(A)$ 是一列两两无交的闭区间的并. E 连续地嵌入 $L^q,\forall q\in[2,3]$, 紧地嵌入 $L^q_{\rm loc},\forall q\in[1,3)$. 此外, $\forall q\in[2,3]$, 存在 $\gamma_q>0$ 使得

$$\gamma_q|u^{\pm}|_q\leqslant\|u\|, \tag{2.6}$$

这里 (及以后) 用 $|\cdot|_q$ 表示通常的 L^q 范数.

记 $\hat{G}(x,u):=\frac{1}{2}G_u(x,u)\cdot u-G(x,u)$. 首先考虑如下超二次、次临界非线性:

$$\begin{cases}G_u(x,u)=o(|u|)\ (u\to 0)\ \text{关于}\ x\ \text{一致},\\ G(x,u)|u|^{-2}\to\infty\ (|u|\to\infty)\ \text{关于}\ x\ \text{一致},\\ \hat{G}(x,u)>0,\quad \forall\, u\neq 0,\quad \exists\,\sigma>3,\quad r,c_1>0\ \text{使得}\ |G_u(x,u)|^{\sigma}\leqslant c_1\hat{G}(x,u)|u|^{\sigma},\quad \forall\,|u|\geqslant r.\end{cases} \tag{2.7}$$

定理 15 [19] 假设 (V_0)、(G_0)、$0\notin\sigma(A)$ 和 $G(x,u)$ 满足 (2.7), 则 (2.3) 至少有 1 个非平凡解 $u\in\bigcap_{\tau\geqslant 2}W^{1,\tau}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$. 如果 G 关于 u 还是偶的, 则 (2.3) 有无穷多个 (几何上不同的) 解

$$u\in\bigcap_{\tau\geqslant 2}W^{1,\tau}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4).$$

注 4 在 (V_1) 条件下, $0\notin\sigma(A)$ 意味着 0 在 $\sigma(A)$ 的谱隙 (gap) 中. 典型的例子, 如 $M(x)\equiv\mu\in(-a,a)$ 或 $M(x)=\beta V(x)$, $V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 等.

其次, 考虑如下渐近二次非线性:

$$\begin{cases}G_u(x,u)=o(|u|)\ (u\to 0)\ \text{关于}\ x\ \text{一致},\\ \exists\, b\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),\quad \inf b(\mathbb{R}^3)>\sup M(\mathbb{R}^3)+a\ \text{使得}\ G(x,u)|u|^{-2}\to\infty\ (|u|\to\infty)\ \text{关于}\ x\ \text{一致},\\ \hat{G}(x,u)>0,\quad \forall\, u\neq 0,\quad \hat{G}(x,u)\to\infty\ (|u|\to\infty)\ \text{关于}\ x\ \text{一致}.\end{cases} \tag{2.8}$$

定理 16 [19] 假设 (V_0)、(G_0)、$0\notin\sigma(A)$ 和 $G(x,u)$ 满足 (2.8), 则 (2.3) 至少有 1 个非平凡解 $u\in\bigcap_{\tau\geqslant 2}W^{1,\tau}(\mathbb{R}^3,{}^4)$. 若 G 关于 u 还是偶的, 则 (2.3) 有无穷多个 (几何上不同的) 解

$$u\in\bigcap_{\tau\geqslant 2}W^{1,\tau}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4).$$

注 5 对于渐近二次问题通常只能证明有限多个解的存在性. 这个结果的十分有趣之处在于我们首次发现可得到无穷多个解 (参见文献 [20] 关于 Hamilton 系统的类似结果).

注 6 顺便指出, 当 $V(x)$ 和 $G(x,u)$ 周期地依赖于 $x\in\mathbb{R}^3$, 即 (V_0) 和 (G_0) 成立时, 人们自然关心 (2.3) 是否具有周期解. 应用强不定问题的变分方法, 文献 [21,22] 建立了 Dirac 方程周期解的变分框架, 并对凹凸非线性和渐近线性等系统得到周期解的存在性和多解性.

2.1.2 非周期外力场

关于全空间上的方程或系统的同宿型解, 由于无界区域上的 Sobolev 嵌入一般而言是非紧的, 为了得到 (PS) 条件, 之前人们考虑的非线性 (及线性位势) 通常要求满足周期性假设. 文献 [23] 首开研究并得到了部分结果, 引起多人推广 (参见文献 [24] 关于一阶 Hamilton 系统的类似工作).

首先, 一个很有趣的工作是关于所谓强制位势的非线性系统. 假设

(V_2) $M(x)=V(x)\beta$, $V\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $\forall\, b>0$, 集合 $V_b:=\{x;V(x)\leqslant b\}$ 的测度有限.

我们建立了下述基础性嵌入结果:

命题 5 [15] 在条件 (V_2) 下, $\sigma(A)=\sigma_d(A)=\{\pm\mu_j:j\in\mathbb{N}\}$, $\lim_{j\to\infty}\mu_j=\infty$, E 连续地嵌入 L^q, $\forall\, q\in[2,3]$, 紧地嵌入 $L^q,\forall\, q\in[1,3)$.

由此结果, 我们得到下面的定理:

定理 17 [15] 设 (V_2) 成立, $G(x,u)$ 满足 (2.7), 则 (2.3) 至少有 1 个非平凡解 $u\in\bigcap_{\tau\geqslant 2}W^{1,\tau}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$. 如果 G 关于 u 还是偶的, 则 (2.3) 有无穷多个 (几何上不同的) 解 $u\in\bigcap_{\tau\geqslant 2}W^{1,\tau}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$.

其次, 考虑位势非强制的情形. 假设 (渐近二次情形)

$$\begin{cases} G(x,u)\geqslant 0,\quad G_u(x,u)=o(|u|)\ (u\to 0)\ \text{关于}\ x\ \text{一致},\\ \exists\,\text{对称}\ Q\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^{4\times 4})\ \text{使得}\ G_u(x,u)-Q(x)u=o(|u|)\ (|u|\to\infty)\ \text{关于}\ x\ \text{一致},\\ \text{或}\ 0\notin\sigma(A-Q),\quad \text{或}\ \hat{G}(x,u)\geqslant 0,\quad \text{且}\ \exists\,\delta_0,\nu_0>0\ \text{使得}\ \hat{G}(x,u)\geqslant\delta_0,\quad \forall\,|u|\geqslant\delta_0,\\ q_0:=\inf Q_{\min}(x)>\inf\sigma(A)\cap(0,\infty). \end{cases}\tag{2.9}$$

令

$$q_\infty:=\limsup_{|x|\to\infty}\left(\sup_u\frac{|G_u(x,u)|}{|u|}\right).$$

定理 18 [23] 考虑 Coulomb 型位势:

(M_1) $M(x)$ 在 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 上连续, 且 $0\geqslant M(x)\geqslant -\frac{\kappa}{|x|}$, 其中 $\kappa<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

假设 (2.9) 成立, $q_\infty<a$, 则 (2.3) 至少有 1 个非平凡解. 如果 $G(x,u)$ 关于 u 还是偶的, 则 (2.3) 至少有 $\ell:=\#\{(0,q_0)\cap\sigma(A)\}$ 个非平凡解.

定理 19 [23] 考虑如下位势:

(M_2) $M(x)$ 连续且有界, 且 $\exists\, b>0$ 使得 $\Omega^b:=\{x:\beta M(x)<b\}$ 的测度有限 $|\Omega^b|$.

记 $b_{\max}:=\sup\{b:|\Omega^b|<\infty\}$. 假设 (2.9) 成立, $q_\infty<a+b_{\max}$, 则 (2.3) 至少有 1 个非平凡解. 如果 $G(x,u)$ 关于 u 还是偶的, 则 (2.3) 至少有 $\ell:=\#\{(0,q_0)\cap\sigma(A)\}$ 个非平凡解.

注 7 (1) 关于 Coulomb 型位势, 众所周知, $\sigma_d(A)\cap(0,a)\neq\emptyset$.

(2) 对非周期情形, 我们还有关于超二次非线性的存在性和多重性结果 (参见文献 [25]).

2.2 半经典解的存在性、集中性和指数衰减性

所谓奇异扰动, 是指在微分方程 (或方程组) 中的最高阶导数项前带有一个小参数 (趋于零). 奇异扰动问题出自于数学和物理等不同的领域, 问题中出现的小参数往往刻画了动力学作用之间的标量倍数. 这类扰动问题, 区别于正则扰动 (regular perturbation), 将不能通过简单地逼近来刻画或是研究参数消失的过程.

在量子力学中, 一个很自然的奇异扰动问题就是动力学方程的半经典问题. 所谓半经典问题, 其物理解释就是对应原理 (correspondence principle), 即当 Planck 常数 $\hbar$ 趋于零时所有量子力学的规律将

回归于经典力学. 作为对应原理的重要体现, 量子理论中的两大动力学方程 (Schrödinger 和 Dirac) 的解在随着 $\hbar$ 消失的过程中的渐进行为尤其值得关注. 所谓的集中现象是指, 在预先给定的集中集合以外, 动力学方程的解随着参数的消失而一致衰减到零. 在这样的定义下, 从数学上来讲, 寻找并刻画集中集合成为最本质的问题.

早先对于带小参数的变分问题, 学者们主要关注非线性 Schrödinger 方程的半经典解, 获得了丰富的成果. 而对于非线性 Dirac 方程的相关问题的研究, 因为其研究比前者困难得多, 直到 2010 年才由我们突破强不定性引起的极大障碍得到了第一个结果 (参见文献 [26]), 引发了一系列后续研究.

2.2.1 Dirac 系统

记 $\varepsilon=\hbar$, 利用伸缩变换 $x\mapsto\varepsilon x$, (2.4) 等价于

$$-\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla u+a\beta u+M_\varepsilon(x)u=G_u(\varepsilon x,u), \tag{2.10}$$

其中 $M_\varepsilon(x)=M(\varepsilon x)$. 为了反映 M 的性质, 取 $A_0=-\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla+a\beta$. 注意到 $\sigma(A)=\sigma_c(A_0)=\mathbb{R}\setminus(-a,a)$, 因此, L^2 将有如下的正交分解:

$$L^2=L^+\oplus L^-,\quad u=u^++u^- \tag{2.11}$$

使得 A_0 在 L^+ 和 L^- 上分别是正定的和负定的. 取 $E:=\mathcal{D}(|A_0|^{1/2})=H^{1/2}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$, 并赋予内积

$$(u,v)=\Re(|A_0|^{1/2}u,|A_0|^{1/2}v)_2,$$

以及诱导范数 $\|u\|=(u,u)^{1/2}$. 我们可以得到对所有 $u\in E$, 有 $a|u|_2^2\leqslant\|u\|^2$. 注意到如此定义的范数与一般的 $H^{1/2}$- 范数等价, 所以, E 连续地嵌入到 L^q 当 $q\in[2,3]$ 时, 并且紧嵌入到 L^q_{loc} 当 $q\in[1,3)$ 时. 我们研究下述形式的泛函:

$$\Phi_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}(\|u^+\|^2-\|u^-\|^2)+\int_{\mathbb{R}^3}M_\varepsilon(x)u\cdot\bar{u}-\int_{\mathbb{R}^3}G(\varepsilon x,u). \tag{2.12}$$

(1) 集中于非线性位势的最大点集. 文献 [26] 研究了

$$-\mathrm{i}\varepsilon\alpha\cdot\nabla w+a\beta w=W(x)g(|w|)w. \tag{2.13}$$

假设

(W) $\inf W>0$, $\limsup_{|x|\to\infty}W(x)<\max W$.

记

$$\kappa=\max W,\quad \mathscr{W}=\{x:W(x)=\kappa\},\quad \kappa_\infty=\limsup_{|x|\to\infty}W(x).$$

利用 "山路型" 导出、与极限方程的联系、极限方程的性质等, 我们得到下面的定理:

定理 20 [26] 假设 (W) 成立, $\kappa_\infty<\kappa$, 且 $g(|w|)\sim|w|^{p-2}$, $p\in(2,3)$, 则

(i) $\forall\varepsilon>0$ 充分小, (2.13) 至少有 1 个最小能量解 $w_\varepsilon\in\bigcap_{s\geqslant2}W^{1,s}$.

(ii) $\exists\ |w_\varepsilon|$ 的最大值点 x_ε, $\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{W})\to0$ $(\varepsilon\to0)$, 使得 $\forall x_\varepsilon\to x_0$, 序列 $u_\varepsilon(x):=w_\varepsilon(\varepsilon x+x_\varepsilon)$ 一致收敛于下述极限方程的最小能量解:

$$-\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla u+a\beta u=\kappa g(|u|)u.$$

(iii) $|w_\varepsilon(x)|\leqslant C\exp(-\frac{c}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|)$.

注 8 文献 [26] 的要紧之处在于它表明, 对于诸如 Dirac 方程这类问题, 人们亦能够建立最小能量解的存在性和集中性等, 它的证明技巧可用以研究广泛的强不定问题.

(2) 竞争型位势. 文献 [27,28] 考虑了同时具有线性和非线性位势的情形:

$$-\mathrm{i}\varepsilon\alpha\cdot\nabla w+a\beta w+V(x)w=W(x)g(|w|)w. \tag{2.14}$$

令 $G(|w|):=\int_0^{|w|}g(s)sds$,

$$\tau:=\min V,\quad \mathscr{V}:=\{x\in\mathbb{R}^3:V(x)=\tau\},\quad \tau_\infty:=\liminf_{|x|\to\infty}V(x),$$

$$\kappa:=\max W,\quad \mathscr{W}:=\{x\in\mathbb{R}^3:W(x)=\pi\},\quad \kappa_\infty:=\limsup_{|x|\to\infty}W(x).$$

假设

(P_0) $V,W\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $\max|V|<a$, $\inf W>0$;

(P_1) $\tau<\tau_\infty$, $\exists\, x_v\in\mathscr{V}$ 使得 $W(x_v)\geqslant W(x)$, $\forall\,|x|\geqslant R$, 某充分大的 $R>0$;

(P_2) $\kappa>\kappa_\infty$, $\exists\, x_w\in\mathscr{W}$ 使得 $V(x_w)\leqslant V(x)$, $\forall\,|x|\geqslant R$, 某充分大的 $R>0$;

(g_1) $g(0)=0$, $g\in C^1(0,\infty)$, $g'(s)>0$, $\forall\, s>0$, $\exists\, p\in(2,3)$, $c_1>0$ 使得 $g(s)\leqslant c_1(1+s^{p-2})$, $\forall\, s\geqslant 0$;

(g_2) $\exists\,\theta>2$ 使得 $0<\theta G(|w|)\leqslant g(|w|)|w|^2$, $\forall\, w\neq 0$.

不失一般性, 设 $W(x_v)=\max_{x\in\mathscr{V}}W(x)$, $V(x_w)=\min_{x\in\mathscr{W}}V(x)$, 并令

$$\mathscr{A}_v:=\{x\in\mathscr{V}:W(x)=W(x_v)\}\cup\{x\notin\mathscr{V}:\,W(x)>W(x_v)\},$$

$$\mathscr{A}_w:=\{x\in\mathscr{W}:V(x)=V(x_w)\}\cup\{x\notin\mathscr{W}:V(x)<V(x_w)\}.$$

定理 21 [27] 假设 (g_1)、(g_2) 和 (P_0) 成立.

(A) 设 (P_1) 成立, 则 $\forall\,\varepsilon>0$ 充分小, (2.14) 具有最小能量解 $w_\varepsilon\in\bigcap_{s\geqslant 2}W^{1,s}$ 满足:

(a_1) 存在 $|w_\varepsilon|$ 的最大点 x_ε 和 $c,C>0$ 使得 $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{A}_v)=0$, 且

$$|w_\varepsilon(x)|\leqslant C\exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|\right).$$

(a_2) 记 $v_\varepsilon(x):=w_\varepsilon(\varepsilon x+x_\varepsilon)$, $\forall\, x_\varepsilon\to x_0$ $(\varepsilon\to 0)$, v_ε 在 H^1 中收敛于极限方程的最小能量解

$$-\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla v+a\beta v+V(x_0)v=W(x_0)g(|v|)v. \tag{2.15}$$

特别地, 若 $\mathscr{V}\cap\mathscr{W}\neq\emptyset$, 则 $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{V}\cap\mathscr{W})=0$, 且 (2.15) 变为

$$-\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla v+a\beta v+\tau v=\kappa g(|v|)v.$$

(B) 设 (P_2) 成立, 则以 $\mathscr{A}_w$ 取代 $\mathscr{A}_v$ 后, (A) 的所有断言成立.

(3) 具有磁场的方程. 文献 [29] 研究了带磁场 $\vec{A}(x)$ 的 Dirac 方程

$$\alpha\cdot(-\mathrm{i}\varepsilon\cdot\nabla+\vec{A}(x))w+a\beta w+M(x)w=g(|w|)w,$$

得到了半经典解的存在性、集中性和指数衰减性.

(4) 临界非线性. 文献 [30] 就下述临界非线性情形:

$$-\mathrm{i}\varepsilon\alpha\cdot\nabla w+a\beta w+V(x)w=W_1(x)g(|w|)w+W_2(x)|w|w$$

得到了半经典解的存在性、集中性和指数衰减性.

注 9 前面的文献 [23,27,29] 都需要 M 满足所谓 "全局" 性条件, 如对 $M(x)=V(x)I_4$,

$$\liminf_{|x|\to\infty} V(x) > \inf_{x\in\mathbb{R}^n} V(x) > 0. \tag{2.16}$$

一个自然的问题就是, 集中集合能否出现在别的地方, 或者说位势函数 $V(x)$ 是否可以摆脱全局性条件 (2.16)? 文献 [31] 回答了此问题, 证明了必然存在一个单峰解, 且随着 $\hbar$ 的消失该正解将集中于 $V(x)$ 在 Λ 内的最小值处.

(5) 局部最小条件. 文献 [31] 研究了

$$-\mathrm{i}\varepsilon\alpha\cdot\nabla w + a\beta w + V(x)w = g(|w|)w. \tag{2.17}$$

假设

(V_0) $\exists$ 有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 使得 $-a<\underline{c}:=\min_\Omega V<\min_{\partial\Omega} V$.

(g_1) $g(0)=0$, $g\in C^1(0,\infty)$, $g'(s)>0$.

(g_2) $s\mapsto g(s)+g'(s)s$ 在区间 $[0,\infty)$ 上单增.

此外, g 可以是超二次的或渐近二次的:

(g_3) 超二次.

(i) $\exists\, p\in(2,3)$ 使得 $g(s)\leqslant c_1(1+s^{p-2})$, $\forall\, s\neq 0$;

(ii) $\exists\,\theta>2$ 使得 $0<G(s)\leqslant \frac{1}{\theta}g(s)s^2$.

(g_3') 渐近二次.

(i) $\exists\, b>1+\sup|V|$ 使得 $g(s)\to b$ $(s\to\infty)$;

(ii) $\widehat{G}(s):=\frac{1}{2}g(s)s^2-G(s)>0$, $\forall\, s>0$, $\widehat{G}(s)\to+\infty$ $(s\to\infty)$.

定理 22 [31] 假设 (V_0)、(g_1) 和 (g_2) 成立. 此外, (g_3) 或 (g_3') 成立, 则

(i) $\forall\,\varepsilon>0$ 充分小, (2.17) 有最小能量解 $w_\varepsilon\in\bigcap_{s\geqslant 2}W^{1,s}$;

(ii) $|w_\varepsilon|$ 有最大点 $x_\varepsilon\in\Omega$, $\lim_{\varepsilon\to 0}V(x_\varepsilon)=\underline{c}$, 且 $|w_\varepsilon(x)|\leqslant C\exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|\right)$;

(iii) 令 $v_\varepsilon(x)=w_\varepsilon(\varepsilon x+x_\varepsilon)$, 则当 $\varepsilon\to 0$ 时, v_ε 在 H^1 中收敛于极限问题的最小能量解

$$-\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla v + a\beta v + \underline{c}v = g(|v|)v.$$

2.2.2 Maxwell-Dirac 系统和 Klein-Gordon-Dirac 系统

Dirac 方程作为描述相对论电子的基本模型, 对于真实粒子的运动描述依然存在一定的误差. 所谓的这些误差, 其来源就是粒子运动所产生的电磁效应对其自身的影响以及周围粒子的相互耦合作用. 为了将这样的误差考虑在内, 我们将面对如下形式的复杂方程组: Maxwell-Dirac 系统和 Klein-Gordon-Dirac 系统.

Maxwell-Dirac 系统

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar\partial_t\psi + \alpha\cdot(\mathrm{i}c\hbar\nabla + q\boldsymbol{A})\psi - q\phi\psi - mc^2\beta\psi = \nabla_\psi F(x,\psi), \\ \partial_t\phi + c\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\partial_k A_k = 0, \quad \partial_t^2\phi - \Delta\phi = \frac{4\pi}{c}q|\psi|^2, \\ \partial_t^2 A_k - \Delta A_k = \dfrac{4\pi}{c}q(\alpha_k\psi)\cdot\bar{\psi}, \quad k=1,2,3, \end{cases}$$

其中 q 代表粒子所带电量, 向量函数 $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2,A_3):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 表示变化的磁场分布, $\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 表示变化的电场分布. $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 遵循电动力学中的 Maxwell 方程组, 真实地刻画出带电粒子高速运动下产生的电磁效应. 为简单计, 考虑形如 $F_u(x,u)=P(x)g(|u|)u$ 的非线性, 记 $\varepsilon=\hbar$, $a=mc$, 其稳态方程可表为

$$\begin{cases}\alpha\cdot(\mathrm{i}\varepsilon\nabla+Q(x)\boldsymbol{A}(x))w-a\beta w-\omega w-Q(x)A_0w=P(x)g(|w|)w,\\ -\Delta A_k=4\pi Q(x)(\alpha_k w)\bar{w},\quad k=0,1,2,3,\end{cases}\tag{2.18}$$

其中记 $A_0=\phi$, $\omega\in\mathbb{R}$, $Q:=q/c$, $\alpha_0:=I$, 这里 $Q(x)$ 和 $P(x)$ 均作为有界的非负连续函数出现, $Q(x)$ 将表示变化的电量分布出现在方程中, 其包含了恒等于常数的特殊情形. 作为非线性耦合项出现的 g, 记 $G(s):=\int_0^s g(t)t\,dt$, 并假设

(N) 存在常数 $p\in(2,3)$, $c_1>0$ 使得 $|g(s)|\leqslant c_1(1+|s|^{p-2})$.

利用伸缩变换 $u(x)=w(\varepsilon x)$, 不难得到 (2.18) 的等价问题

$$\begin{cases}\alpha\cdot(\mathrm{i}\nabla+Q_\varepsilon(x)\boldsymbol{A}_\varepsilon(x))u-a\beta u-\omega u-Q_\varepsilon(x)A_{\varepsilon,0}u=P_\varepsilon(x)g(|u|)u,\\ -\Delta A_{\varepsilon,k}=\varepsilon^2 4\pi Q_\varepsilon(x)J_k,\quad k=0,1,2,3,\end{cases}\tag{2.19}$$

其中 $Q_\varepsilon(x)=Q(\varepsilon x)$, $P_\varepsilon(x)=P(\varepsilon x)$, $\boldsymbol{A}_\varepsilon(x)=\boldsymbol{A}(\varepsilon x)$, $A_{\varepsilon,k}(x)=A_k(\varepsilon x)$,

$$J_k=(\alpha_k u)\bar{u},\quad k=0,1,2,3.$$

取 $H_0=\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla-a\beta$. 注意到 $\sigma(H_0)=\sigma_c(H_0)=\mathbb{R}\setminus(-a,a)$, 因此, L^2 将有如下的正交分解:

$$L^2=L^+\oplus L^-,\quad u=u^++u^-\tag{2.20}$$

使得 H_0 在 L^+ 和 L^- 上分别是正定的和负定的. 取 $E:=\mathcal{D}(|H_0|^{1/2})=H^{1/2}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$, 并赋予内积

$$\langle u,v\rangle=\Re(|H_0|^{1/2}u,|H_0|^{1/2}v)_2,$$

以及诱导范数 $\|u\|=\langle u,u\rangle^{1/2}$. 我们可以得到对所有 $u\in E$, 有

$$a|u|_2^2\leqslant\|u\|^2.$$

注意到如此定义的范数与一般的 $H^{1/2}$- 范数等价, 所以, E 连续地嵌入到 L^q, 当 $q\in[2,3]$ 时, 并且紧嵌入到 L^q_{loc}, 当 $q\in[1,3)$ 时.

令 $\mathcal{D}^{1,2}$ 表示 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 在范数

$$\|u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}}:=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2$$

之下的完备化. 以 $A^k_{\varepsilon,u}\in\mathcal{D}^{1,2}$ $(k=0,1,2,3)$ 记 Poisson 方程 $-\Delta A^k_{\varepsilon,u}=\varepsilon^2 4\pi Q_\varepsilon(x)J_k$ 的唯一解. 将 $A^k_{\varepsilon,u}$ $(k=0,1,2,3)$ 的表达式代入 (2.24) 后, 我们得到

$$H_0u-\omega u-Q_\varepsilon(x)A^0_{\varepsilon,u}u+\sum_{k=1}^3 Q_\varepsilon(x)\alpha_k A^k_{\varepsilon,u}u=P_\varepsilon(x)g(|u|)u.\tag{2.21}$$

在如此的准备工作下, 在 E 上, 定义 (2.21) 的能量泛函

$$\Phi_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}(\|u^+\|^2-\|u^-\|^2-\omega|u|_2^2)-\Gamma_\varepsilon(u)-\Psi_\varepsilon(u),$$

此处, $u=u^++u^-$,

$$\Gamma_\varepsilon(u)=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}Q_\varepsilon(x)A^0_{\varepsilon,u}(x)J_0\,dx-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}Q_\varepsilon(x)A^k_{\varepsilon,u}J_k\,dx,$$

以及

$$\Psi_\varepsilon(u)=\int_{\mathbb{R}^3}P_\varepsilon(x)G(|u|)\,dx,$$

则 $\Phi_\varepsilon(u)$ 的临界点对应 (2.18) 的解.

假设

(Q_0) $Q\in C^{0,1}(\mathbb{R}^3)$, $Q(x)\geqslant 0$, a.e.;

(P_0) $P\in C^{0,1}(\mathbb{R}^3)$, $\inf P>0$, $\limsup_{|x|\to\infty}P(x)<\max P(x)$.

令 $m=\max P$,

$$\mathscr{P}:=\{x\in\mathbb{R}^3:P(x)=m\}.$$

定理 23 [32] 假设 $\omega\in(-a,a)$, (Q_0)、(P_0) 和 (g_1)–(g_3) 成立, 则

(1) $\forall\varepsilon>0$ 充分小, (2.18) 至少有一个最小能量解 $w_\varepsilon\in\bigcap_{q\geqslant 2}W^{1,q}$;

(2) $|w_\varepsilon|$ 有最大点 x_ε, $\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{P})\to 0$ 使得 $\exists\,C,c>0$ 满足 $|w_\varepsilon(x)|\leqslant C\exp(-\frac{c}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|)$;

(3) 令 $u_\varepsilon(x):=w_\varepsilon(\varepsilon x+x_\varepsilon)$, 则 $\forall\,x_\varepsilon\to\bar{x}$, u_ε 一致收敛于下述问题的最小能量解:

$$\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla u-a\beta u-\omega u=\kappa g(|u|)u.$$

注 10 关于 Maxwell-Dirac 系统, 文献 [33] 讨论了临界非线性问题, 得到了存在和多重性结果.

注 11 一个有趣的问题是, (2.18) 是否有多解? 文献 [34] 率先得到了半经典解的多重性. 精确地, 考虑 (2.18), 假设 $g(|w|)w=|w|^{p-2}w$, $p\in(2,3)$, 我们证明了下述定理:

定理 24 [34] 假设 $\omega\in(-a,a)$, $\inf W>0$ 且 $\kappa_\infty<\kappa$, 则 $\forall\,m\in\mathbb{N}$, 只要

$$m<\left(\frac{\kappa}{\kappa_\infty}\right)^{2/(p-2)},$$

(2.18) 就存在 $\varepsilon_m>0$ 使得当 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_m$ 时, (2.18) 至少有 m 对半经典解 $w_\varepsilon\in\bigcap_{s\geqslant 2}W^{1,s}$, 且存在 $C,c>0$, $|w_\varepsilon(x)|\leqslant C\exp(-\frac{c}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|)$, 其中 x_ε 记 $|w_\varepsilon|$ 的最大值点.

这一工作的基本思想引出了后续不少延拓.

Klein-Gordon-Dirac 系统

$$\begin{cases}\mathrm{i}\dfrac{\hbar}{c}\,\partial_t\psi+\mathrm{i}\hbar\alpha\cdot\nabla\psi-mc\beta\psi-\lambda\phi\beta\psi=\nabla_\psi F(x,\psi),\\[2ex] \dfrac{\hbar^2}{c^2}\,\partial_t^2\phi-\hbar^2\Delta\phi+\hat{m}\phi=4\pi\lambda(\beta\psi)\cdot\bar{\psi},\end{cases}\tag{2.22}$$

这里 m 表示介子质量, $\lambda>0$ 表示耦合系数. 方程组 (2.22) 通过 Dirac 场 ψ 与标量场 ϕ 之间的 Yukawa 作用, 刻画出 Dirac 方程与 Klein-Gordon 方程之间的耦合关系, 描述了在介子影响下原子核之间的强作用力.

关于方程组 (2.22) 的变分学研究, 依然关注下述形式的稳态方程解的存在性. 为简单计, 考虑形如 $F_u(x,u)=W(x)g(|u|)u$ 的非线性, 记 $\varepsilon=\hbar$, $a=mc$, 其稳态方程可表为

$$\begin{cases}\mathrm{i}\varepsilon\alpha\cdot\nabla\varphi-a\beta\varphi-\lambda\phi\beta\varphi-\omega\varphi=W(x)g(|\varphi|)\varphi,\\ -\hbar^2\Delta\phi+\hat{m}\phi=4\pi\lambda(\beta\varphi)\cdot\bar{\varphi}.\end{cases}\tag{2.23}$$

为了建立方程组 (2.23) 的变分框架, 作变换 $u(x)=\varphi(\varepsilon x)$, $V(x)=\phi(\varepsilon x)$, (2.23) 等价于

$$\begin{cases}\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla u-a\beta u+\omega u-\lambda V\beta u=W_\varepsilon(x)g(|u|)u,\\ -\Delta V+\hat{m}\,V=4\pi\lambda(\beta u)\cdot u,\end{cases}\tag{2.24}$$

其中 $W_\varepsilon(x)=W(\varepsilon x)$. 此处作为次临界非线性耦合项出现的 g, 我们仍然记 $G(s):=\int_0^s g(t)t\,dt$, 并假设增长性条件 (N).

记 $H_\omega=\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla-a\beta+\omega$, 则 H_ω 为 $L^2\equiv L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ 上的自共轭算子, 且其定义域为 $\mathcal{D}(H_\omega)=H^1\equiv H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$. 注意到 $\sigma(H_\omega)=\sigma_c(H_\omega)=\mathbb{R}\setminus(-a+\omega,a+\omega)$, 若令 $\omega\in(-a,a)$, 则此时 L^2 就自然具有如下正交分解:

$$L^2=L^+\oplus L^-,\quad u=u^++u^-$$

使得 H_ω 在 L^+ 和 L^- 上分别是正定与负定算子. 取 $E:=\mathcal{D}(|H_\omega|^{1/2})=H^{1/2}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$, 并赋予内积

$$\langle u,v\rangle=\Re(|H_\omega|^{1/2}u,|H_\omega|^{1/2}v)_2,$$

以及诱导范数 $\|u\|=\langle u,u\rangle^{1/2}$, 这里 $|H_\omega|$ 和 $|H_\omega|^{1/2}$ 分别表示算子 H_ω 的绝对值和 $|H_\omega|$ 的平方根. 由于 $\sigma(H_\omega)=\mathbb{R}\setminus(-a+\omega,a+\omega)$, 不难得出对所有的 $u\in E$, 都有

$$(a-|\omega|)|u|_2^2\leqslant\|u\|^2.\tag{2.25}$$

同样地, 由于此范数等价于 $H^{1/2}$- 范数, 因而 E 连续地嵌入到 L^q, 当 $q\in[2,3]$ 时, 并且紧嵌入到 L^q_{loc}, 当 $q\in[1,3)$ 时. 通过定义, 函数空间 E 具有一个自然分解

$$E=E^+\oplus E^-,\quad \text{其中 } E^\pm=E\cap L^\pm,\tag{2.26}$$

并且该分解关于 $(\cdot,\cdot)_2$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 都是正交的. 与之前的分析一样, 空间 E 的分解自然地导出 L^p 上的空间分解, 即存在常数 $d_p>0$ 使得对所有的 $u\in E$, 都有

$$d_p|u^\pm|_p^p\leqslant|u|_p^p.\tag{2.27}$$

在空间 $H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 上, 我们赋予等价范数

$$\|v\|_{H^1}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v|^2+\hat{m}v^2dx\right)^{1/2},\quad\forall\,v\in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}).$$

易证: $\forall\,u\in E$, 存在唯一的 $V_u\in H^1$ 满足 Schrödinger 型方程

$$-\Delta V_u+\hat{m}\cdot V_u=4\pi\lambda(\beta u)\bar{u},\tag{2.28}$$

并且 V_u 具有表达式

$$V_u(x)=\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\frac{[(\beta u)\bar{u}](y)}{|x-y|}\mathrm{e}^{-M|x-y|}\,dy.\tag{2.29}$$

现在将 V_u 代入 (2.24), 我们即得到方程

$$H_\omega u - \lambda V_u(x)\beta u = W_\varepsilon(x) g(|u|) u. \tag{2.30}$$

至此, 我们在 E 上就可定义方程 (2.30) 的能量泛函

$$\Phi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2) - \Gamma_\lambda(u) - \Psi_\varepsilon(u),$$

其中 $u = u^+ + u^-$,

$$\Gamma_\lambda(u) = \frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3} V_u \cdot (\beta u)\bar{u}\, dx = \frac{\lambda^2}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{[(\beta u)\bar{u}](x)[(\beta u)\bar{u}](y)}{|x-y|} \mathrm{e}^{-M|x-y|}\, dy\, dx,$$

以及

$$\Psi_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^3} W_\varepsilon(x) G(|u|)\, dx.$$

假设

(P_0) $W \in C(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\inf W > 0$, $\limsup_{|x|\to\infty} W(x) < \max W(x)$;

(G_1) $g(0) = 0$, $g \in C^1(0,\infty)$, $g'(s) > 0$, $\forall\, s > 0$, $\exists\, p \in (2,3)$, $c_1 > 0$ 使得 $g(s) \leqslant c_1(1+s^{p-2})$, $\forall\, s \geqslant 0$;

(G_2) $\exists\, \sigma > 2$, $\theta > 2$, $c_0 > 0$ 使得 $c_0 s^\sigma \leqslant G(s) \leqslant \frac{1}{\theta} g(s) s^2$, $\forall\, s > 0$.

令 $m := \max_{x\in\mathbb{R}^3} W(x)$,

$$\mathfrak{C} := \{x \in \mathbb{R}^3 : W(x) = m\}.$$

定理 25 [35] 假设 $\omega \in (-a, a)$, (P_0)、(G_1) 和 (G_2) 成立, 则 $\exists\, \lambda_0 > 0$ 使得当 $\lambda \in (0, \lambda_0]$ 时, $\forall\, \varepsilon > 0$ 充分小,

(1) 系统 (2.23) 具有至少 1 个基态解 $(\varphi_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \in \bigcap_{q\geqslant 2} W^{1,q}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \times C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

(2) 所有基态解的集合在 $H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \times H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 是紧的.

(3) 若还有 ∇W 有界, 则

(i) $|\varphi_\varepsilon|$ 有最大点 x_ε, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dist}(x_\varepsilon, \mathfrak{C}) = 0$, 使得 $(u_\varepsilon, V_\varepsilon)$, $u_\varepsilon(x) := \varphi_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$ 和 $V_\varepsilon := \phi_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$ 在 $H^1 \times H^1$ 中收敛到下极限方程的基态解:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\alpha \cdot \nabla u - a\beta u + \omega u - \lambda V \beta u = m g(|u|) u, \\ -\Delta V + m V = 4\pi\lambda(\beta u) \cdot u. \end{cases} \tag{2.31}$$

(ii) $\exists\, C, c > 0$ 使得 $|\varphi_\varepsilon(x)| \leqslant C \exp(-\frac{c}{\varepsilon}|x - x_\varepsilon|)$.

注 12 关于 Dirac 系统半经典解的研究, 由于涉及 "集中现象", 除了把问题表示成抽象形式 (1.1), 进而应用所发展的关于强不定问题的临界点理论外, 这里简述一下处理它们的别的共通技术性思路如下 (对于后面处理反应 - 扩散系统也实用).

(i) 强不定泛函的约化. 注意到能量泛函 Φ_ε 限制在 E^+ 上具有 "山路结构", 此外, Φ_ε 限制在 E^- 上又是严格凹的, 可把 Φ_ε 约化成为 E^+ 上的 "新泛函" 使得 Nehari 流形方法能够使用, 即作约化映射 $h_\varepsilon : E^+ \to E^-$,

$$\Phi_\varepsilon(z + h_\varepsilon(z)) = \max_{w\in E^-} \Phi_\varepsilon(z + w), \quad \forall z \in E^+.$$

定义新泛函

$$I_\varepsilon : E^+ \to \mathbb{R}, \quad I_\varepsilon(z) = \Phi_\varepsilon(z + h_\varepsilon(z)).$$

(ii) 讨论约化映射的参数依赖性. 记 h_0 为奇异极限泛函 Φ_0 所对应的约化映射, 则当 $\varepsilon \to 0$ 时, 我们就得到对每个固定的 $z \in X$, 都有

$$h_\varepsilon(z) \to h_0(z), \quad \text{在范数意义下}.$$

进一步地, 我们得到在任何固定的闭区间 $[0, t_0]$ 上都有 $I_\varepsilon(tz) \to I_0(tz)$, 或者等价地有 $\Phi_\varepsilon(tz + h_\varepsilon(tz)) \to \Phi_0(tz + h_0(tz))$ 随着 $\varepsilon \to 0$ 一致成立.

(iii) 通过最优路径, 获取极小能量解的充分刻画. 在子空间 E^+ 中找到一条射线 tz $(t \geqslant 0)$ 使得其在约化映射的作用下成为能量泛函 Φ_ε 在整个 E 上的最优极小能量路径.

3 反应 - 扩散系统

3.1 解的存在性和多重性

考虑下述系统:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u + V(x)u = H_v(t, x, u, v), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \\ -\partial_t v - \Delta_x v + V(x)v = H_u(t, x, u, v), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

$z = (u, v) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$. 我们求 $z \in L^2(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^{2M})$, 这里, 或者 $\Omega = \mathbb{R}^N$, 或者 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一有界光滑区域. 当 Ω 有界光滑时, 还要求 $z(t, \cdot)\,|_{\partial\Omega} = 0$. 该系统出现在 Schrödinger 方程的研究中, 也是优化控制论中所谓的无穷维 (或无界) Hamilton 系统. 早先由文献 [36,37] 等在 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 有界的条件下研究了这类系统 (文献 [36] 研究了另类解; 文献 [37] 考虑了自治情形).

令

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \mathcal{J}_0(-\Delta_x + V),$$

则 (3.1) 可表为

$$\mathcal{J}\partial_t z = -A_0 z + H_z(t, x, z), \quad z = (u, v) \in \mathbb{R}^{2M},$$

或 $Az = H_z(t, x, z)$, 其中

$$A = \mathcal{J}\partial_t + A_0. \tag{3.2}$$

考虑下述各向异性 (anistropic) 空间 $(r \geqslant 1)$:

$$B_r = B_r(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^{2M}) := W^{1,r}(\mathbb{R}, L^r(\Omega, \mathbb{R}^{2M})) \cap L^r(\mathbb{R}, W^{2,r} \cap W_0^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}^{2M})), \tag{3.3}$$

其范数定义为

$$\|z\|_{B_r} = \left(\int_{\mathbb{R}\times\Omega} \left(|z|^r + |\partial_t z|^r + \sum_{j=1}^N |\partial_{x_j}^2 z|^r \right) \right)^{1/r}.$$

显然, B_2 是 Hilbert 空间. A 是 $L^2 = L^2(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R})$ 上的自共轭算子, $\mathcal{D}(A) = B_2 \subset L^2$. 设 $E = \mathcal{D}(|A|^{1/2}) = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ 由 (1.3) 定义.

引理 4 [15] 下述结论成立:

(1) E 连续地嵌入 $L^r(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^{2M})$, 其中, 若 $N = 1$, 则 $\forall r \geqslant 1$; 若 $N \geqslant 2$, 则 $\forall r \in [2, 2(N+2)/N]$. E 紧地嵌入 $L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^{2M})$, 其中, 若 $N = 1$, 则 $\forall r \geqslant 1$; 若 $N \geqslant 2$, 则 $\forall r \in [2, 2(N+2)/N)$.

(2) 若 $0 \notin \sigma(-\Delta_x + V)$, 则 $0 \notin \sigma(A)$ (此时有 $E^0 = \{0\}$).

根据此引理, 我们对非线性作如下假设:

(H_1) $V \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $H \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{2M}, \mathbb{R})$;

(H_2) 存在 $\beta > 2$ 使得 $0 < \beta H(t,x,z) \leqslant H_z(t,x,z)z$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $z \neq 0$;

(H_3) 存在 $\alpha \in (2, 2(N+2)/N)$ 和 $a_1 > 0$ 使得 $|H_z(t,x,z)|^{\alpha'} \leqslant a_1 H_z(t,x,z)z$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $|z| \geqslant 1$, 其中 $\alpha' := \alpha/(\alpha-1)$;

(H_4) $H_z(t,x,z) = o(|z|)$, 当 $z \to 0$ 时关于 t 和 x 一致成立.

定义 $\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}\times\Omega} H(t,x,z)$, 则在 ($\mathrm{H}_1$)–($\mathrm{H}_4$) 假设下, $\Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$, 而系统 (3.1) 被表示为抽象的形式 (1.1): $Az = \Psi'(z)$. 在 E 上定义泛函

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(\|z^+\|^2 - \|z^-\|^2) - \Psi(z).$$

引理 5 [15] 假设 $0 \notin \sigma(-\Delta_x + V)$, ($\mathrm{H}_1$)–($\mathrm{H}_4$) 被满足, 则 $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, Φ 的任何临界点 z 是 (3.1) 的弱解, 而且 $z \in B_r(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^{2M})$, $\forall\, r \geqslant 2$.

为使得 Φ 满足 (PS)- 条件, 我们需对 H 作些技术性假设. 这里给一个周期性条件:

(P_1) $V(x)$ 关于 x_j $(j = 1, \ldots, N)$ 是 T_j- 周期的, 且 $0 \notin \sigma(-\Delta_x + V)$;

(P_2) $H(t,x,z)$ 关于 t 是 T_0- 周期的, 而且当 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 时, 它关于 x_j $(j = 1, \ldots, N)$ 是 T_j- 周期的.

定理 26 [15] 假设 (P_1)、(P_2)、(H_1)–(H_4) 被满足, 则有下述结果:

(1) 系统 (3.1) 具有至少一个非平凡解 $z \in B_r(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^{2M})$, $\forall\, 2 \leqslant r < \infty$.

(2) 若进一步 H 关于 z 是偶的, 且

(H_5) 存在 $p \in (2, 2(N+2)/N)$ 和 $\delta, a_2 > 0$ 使得

$$|H_z(t,x,z+w) - H_z(t,x,z)| \leqslant a_2(1 + |z|^{p-1})|w|, \quad \forall\,(t,x,z) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^{2M}, \quad |w| \leqslant \delta,$$

则 (3.1) 具有无穷多解 $z \in B_r(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^{2M})$, $\forall\, 2 \leqslant r < \infty$.

注 13 注意到因位势 V 周期地依赖于 x, $S = -\Delta_x + V$ 的谱 $\sigma(S)$ 是纯连续的, $\sigma(S) = \sigma_c(S)$ 且是若干不相交的闭区间之并. 一个有趣的问题是, 当 0 是 $\sigma(S)$ 的边界点时的情形. 为简单起见, 考虑 $H(t,x,z)$, $z := (u,v)$ 有如下表示:

(h_0) $H(t,x,z) = h(t,x)|z|^p$, 其中 $p \in (2, 2(N+2)/N)$, $h \in C(\mathbb{R} \times \overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $h(t,x) > 0$ 且关于 t 是 T_0-周期的, 关于 x_j $(j = 1, \ldots, N)$ 是 T_j- 周期的.

定理 27 [2] 假设 (V_1) 成立, $0 \in \sigma(S)$, $\exists\, a > 0$ 使得 $(0,a) \cap \sigma(S) = \emptyset$ 成立. 又设 $H(t,x,z)$ 满足 (h_0), 则 (3.1) 具有无穷多几何不同的解 $z \in B_r(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^{2M})$, $\forall\, r \in [p, \infty)$.

注 14 多解性结果中, 偶性条件可用更一般的对称群作用替换, 如所谓的 "相容" 紧 Lie 群作用. 设 $\rho : G \to GL(2M, \mathbb{R})$ 是紧 Lie 群 G 在 $V = \mathbb{R}^{2M}$ 上的一个辛表示. 称 ρ 是相容的, 如果每一个等变映射 $\partial\mathscr{O} \to V^{k-1}$ 都具有零点, 这里 $\mathscr{O}$ 代表 V^k $(k \geqslant 2)$ 的 0 元素的开不变邻域. 定理 26 的结论 (2) 的条件 (H_5) 可替为, 存在紧 Lie 群 G 在 $\mathbb{R}^{2M}$ 上的相容辛表示 ρ 使得 $H(t,x,\rho(g)z) = H(t,x,z)$, $\forall\,(t,x,z)$, $g \in G$.

注 15 在更一般的非线性条件下, 定理的结论仍然正确. 例如, 考虑

$$\tilde{H}(t,x,z) := \frac{1}{2}H_z(t,x,z)z - H(t,x,z),$$

则 (H_2) 和 (H_3) 可替换为渐近线性条件或超线性条件, 即

(A) 渐近线性条件.

(A_1) $H_z(t,x,z)-V_\infty(t,x)z=o(|z|)$, 当 $|z|\to\infty$ 时一致对 (t,x) 成立, 且 $\inf V_\infty>\sup V$;

(A_2) $\tilde{H}(t,x,z)>0$, 若 $z\neq 0$, $\tilde{H}(t,x,z)\to\infty$, 当 $|z|\to\infty$ 时一致对 (t,x) 成立;

(S) 超线性条件.

(S_1) $H(t,x,z)/|z|^2\to\infty$, 当 $|z|\to\infty$ 时一致对 (t,x) 成立;

(S_2) $\tilde{H}(t,x,z)>0$, $\forall z\neq 0$, 且 $\exists r>0$ 和 $\sigma>1$, 满足若 $N=1$, 则 $\sigma>1+\frac{N}{2}$; 若 $N\geqslant 2$, 则 $|H_z(t,x,z)|^\sigma\leqslant c_1\tilde{H}(t,x,z)|z|^\sigma$, $\forall |z|\geqslant r$.

注 16 对更一般的系统有类似结果. 例如, 考虑 (参见文献 [38])

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta_x u+\vec{b}(t,x)\cdot\nabla_x u+V(x)u=H_v(t,x,u,v),\\ -\partial_t v-\Delta_x v-\vec{b}(t,x)\cdot\nabla_x v+V(x)v=H_u(t,x,u,v),\end{cases}\tag{$\widehat{\mathrm{FS}}$}$$

其中 $\vec{b}\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$, $V\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, $H\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{2M},\mathbb{R})$. 假设

(V_0) $a:=\min V>0$, V 关于 x_j $(j=1,\dots,N)$ 是 T_j- 周期的;

(B_0) $\vec{b}\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{div}\vec{b}(t,x)=0$, $\vec{b}$ 关于 t 是 T_0- 周期的, 关于 x_j $(j=1,\dots,N)$ 是 T_j- 周期的.

在 (H_1)、(H_4) 及 (A) 或 (S) 条件下, 可得到解的存在性 (多解性).

注 17 此外, 关于扩散系统, 文献 [39–41] 等在不同的条件下得到了多个结果.

3.2 奇异摄动解的存在性、集中性和衰减性

3.2.1 无界 Hamilton 系统

考虑系统

$$\begin{cases}-\varepsilon^2\Delta u_1+u_1+V(x)u_2=W(x)G_{u_2}(\boldsymbol{u}), & x\in\mathbb{R}^N,\\ -\varepsilon^2\Delta u_2+u_2+V(x)u_1=W(x)G_{u_1}(\boldsymbol{u}), & x\in\mathbb{R}^N,\\ u_1(x)\to 0,\quad u_2(x)\to 0, & |x|\to\infty,\end{cases}\tag{3.4}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$, $|\boldsymbol{u}|^2=u_1^2+u_2^2$, G 幂型超二次增长, V 允许取负值, W 取正值. 目的是研究基态解的存在性和集中性等.

记

$$V_{\min}:=\min V,\quad \mathscr{V}:=\{x\in\mathbb{R}^N:V(x)=V_{\min}\},\quad V_\infty:=\liminf_{|x|\to\infty}V(x),$$

$$W_{\max}:=\max W,\quad \mathscr{W}:=\{x\in\mathbb{R}^N:W(x)=W_{\max}\},\quad W_\infty:=\limsup_{|x|\to\infty}W(x).$$

假设

(A_0) $V,W\in C^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, $\|V\|_\infty<1$, $\inf W>0$.

(A_1) $V_{\min}<V_\infty$, $\exists x_v\in\mathscr{V}$ 使得 $W(x_v)\geqslant W(x)$, $\forall |x|\geqslant R$, $R>0$.

(A_2) $W_{\max}>W_\infty$, $\exists x_w\in\mathscr{W}$ 使得 $V(x_w)\leqslant V(x)$, $\forall |x|\geqslant R$.

对 (A_1) 情形可假设 $W(x_v)=\max_{x\in\mathscr{V}}W(x)$, 而令

$$\mathscr{A}_v:=\{x\in\mathscr{V}:W(x)=W(x_v)\}\cup\{x\notin\mathscr{V}:W(x)>W(x_v)\};$$

对 (A_2) 情形可假设 $V(x_w)=\min_{x\in\mathscr{W}}V(x)$, 而令

$$\mathscr{A}_w:=\{x\in\mathscr{W}:V(x)=V(x_w)\}\cup\{x\notin\mathscr{W}:V(x)<V(x_w)\}.$$

关于 G 作如下假设:

(G_0) $G(\boldsymbol{u})=G(|\boldsymbol{u}|)=\int_0^{|\boldsymbol{u}|}g(t)tdt$;

(G_1) $g\in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, $g(0)=0$, $g'(t)\geqslant 0$, $\forall\, t>0$, 这里 $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$;

(G_2) $\exists\, C>0, s\in(2,2^*)$ 使得

$$|g(t)|\leqslant C(1+t^{s-2}),\quad \forall\, t\in[0,\infty);$$

(G_3) $\exists\,\theta>2$ 使得 $0<\theta G(\boldsymbol{u})\leqslant g(|\boldsymbol{u}|)|\boldsymbol{u}|^2$, $\forall\,\boldsymbol{u}\neq 0$.

定理 28 [42] 假设 (A_0) 和 (G_0)–(G_3) 成立.

(I) 假设 (A_1) 成立, 则对充分小的 $\varepsilon>0$, (3.4) 有基态解 $\boldsymbol{u}_\varepsilon=(u_{\varepsilon,1},u_{\varepsilon,2})$. 如果还有 ∇V 和 ∇W 都有界, 则 $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ 满足

(i) $|\boldsymbol{u}_\varepsilon|$ 有最大点 x_ε, $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{A}_v)=0$, 使得某 $c,C>0$,

$$|\boldsymbol{u}(x_\varepsilon)|\leqslant C\exp\Big(-\frac{c}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|\Big).$$

(ii) 令 $\boldsymbol{v}_\varepsilon(x):=\boldsymbol{u}_\varepsilon(\varepsilon x+x_\varepsilon)$, 对任一序列 $x_\varepsilon\to x_0$ $(\varepsilon\to 0)$, $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^2)$ 中收敛到下述极限系统的基态解:

$$\begin{cases}-\Delta u_1+u_1+V(x_0)u_2=W(x_0)g(|\boldsymbol{u}|)u_2, & x\in\mathbb{R}^N,\\ -\Delta u_2+u_2+V(x_0)u_1=W(x_0)g(|\boldsymbol{u}|)u_1, & x\in\mathbb{R}^N.\end{cases}$$

特别地, 若 $\mathscr{V}\cap\mathscr{W}\neq\emptyset$, 则 $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{dist}(x_\varepsilon,\mathscr{V}\cap\mathscr{W})=0$, $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ 在 $H^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^2)$ 中收敛到下述系统的基态解:

$$\begin{cases}-\Delta u_1+u_1+V_{\min}u_2=W_{\max}g(|\boldsymbol{u}|)u_2, & x\in\mathbb{R}^N,\\ -\Delta u_2+u_2+V_{\min}u_1=W_{\max}g(|\boldsymbol{u}|)u_1, & x\in\mathbb{R}^N.\end{cases}$$

(II) 假设 (A_2) 成立, 则当用 $\mathscr{A}_w$ 取代 $\mathscr{A}_v$ 时, (I) 的所有结论为真.

注 18 对于临界系统也有同样的结果. 例如, 考虑

$$\begin{cases}-\varepsilon^2\Delta u_1+u_1+V(x)u_2=W(x)(G_{u_2}(\boldsymbol{u})+|\boldsymbol{u}|^{2^*-2}u_2), & x\in\mathbb{R}^N,\\ -\varepsilon^2\Delta u_2+u_2+V(x)u_1=W(x)(G_{u_1}(\boldsymbol{u})+|\boldsymbol{u}|^{2^*-2}u_1), & x\in\mathbb{R}^N,\\ u_1(x)\to 0,\quad u_2(x)\to 0,\quad |x|\to\infty,\end{cases}\tag{3.5}$$

再进一步假设

(G_4) 存在 $c_0>0$ 和 $2<p\leqslant s$ 使得 $c_0|\boldsymbol{u}|^p\leqslant G(\boldsymbol{u})$, $\forall\,\boldsymbol{u}$;

在 (G_4) 条件下, 我们得到类似于次临界情形的结果.

3.2.2 反应 - 扩散系统

通常情形下, 作为描述两个化学物质之间反应和扩散行为的方程组有如下形式:

$$\begin{cases}\partial_t U=D_U\Delta_x U+f(U,V),\\ \partial_t V=D_V\Delta_x V+g(U,V),\end{cases}\tag{3.6}$$

其中 U 和 V 分别代表不同化学物质的浓度分布, D_U 和 D_V 作为扩散系数分别刻画了化学物质的扩散程度, 整个反应与扩散的动力学过程将被非线性函数 $f(U,V)$ 和 $g(U,V)$ 控制—补充与消耗. 方程中正的扩散系数所对应的扩散项, 如 $D_U\Delta_x U$, 将描述为, 当 U 的数值低于周边区域时, U 将增加 (这也就是 Fick 第一法则, 自由扩散将从高浓度向低浓度进行). 而负的扩散系数所对应的扩散项, 如 $D_V\Delta_x V$, 将描述为, 该物质进行着所谓的反向扩散过程 (非自由扩散, 如捕食和凝聚等, 刻画物质聚集到高浓度的过程). 耦合的反应 - 扩散系统将给出空间中一系列的斑图分布 (称为图灵斑图). 理解或探寻反应 - 扩散参数与空间斑图分布之间的关系成为了一个有趣而本质的问题.

我们将考虑如下 $\mathbb{R}^N$ 上由 $2M$ 个分量组成的反应 - 扩散系统:

$$\begin{cases}\partial_t u=\varepsilon^2\Delta_x u-u-V(x)v+\partial_v H(u,v),\\ \partial_t v=-\varepsilon^2\Delta_x v+v+V(x)u-\partial_u H(u,v),\end{cases}\tag{3.7}$$

其中 $(u,v):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M$ 表示不同的化学物质的浓度场. 线性位势函数 $V:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 刻画了外界的增量分布 (如人为地增加、减少一些反应物) 非线性部分 (由函数 $H:\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}$ 构成) 描述了介质带来的影响以及反应物质的自身损耗等. 作变量替换 $x\to\varepsilon x$ 就得到

$$\begin{cases}\partial_t u=\Delta_x u-u-V_\varepsilon(x)v+H_v(u,v),\\ -\partial_t v=\Delta_x v-v-V_\varepsilon(x)u+H_u(u,v),\end{cases}\tag{3.8}$$

其中 $V_\varepsilon(x)=V(\varepsilon x)$. 如 (3.2) 定义算子 $A_0=\mathcal{J}_0(-\Delta_x+1)$, $A:=\mathcal{J}\partial_t+A$. 此时 (3.8) 可被抽象地写为

$$Az+V_\varepsilon(x)z=\nabla_z H(z),\quad \text{其中 } z=(u,v),$$

恰好是如下能量泛函的 Euler 方程:

$$\Phi_\varepsilon(z)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N}Hz\cdot z+V_\varepsilon(x)|z|^2dxdt-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N}H(z)dxdt.$$

设 $E=\mathcal{D}(|A|^{1/2})=E^-\oplus E^0\oplus E^+$ 由 (1.3) 定义. 观察

$$\sigma(A)=\mathbb{R}\setminus(-1,1),$$

则得表示

$$\Phi_\varepsilon(z)=\frac{1}{2}(\|z^+\|^2-\|z^-\|^2)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N}V_\varepsilon(x)|z|^2dxdt-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N}H(z)dxdt.$$

假设条件:

(V_1) V 局部 Hölder 连续, 并且 $\max|V|<1$;

(V_2) 存在一个有界开集 $\Lambda\subset\mathbb{R}^N$ 使得 $\underline{c}:=\min_\Lambda V<\min_{\partial\Lambda}V$.

对于非线性, 不失一般性, 要求 $H:\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}$ 满足形式 $H(\xi)=G(|\xi|):=\int_0^{|\xi|}g(s)sds$, 并假设

(H_1) $g(0)=0$, $g\in C^1(0,\infty)$, $g'(s)>0$;

(H_2) $s\mapsto g(s)+g'(s)s$ 在区间 $[0,\infty)$ 上是递增函数.

此外, g 既可以是超线性的, 也可以是渐进线性的, 即

(H_3) 超线性条件:

(i) 存在 $\beta>2$ 使得当 $s\neq 0$ 时 $0<\beta G(s)\leqslant g(s)s^2$;

(ii) 存在 $\alpha>0$ 和 $p\in(2,2(N+2)/N)$ 使得对所有的 $s\geqslant 1$ 都有 $g(s)\leqslant\alpha s^{p-2}$.

(H_3') 渐进线性条件:

(i) 存在 $b > 1 + \sup|V|$ 使得当 $s \to \infty$ 时 $g(s) \to b$;

(ii) $\widehat{G}(s) > 0$, 当 $s > 0$ 且 $\widehat{G}(s) \to +\infty$ (当 $s \to \infty$).

定理 29 [17] 假设条件 (V_1)、(V_2)、(H_1)–(H_3) 或 (H_3') 成立, 则对所有充分小的 $\varepsilon > 0$, 反应 - 扩散系统 (3.7) 存在一个解 $\tilde{z}_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ 使得

(i) 存在 Λ 中的一族点列 $\{y_\varepsilon\}$ 满足 $\lim_{\varepsilon\to 0} V(y_\varepsilon) = \underline{c}$, 并且

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-N} \int_{\mathbb{R}} \int_{B_{\varepsilon\rho}(y_\varepsilon)} |\tilde{z}_\varepsilon|^2 \, dxdt > 0, \quad \forall \rho > 0,$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \|\tilde{z}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_{\varepsilon R}(y_\varepsilon))} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(ii) 平移后的解 $w_\varepsilon(t,x) = \tilde{z}_\varepsilon(t, \varepsilon x + y_\varepsilon)$ 在 $B^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2M})$ 中随 $\varepsilon \to 0$ 收敛到极限方程组

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u - u - \underline{c}\, v + \partial_v H(u,v), \\ \partial_t v = -\Delta_x v + v + \underline{c}\, u - \partial_u H(u,v) \end{cases}$$

的极小能量解.

4 其他应用

4.1 Schrödinger 方程

揭示位势井的几何性质与正解个数的关系, 证明 $-\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = u^{p-1}$ 至少有 $2^k - 1$ 个正解 (k 是 $a^{-1}(0)$ 的连通分支个数).

文献 [43] 研究了带参数的 Schrödinger 方程: $2 < p < \frac{2N}{N-2}$,

$$-\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = u^{p-1}, \quad u > 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{P_λ}$$

假设

(a_1) $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $a(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, 位势井 $\Omega = \mathrm{int} a^{-1}(0)$ 是非空有界开集, $\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Omega_j$ 有 k 个分支, 且 $\partial\Omega$ 光滑, $a^{-1}(0) = \bar{\Omega}$.

(a_2) $\exists M_0 > 0$ 使得 $A := \{x : a(x) \leqslant M_0\}$ 具有有限测度.

(b_1) $\exists M_1 > 1$ 使得 $|b(x)| \leqslant M_1(a(x) + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

(b_2) 任给 $j \in \{1, \ldots, k\}$, 边值问题

$$\begin{aligned} &-\Delta u + b(x)u = \mu u, \quad \text{在 } \Omega_j \text{ 内}, \\ &u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega_j \text{ 上} \end{aligned}$$

的第一特征值 > 0.

对 $O = \Omega$ 或 Ω_j ($j = 1, \ldots, k$), 问题

$$\begin{aligned} &-\Delta u + b(x)u = |u|^{p-2}u, \quad \text{在 } O \text{ 内}, \\ &u = 0, \quad \text{在 } \partial O \text{ 上} \end{aligned}$$

的非负解对应于泛函

$$I_O(u) := \int_O \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + b(x)u^2) - \frac{1}{p}u_+^p \tag{4.1}$$

的临界点. 记 (4.1) 的最小能量为 $c(O)$.

令

$$E := \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 < \infty\right\}.$$

定理 30 [43] 假设 (a_1)、(a_2)、(b_1) 和 (b_2) 成立, 则 $\forall\,\varepsilon > 0$, $\forall\,\emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, k\}$, $\exists\,\Lambda = \Lambda(\varepsilon) > 0$ 使得对任何 $0 < \varepsilon \leqslant \Lambda$, 当 $\lambda \geqslant \Lambda$ 时, (P_λ) 具有一个正解 $u_\lambda \in E$ 满足

$$\left|\int_{\Omega_j}\left(|\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda^2 - \frac{2p}{p-2}c(\Omega_j)\right)\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, j \in J,$$

$$\int_{\Omega_J}(|\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda^2) \leqslant \varepsilon, \quad \Omega_J = \bigcup_{j\in J}\Omega_j.$$

此外, 任何序列 $\lambda_n \to \infty$ 有子列使得 $u_{\lambda_{n_i}}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中收敛于 $u(x)$, 满足 $u(x) = 0$, $\forall\, x \notin \Omega_J$, 且 u 是下述问题的最小能量解: $\forall\, j \in J$, 有

$$-\Delta u + b(x)u = u^{p-1}, \quad u > 0, \quad \text{在 } \Omega_j \text{ 内}, \quad u\,|_{\partial\Omega_j} = 0.$$

推论 1 [43] 在上述定理的假设下, 存在 $\Lambda > 0$, 当 $\lambda \geqslant \Lambda$ 时, (P_λ) 具有 $2^k - 1$ 个正解.

首次在 0 是 Schrödinger 算子的连续谱情形下证明 Schrödinger 方程非平凡解的存在性和多重性.

之前, 人们用变分方法研究非线性方程 (1.1) 时, 总是假设要么 $0 \notin \sigma(A)$, 要么 0 是有限重特征值 (如有界域上的椭圆边值问题、Hamilton 系统的周期解), 至多 0 是 A 的唯一的孤立特征值 (如波方程的周期解). 我们第一次考虑了 0 是带周期位势的 Schrödinger 算子的连续谱情形. 具体地, 考虑

$$-\Delta u + V(x)u = g(x, u), \quad u(x) \to 0, \quad |x| \to \infty. \tag{4.2}$$

假设

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 关于 x_j 是 T_j- 周期的.

我们知道周期 Schrödinger 算子 $A = -\Delta + V$ 只有连续谱, 且 $\sigma(A) = \sigma_c(A)$ 由若干闭区间并成, 于是假设

(V_2) $0 \in \sigma(A)$, 且 $\exists\, b > 0$ 使得 $(0, b] \cap \sigma(A) = \emptyset$.

关于非线性, 令 $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)ds$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, 若 $N \geqslant 3$; $2^* = \infty$, 若 $N = 1, 2$, 假设

(g_1) $g(x, u) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 关于 x_j $(j = 1, \ldots, N)$ 是 T_j- 周期的.

(S_2) $\exists\, a_1 > 0$, $2 < \gamma \leqslant \mu < 2^*$ 使得 $a_1|u|^\mu \leqslant \gamma G(x, u) \leqslant g(x, u)u$, $\forall\,(x, u)$.

(g_3) $\exists\, a_2 > 0$, $2 < p < 2^*$ 使得 $|g(x, u)| \leqslant a_2(|u|^{p-1} + |u|^{q-1})$, $\forall\,(x, u)$.

定理 31 [15] 假设 (V_1)、(V_2) 和 (g_1)–(g_3) 成立, 则 (4.2) 至少有一个非平凡解 $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap L^t(\mathbb{R}^N)$, $\forall\,\mu \leqslant t \leqslant 2^*$. 进一步, 若 $g(x, u)$ 关于 u 是奇的, 且 $\exists\, a_3, \varepsilon > 0$ 使得只要 $|v| \leqslant \varepsilon$, 就有

$$|g(x, u + v) - g(x, u)| \leqslant a_3(|u|^{p-2} + |v|^{p-2} + |u|^{q-1})|v|,$$

则 (4.2) 有无穷多个几何不同的解 $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap L^t(\mathbb{R}^N)$, $\forall\,\mu \leqslant t \leqslant 2^*$.

我们还得到了其他一些结果.

文献 [44] 考虑了具有临界非线性的摄动问题

$$-\varepsilon^2\Delta u+V(x)u=K(x)|u|^{2^*-2}u+h(x,u),\quad u\in H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}),\tag{4.3}$$

其中 $h(x,u)\sim P(x)|u|^{p-2}u$, $p\in(2,2^*)$, $\inf V=0$. 在适当条件下, 我们得到了最小能量正解的存在性、集中性和衰减性, 解的多重性, 以及一对各仅改变一次符号的解等. 此外有趣的是该文献指出次临界项 $h(x,u)\not\equiv 0$ 是 (4.3) 有解的必要条件.

文献 [45] 考虑了更一般的问题

$$-\varepsilon^2\Delta u+V(x)u=g(x,u),\quad u\in H^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}).$$

与文献 [44] 的主要区别是, 这里的位势 $V(x)$ 可改变符号, 集合 $\{x\in\mathbb{R}^N: V(x)\leqslant 0\}\neq\emptyset$ 且其测度有限. 至于 $g(x,u)$ 可以是超线性次临界的, 或是形如 (4.3) 的临界扰动非线性. 在常见的假设下, 建立了解的存在性和多解性, 以及最小能量解的集中性等.

这方面我们另外的工作参见文献 [46–53] 等.

4.2 Hamilton 系统的同宿轨

用变分法研究一阶 Hamilton 系统的同宿轨最早参见文献 [54]. 须指出的是, 该文献考虑的情形是自治系统 (即 Hamilton 函数不依赖于时间变量), 且 Hamilton 函数是严格凸的. 文献 [1,55] 利用所建立的强不定问题的变分方法首次得了到非自治非凸的 Hamilton 系统同宿轨.

考虑下述 Hamilton 系统同宿轨问题:

$$\begin{cases}\dot z=\mathcal{J}H_z(t,z),\\ \lim\limits_{|t|\to\infty}z(t)=0,\end{cases}\tag{4.4}$$

其中 $z=(p,q)\in\mathbb{R}^{2N}$, $\mathcal{J}$ 记 $\mathbb{R}^{2N}$ 的标准辛结构为

$$\mathcal{J}:=\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

Hamilton 函数 $H\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ 可表为

$$H(t,z)=\frac{1}{2}L(t)z\cdot z+R(t,z),$$

这里 $L(t)$ 是连续的对称 $2N\times 2N$- 矩阵值函数, $R_z(t,z)=o(|z|)$ $(z\to 0)$. 称 (4.4) 的解 z 是同宿轨, 如果 $z(t)\not\equiv 0$, $z(t)\to 0$ $(|t|\to\infty)$.

为叙述方便, 将使用 $2N\times 2N$- 矩阵 $\mathcal{J}_0:=\left(\begin{smallmatrix}0 & I\\ I & 0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $\mathcal{J}_1:=\left(\begin{smallmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{smallmatrix}\right)$, 及记号 $\tilde R(t,z):=\frac{1}{2}R_z(t,z)z-R(t,z)$. 此外, 对任何对称矩阵值函数 $M\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N\times 2N})$, 令 $\wp(M(t))$ 记 $M(t)$ 的所有特征值, 并令

$$\lambda_M:=\inf_{t\in\mathbb{R}}\min\wp(M(t)),\quad \Lambda_M:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\max\wp(M(t)).$$

特别地, 对 $M(t)=\mathcal{J}_0L(t)$, 记 $\lambda_0:=\lambda_{\mathcal{J}_0L}$, $\Lambda_0:=\Lambda_{\mathcal{J}_0L}$.

4.2.1 周期情形

假设

(L_0) $L(t)$ 关于 t 是 1- 周期的, $\mathcal{J}_0 L(t)$ 是正定的;

(R_0) $R(t,z)$ 关于 t 是 1- 周期的, $R(t,z)\geqslant 0$, $R_z(t,z)=o(|z|)$ 当 $z\to 0$ 时关于 t 一致.

首先处理超线性情形. 假设

(S_1) $R(t,z)|z|^{-2}\to\infty$ 当 $|z|\to\infty$ 时关于 t 一致;

(S_2) $\tilde{R}(t,z)>0$, $\forall\, z\neq 0$, 且存在 $r_1>0$, $\nu>1$ 使得 $|R_z(t,z)|^{\nu}\leqslant c_1\tilde{R}(t,z)|z|^{\nu}$, $\forall\,|z|\geqslant r_1$.

定理 32 [20] 假设 (L_0)、(R_0)、(S_1) 和 (S_2) 成立, 则 (4.4) 具有至少 1 条同宿轨. 若 $R(t,z)$ 关于 z 还是偶的, 则 (4.4) 具有无穷多条几何不同的同宿轨.

其次考虑渐近线性情形. 除 (L_0) 外, 假设

(L_1) $L(t)$ 与 $\mathcal{J}_1$ 是反交换的, 即 $\mathcal{J}_1 L(t)=-L(t)\mathcal{J}_1$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$.

例如, 设 $B(t)$ 是 $N\times N$ 对称矩阵值函数, 则矩阵值函数 $\left(\begin{smallmatrix}0 & B(t)\\ B(t) & 0\end{smallmatrix}\right)$ 满足 (L_1). 关于非线性, 假设

(A_1) $R_z(t,z)-L_\infty(t)z=o(|z|)$ ($|z|\to\infty$) 关于 t 一致, 其中 $L_\infty(t)$ 是对称矩阵值函数, 且 $\lambda_{L_\infty}>\Lambda_0$;

(A_2) $\tilde{R}(t,z)\geqslant 0$, $\exists\,\delta_0\in(0,\lambda_0)$ 使得若 $|R_z(t,z)|\geqslant(\lambda_0-\delta_0)|z|$, 则 $\tilde{R}(t,z)\geqslant\delta_0$;

定理 33 [20] 设 (L_0)、(L_1)、(R_0)、(A_1) 和 (A_2) 满足, 则 (4.4) 有至少 1 条同宿轨. 进一步, 若 $R(t,z)$ 关于 z 是偶的且满足

(A_3) $\exists\,\delta_1>0$ 使得 $\tilde{R}(t,z)\neq 0$, $\forall\, 0<|z|\leqslant\delta_1$,

则 (4.4) 具有无穷多条几何不同的同宿轨.

上述两个定理的证明主要基于我们建立的抽象变分框架、临界点定理和下述关于 Hamilton 算子 $A=-(\mathcal{J}\frac{d}{dt}+L)$ 的谱分析:

命题 6 [2] 假设 (L_0) 满足, 则

(i) A 仅有绝对连续谱: $\sigma(A)=\sigma_c(A)$ (参见文献 [55]);

(ii) $\sigma(A)\subset\mathbb{R}\setminus(-\lambda_0,\lambda_0)$;

(iii) 若 (L_1) 也成立, 则 $\sigma(A)$ 是对称的: $\sigma(A)\cap(-\infty,0)=-\sigma(A)\cap(0,\infty)$, 而且 $\mu_e\leqslant\Lambda_0$.

注 19 之前人们只知道周期 Schrödinger 算子仅有连续谱.

4.2.2 非周期情形

假设

(H_0) $\exists\, b>0$ 使得集合 $\Lambda^b:=\{t\in\mathbb{R}:\mathcal{J}_0 L(t)<b\}$ 非空且测度有限;

(H_1) $R(t,z)\geqslant 0$, 且 $R_z(t,z)=o(|z|)$ ($z\to 0$) 关于 t 一致;

(H_2) $R_z(t,z)=M(t)z+r_z(t,z)$, 其中 M 是有界、连续对称的 $2N\times 2N$- 矩阵值函数, $r_z(t,z)=o(|z|)$ ($|z|\to\infty$) 关于 t 一致;

(H_3) $m_0:=\inf_{t\in\mathbb{R}}[\inf_{(\xi\in\mathbb{R}^{2N},|\xi|=1)}M(t)\xi\cdot\xi]>\inf\sigma(A)\cap(0,\infty)$;

(H_4) 要么 $0\notin\sigma(A-M)$, 要么 $\tilde{R}(t,z)\geqslant 0$, $\forall\,(t,z)$ 且 $\exists\,\delta>0$ 使得 $\tilde{R}(t,z)\geqslant\delta_0$ 只要 $|z|$ 充分大;

(H_5) $\gamma<b_{\max}$, 其中对某 $t_0\geqslant 0$, 有

$$\gamma:=\sup_{|t|\geqslant t_0,z\neq 0}\frac{|R_z(t,z)|}{|z|},$$

而

$$b_{\max}:=\sup\{b:|\Lambda^b|<\infty\}.$$

以 ℓ 记 A 的位于 $(0, m_0)$ 中的特征值个数.

定理 34 [24] 假设 (H_0)–(H_5) 满足, 则 (4.4) 至少有 1 条同宿轨. 若进一步 $R(t,z)$ 关于 z 是偶的, 则 (4.4) 至少有 ℓ 对同宿轨.

注 20 文献 [56] 还得到了关于非周期超线性 Hamilton 系统 (4.4) 的同宿轨的存在性、多重性和指数衰减性的若干结果. 顺便指出, 文献 [57] 中关于一阶 Hamilton 系统周期解的结果和发展的指标理论也是处理强不定问题的新鲜有趣工作. 此外, 文献 [58] 研究了一阶离散的超线性 Hamilton 系统的同宿轨存在性问题.

4.3 自旋流形上 Dirac 方程的分歧现象

设 (M,g) 是 m- 维的紧自旋流形, $\mathbb{S}(M)$ 是 M 上的自旋丛,

$$D: C^\infty(M,\mathbb{S}(M)) \to C^\infty(M,\mathbb{S}(M))$$

是 Atiyah-Singer Dirac 算子

$$D\psi = \sum_{j=1}^m e_j \cdot \nabla_{e_j}\psi,$$

其中 $\{e_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ 是 TM 上的一组局部正向标准正交基, $h: \mathbb{S}(M) \to \mathbb{S}(M)$ 是保持纤维的非线性映射. 考虑方程

$$\mu D\psi(x) = \psi(x) + h(\psi(x)), \quad x \in M, \tag{4.5}$$

其中 $\psi(x) \in C^\infty(M,\mathbb{S}(M))$ 代表旋量丛的光滑截面. 此方程可看作 Dirac 算子 D 的摄动特征值问题. 在适当条件下, 我们分别证明在原点和无穷远处出现分歧现象.

假设 h 是一位势算子, 换言之, 存在实值连续可微函数 H 使得 $\nabla_\psi H(\psi) = h(\psi)$.

首先考虑下述非线性 H:

(H_1) $H(\theta) = 0$, $H(\psi) \geqslant 0$, $\forall\, \psi \in C^1(M,\mathbb{S}(M))$.

(H_2) 存在正数 α 和 β 满足 $1 < \beta < \alpha \leqslant \frac{m+1}{m-1}$ 及常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1|\psi|^\beta \leqslant |\nabla_\psi H(\psi)| \leqslant C_2|\psi|^\alpha.$$

定理 35 [59] 设 $0 \notin \sigma(D)$. 设 $h \in C^1(\mathbb{S}(M))$ 及 H 满足 (H_1) 和 (H_2), 则对任何 $1/\mu_k \in \sigma(D)$, $k \in \mathbb{Z}$, (μ_k, θ) 是 (4.5) 的分歧点. 精确地,

(i) 若 $\mu_k > 0$, 则 μ_k 有右邻域 Λ;

(ii) 若 $\mu_k < 0$, 则 μ_k 有左邻域 Λ,

使得 $\forall\, \mu \in \Lambda \setminus \{\mu_k\}$, (4.5) 在 θ 的附近至少有 2 个不同的非平凡解属于 $W^{1/2,2}(M,\mathbb{S}(M))$.

其次考虑下述非线性:

(h_1) 存在 $0 < \alpha < 1$, 及 $a > 0$, $b > 0$ 使得 $|h(\psi)| \leqslant a|\psi|^\alpha + b$;

(h_2) 假设 $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, 对任意的收敛序列 $\{\omega_n\} \subset \ker(\mu D - I)$, $\omega_n \to \omega$, $\|\omega\| = 1$, 任意的有界序列 $\{\varphi_n\} \subset \ker(\mu D - I)^\perp$ 及任意的无界正数序列 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, 成立

$$\liminf_{n\to\infty} \int_M h(t_n\omega_n + \varphi_n)\omega dx > 0.$$

定理 36 [59] 设 $0 \notin \sigma(D)$, $k \in \mathbb{Z}$. 若 $1/\mu_k \in \sigma(D)$, h 全连续, 在 $W^{1/2,2}(M,\mathbb{S}(M))$ 中,

$$h(\psi) = o(\|\psi\|), \quad \|\psi\| \to \infty,$$

则 (μ_k, ∞) 是 (4.5) 在无穷远处的一个分歧点. 此外, 若 h 满足 (h_1) 和 (h_2), 则 μ_k 有右邻域 Λ 使得, 任给 $\mu \in \Lambda \setminus \{\mu_k\}$, (4.5) 至少有一个非平凡解 ψ_μ 使得 $\|\psi_\mu\| \to \infty$ $(\mu \to \mu_k)$.

参考文献

1 Ding Y H, Li S J. Homoclinic orbits for first order Hamiltonian systems. J Math Anal Appl, 1995, 189: 585–601
2 Ding Y H. Variational Methods for Strongly Indefinite Problems. Interdisciplinary Mathematical Sciences, vol. 7. Hackensack: World Scientific, 2007
3 Ambrosetti A, Rabinowitz P. Dual variational methods in critical point theory and applications. J Funct Anal, 1973, 14: 349–381
4 Bartsch T. Topological Methods for Variational Problems with Symmetries. Berlin: Springer-Verlag, 1993
5 Benci V, Rabinowitz P. Critical point theorems for indefinite functionals. Invent Math, 1979, 52: 241–273
6 Chang K C. Infinitely Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems. Basel: Birkäuser, 1993
7 Long Y M. Index Theory for Symplectic Paths with Applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002
8 Willem M. Minimax Theorems. Basel: Birkhäuser, 1996
9 丁彦恒: 变分原理 — 自然法则. 数学所讲座 2013. 北京: 科学出版社, 2015
10 Bartsch T, Ding Y H. Deformation theorems on non-metrizable vector spaces and applications to critical point theory. Math Nachr, 2006, 279: 1267–1288
11 Ding Y H. Deformation in locally convex topological linear spaces. Sci China Ser A, 2004, 47: 687–710
12 Rabinowitz P. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. Providence: Amer Math Soc, 1986
13 Struwe M. Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1996
14 Cerami G. Un criterio di esistenza per i punti critici su varietá illimitate. Ist Lombardo Accad Sci Lett Rend A, 1978, 112: 332–336
15 Bartsch T, Ding Y H. Homoclinic solutions of an infinite-dimensional Hamiltonian system. Math Z, 2002, 240: 289–310
16 Kryszewski W, Szulkin A. Generalized linking theorem with an application to semilinear Schödinger equation. Adv Differential Equations, 1988, 3: 441–472
17 Ding Y H, Xu T. Concentrating patterns of reaction-diffusionn systems: A variational approach. Trans Amer Math Soc, 2017, 369: 97–138
18 Esteban J, Seéré E. Stationary states of the nonlinear Dirac equation: A variational approach. Comm Math Phys, 1995, 171: 323–350
19 Bartsch T, Ding Y H. Solutions of nonlinear Dirac equations. J Differential Equations, 2006, 226: 210–249
20 Ding Y H. Multiple homoclinics in a Hamiltonian system with asymptotically or super linear terms. Commun Contemp Math, 2006, 8: 453–480
21 Ding Y H, Liu X Y. Periodic solutions of a Dirac equation with concave and convex nonlinearities. J Differential Equations, 2015, 258: 3567–3588
22 Ding Y H, Liu X Y. Periodic solutions of an asymptotically linear Dirac equation. Ann Mat Pura Appl (4), 2017, 196: 717–735
23 Ding Y H, Ruf B. Solutions of a nonlinear Dirac equation with external fields. Arch Ration Mech Anal, 2008, 190: 57–82
24 Ding Y H, Jeanjean L. Homoclinic orbits for a nonperiodic Hamiltonian system. J Differential Equations, 2007, 237: 473–490
25 Ding Y H, Wei J C. Stationary states of nonlinear Dirac equations with general potentials. Rev Math Phys, 2008, 20: 1007–1032
26 Ding Y H. Semi-classical ground states concentrating on the nonlinear potential for a Dirac equation. J Differential Equations, 2010, 249: 1015–1034
27 Ding Y H, Liu X Y. Semi-classical limits of ground states of a nonlinear Dirac equation. J Differential Equations, 2012, 252: 4962–4987
28 Ding Y H, Liu X Y. On semiclassical ground states of a nonlinear Dirac equation. Rev Math Phys, 2012, 24: 1250029
29 Ding Y H, Lee C, Ruf B. On semiclassical states of a nonlinear Dirac equation. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2013, 143: 765–790
30 Ding Y H, Ruf B. Existence and concentration of semiclassical solutions for Dirac equations with critical nonlinearities.

SIAM J Math Anal, 2012, 44: 3755–3785
31 Ding Y H, Xu T. Localized concentration of semi-classical states for nonlinear Dirac equations. Arch Ration Mech Anal, 2015, 216: 3567–3588
32 Ding Y H, Xu T. On semi-classical limits of ground states of a nonlinear Maxwell-Dirac system. Calc Var Partial Differential Equations, 2014, 51: 17–44
33 Ding Y H, Wei J C, Xu T. Existence and concentration of semi-classical solutions for a nonlinear Maxwell-Dirac system. J Math Phys, 2013, 54: 061505
34 Ding Y H, Ruf B. On multiplicity of semi-classical solutions to a nonlinear Maxwell-Dirac system. J Differential Equations, 2016, 260: 5565–5588
35 Ding Y H, Xu T. On the concentration of semi-classical states for a nonlinear Dirac-Klein-Gordon system. J Differential Equations, 2014, 256: 1264–1294
36 Brézis H, Nirenberg L. Characterization of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 1978, 5: 225–326
37 Clément P, Felmer P, Mitidieri F. Homoclinic orbits for a class of infinite dimensional Hamiltonian systems. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5), 1997, 24: 367–393
38 Ding Y H, Luan S X, Willem M. Solutions of a system of diffusion equations. J Fixed Point Theory Appl, 2007, 2: 117–139
39 Yang M B, Chen W X, Ding Y H. Solutions of a class of Hamiltonian elliptic systems in $\mathbb{R}^N$. J Math Anal Appl, 2010, 362: 338–349
40 Yang M B, Wei Y H, Ding Y H. Existence of semiclassical states for a coupled Schrödinger system with potentials and nonlocal nonlinearities. Z Angew Math Phys, 2014, 65: 41–68
41 Zhao F K, Ding Y H. On Hamiltonian elliptic systems with periodic or non-periodic potentials. J Differential Equations, 2010, 249: 2964–2985
42 Ding Y H, Lee C, Zhao F K. Semiclassical limits of ground state solutions to Schrödinger systems. Calc Var Partial Differential Equations, 2014, 51: 725–760
43 Ding Y H, Tanaka K. Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation. Manuscripta Math, 2003, 112: 109–135
44 Ding Y H, Lin F H. Solutions of perturbed Schrödinger equations with critical nonlinearity. Calc Var Partial Differential Equations, 2007, 30: 231–249
45 Ding Y H, Wei J C. Semiclassical states for nonlinear Schrödinger equations with sign-changing potentials. J Funct Anal, 2007, 251: 546–572
46 Clapp M, Ding Y H. Positive solutions of a Schrödinger equation with critical nonlinearity. Z Angew Math Phys, 2004, 55: 592–605
47 De Figueiredo D G, Ding Y H. Strongly indefinite functionals and multiple solutions of elliptic systems. Trans Amer Math Soc, 2003, 355: 2973–2989
48 Ding Y H, Lee C. Multiple solutions of Schrödinger equations with indefinite linear part and super or asymptotically linear terms. J Differential Equations, 2006, 222: 137–163
49 Ding Y H, Luan S X. Multiple solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations. J Differential Equations, 2004, 207: 423–457
50 Ding Y H, Szulkin A. Bound states for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential. Calc Var Partial Differential Equations, 2007, 29: 397–419
51 Ding Y H, Wang Z Q. Bound states of nonlinear Schrödinger equations with magnetic fields. Ann Mat Pura Appl (4), 2011, 190: 427–451
52 Yang M B, Ding Y H. Existence of semiclassical states for a quasilinear Schrödinger equation with critical exponent in $\mathbb{R}^N$. Ann Mat Pura Appl (4), 2013, 192: 783–804
53 Ding Y H, Liu X Y. Semiclassical solutions of Schrödinger equations with magnetic fields and critical nonlinearities. Manuscripta Math, 2013, 140: 51–82
54 Coti-Zelati V, Ekeland I, Séré E. A variationalapproach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems. Math Ann, 1990, 288: 133–160
55 Ding Y H, Willem M. Homoclinic orbits of a Hamiltonian system. Z Angew Math Phys, 1999, 50: 759–778
56 Ding Y H, Lee C. Existence and exponential decay of homoclinics in a nonperiodic superquadratic Hamiltonian system. J Differential Equations, 2009, 246: 2829–2848
57 Ding Y H, Lee C. Periodic solutions of Hamiltonian systems. SIAM J Math Anal, 2000, 32: 555–571
58 Chen W X, Yang M B, Ding Y H. Homoclinic orbits of first order discrete Hamiltonian systems with super linear

terms. Sci China Math, 2011, 54: 2583–2596
59 Ding Y H, Li J Y, Xu T. Bifurcation on compact spin manifold. Calc Var Partial Differential Equations, 2016, 55: 55–90

Variational methods for strongly indefinite problems

DING YanHeng

Abstract This paper reviews some recent development in studying variational methods for strongly indefinite problems under the support of National Natural Science Foundation of China. We firstly describe the ideas for establishing the variational setting, then state a deformation theory in locally convex topological linear spaces and several critical point theorems for dealing with strongly indefinite problems based on the deformation. Some applications of the theory are given including mainly: Existence and multiplicity of solutions to non-autonomous stationary Dirac system, in particular, the existence, concentration phenomena and the exponential decay of semi-classical states; existence and multiplicity of global solutions to the nonlinear (non-autonomous, unbounded Hamilton-type) reaction-diffusion system, especially the existence, concentration phenomena and decay of its ground states of the system with singular perturbation; depth study of homoclinic orbits Hamiltonian system, global Schrödinger equation; other initial work, such as bifurcation of Dirac equation on spin manifolds.

Keywords **strongly indefinite problem, variational setting, deformation theory, Dirac system, unbounded Hamiltonian system, spin manifold**

MSC(2010) **58E05, 46A03, 35A01, 49S05, 37J45, 37K05**

doi: 10.1360/N012016-00164