论文

水平变化波导中多声源问题的耦合简正波解

秦继兴^{①*}, 骆文于^①, 张仁和^①, 杨春梅^②^① 中国科学院声学研究所声场声信息国家重点实验室, 北京 100190;^② 国家海洋局第一海洋研究所海洋环境科学与数值模拟重点实验室, 青岛 266061

* 联系人, E-mail: qjx@mail.ioa.ac.cn

收稿日期: 2014-08-25; 接受日期: 2014-10-21

国家自然科学基金 (批准号: 11434012, 11174312) 资助项目

摘要 本文提出了一种精确、高效的耦合简正波方法, 用于求解水平变化波导中多个声源存在时的声传播问题. 为了处理多声源问题, 修改了全局矩阵耦合简正波方法中的线性系统方程. 修改线性系统方程所增加的计算量可以忽略不计, 因此当多个声源存在于水平变化波导时, 通过一次性求解修改后的线性系统方程能够高效地得到声场解. 数值结果表明, 该方法具有极高的计算精度, 并且能够处理现有声传播模型不能高效解决的某些多声源问题. 该模型可提供声场的标准解, 用于验证其它声传播模型处理多声源问题的计算精度. 此外, 该模型可应用于三维声传播建模, 来处理声源阵产生的波束在实际波导中的传播和散射问题.

关键词 耦合简正波理论, 多声源, 水平变化波导, 全局矩阵方法

PACS: 43.30.Bp, 43.30.Gv, 43.20.Fn

doi: 10.1360/SSPMA2014-00321

1 引言

声场计算模型的研究是从 20 世纪 60 年代开始的, 先后出现了很多方法, 但早期的大部分模型计算能力有限, 只能处理水平不变问题. 近年来, 水平变化海洋环境中的声传播问题一直是水声学研究的热点问题之一, 国内外很多学者对此进行了大量的研究. 目前求解水平变化波导中声传播问题的方法主要有以下几种: 抛物方程法^[1,2], 简正波方法^[3-8], 波数积分法^[9], 有限元法^[10,11], 射线法^[12,13], 以及一些混合算法^[14,15]等. 这些算法都有各自的优缺点和适用范围, 针对不同的问题应选择不同的方法. 其中, 耦合简正波方法的计算精度很高, 适于处理水平变化剧烈波导中的声传播问题.

在水声学中, Pierce^[3] 和 Milder^[16] 首先分别提出了耦合简正波理论, 用来描述声波传播过程中不同模式间的能量交换, 但他们没有求解耦合简正波方程. Rutherford 和 Hawker^[17] 将耦合简正波方程应用到水平变化海洋环境中, 重点强调海底随距离的变化. 为了合理处理斜坡海底, 他们在 Pierce 和 Milder 的理论基础上, 对模式幅度和深度函数做了一阶修正, 使其满足一阶的能量守恒要求. 随后, Fawcett^[18], Godin^[19] 和 Athanassoulis 等人^[20] 分别进一步发展了该类连续变化的耦合简正波理论. 他们指出了求解耦合简正波方程时能量守恒的重要性, 并在在文章中阐明: 当海深随距离变化时, 文献 [3] 和 [16] 的方法中本地垂直模式序列收敛很慢, 这是由于在水平变化波导

引用格式: 秦继兴, 骆文于, 张仁和, 等. 水平变化波导中多声源问题的耦合简正波解. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 014301

Qin J X, Luo W Y, Zhang R H, et al. A coupled-mode method for sound propagation with multiple sources in range-dependent waveguides (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2015, 45: 014301, doi: 10.1360/SSPMA2014-00321

中本地垂直模式和声压满足不同的边界条件. 为了解决本地垂直模式与声压在水平变化界面上边界条件的不一致性, 他们在文章中引入了附加项.

与连续变化的耦合简正波理论不同, Evans 提出了一种阶梯式耦合简正波方法^[4,21]. 该方法将水平变化波导用垂直界面分成一系列水平不变区域, 然后将每个区域的声场表示成简正波序列叠加的形式, 通过匹配垂直界面上的边界条件, 并结合声源条件和远场辐射条件, 可以获得每个模式的系数. 基于该方法的声传播模型 COUPLE, 不同模式间是完全耦合的, 可提供 Helmholtz 方程的双向解, 具有非常高的计算精度, 在二维水平变化波导声场建模中可以用来提供标准解, 但计算量非常大.

Porter 等人^[22]开发了一种高效的单向阶梯式耦合简正波方法, 并讨论了单向模型的能量守恒问题. 文献[22]中的结果表明, 与其他界面匹配条件相比, 一般情况下单次散射近似能提供较精确的声场解. 然而, 当反向散射的能量较大时, 单次散射近似的精度会急剧下降. 相反, 完全双向的耦合简正波方法考虑了每个区域间的相互作用, 声场的求解变成了全局问题, 而不是步进的形式. 因此, 完全双向的耦合简正波方法适用于解决反向散射很强时的问题.

最近, Luo 等人^[23,24]提出了全局矩阵耦合简正波方法 (DGMCM), 该方法能够处理二维点源问题和二维线源问题. DGMCM 是完全双向的数值模型, 因此可以非常精确地求解水平变化波导中的声传播问题. 不同于传统阶梯式耦合简正波方法中求解模式系数的传播矩阵方法^[4]或解耦合算法^[21], DGMCM 采用全局矩阵技术一次性求解所有分段内的模式系数, 因此数值稳定. 另外, 采用合理的归一化距离解, 完全消除了现有双向耦合简正波模型中存在的数值溢出问题. 此外, 该方法通过引入普遍适用的声源条件使其能够处理线源在斜坡海底上方的问题. 对于绝对软边界理想波导, 即水体为等声速的均匀水体, 海面是自由海面, 海底为绝对软的全反射边界, 文献[23, 24]给出了耦合矩阵的闭合表达式.

在水声实验和实际应用中, 为了获得所要求的声源级或指向性, 经常需要通过由多个声源组成的阵列发射信号. 另外, 在实际的海洋环境中, 通常有多个声源同时对声场产生影响. 由于多个声源普遍

存在于实际的海洋环境中, 研究多个声源存在时波导中的声场分布以及声波传播规律是有重要意义的. 然而, 现有声传播模型没有考虑多个声源同时存在时的情况, 比如 COUPLE^[4,21]和 CCMM^[20]. 在现有模型中, 由于每次计算只能得到一个声源产生的声场, 因此当多个声源存在时就要进行多次计算, 计算时间正比于声源数目.

本文提出一种处理水平变化波导中多声源问题的耦合简正波方法. 该方法利用一次性求解所有分段内模式系数的特点, 进一步发展了 DGMCM^[23,24]. 除声源数目之外, 该方法处理水平变化波导中的声传播问题与 DGMCM 具有相同的特点: 精确、高效、数值稳定. 为了使本模型能够处理多声源问题, 需要在 DGMCM 的基础上做两方面的工作. 首先, 在每个声源距离上引入一个虚拟界面; 其次, 将每个虚拟界面上的声源条件应用到线性系统方程中. 实际上, 这两方面工作只对线性系统方程做了轻微的修改, 可以通过求解修改后的线性系统方程得到声场解. 这两方面工作所增加的计算量可以忽略不计, 因此, 该模型可以高效地求解多个声源在水平变化波导中的声传播问题.

2 理论

2.1 二维点源问题

考虑轴对称环境下的二维点源问题, L 个角频率为 ω 的点声源分别位于 $\mathbf{r}_l = (0, z_l)$ 处. 该条件下, Helmholtz 方程为^[25]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} \sum_{l=1}^L S_l \delta(z - z_l), \quad (1)$$

其中 $p = p(r, z)$ 为复声压 (省略时间因子 $e^{-i\omega t}$), $c(z)$ 和 $\rho(z)$ 分别为声速和密度剖面, S_l 为第 l 个声源的系数, 包含幅度和相位信息. 对于水平变化波导, 将水平变化区域分成若干段, 假设每段为水平不变波导. 忽略连续谱的贡献, 第 j 段内的声场可以表示成

$$p^j(r, z) = \sum_{n=1}^N \left[a_n^j H_{1n}^j(r) + b_n^j H_{2n}^j(r) \right] \Psi_n^j(z), \quad (2)$$

其中, N 为简正波耦合中总的简正波号数, a_n^j 和 b_n^j 分别为前向传播声场和后向传播声场的幅度, $\Psi_n^j(z)$ 为第 n 号简正波的本征函数, $H_{1n}^j(r)$ 和 $H_{2n}^j(r)$ 是归一化的 Hankel 函数, 定义为

$$H_{1n}^j(r) = \frac{H_0^{(1)}(k_{rn}^j r)}{H_0^{(1)}(k_{rn}^j r^{j-1})}, \quad (3)$$

$$H_{2n}^j(r) = \frac{H_0^{(2)}(k_{rn}^j r)}{H_0^{(2)}(k_{rn}^j r^j)}. \quad (4)$$

这里 k_{rn}^j 为第 n 号简正波的本征值, 对应于该号简正波的水平波数.

在每个相邻分段间的垂直界面上使用声压连续和法向质点振速连续边界条件, 可以得到如下矩阵形式的方程:

$$\tilde{C}^j H_1^j a^j + \tilde{C}^j b^j - a^{j+1} - H_2^{j+1} b^{j+1} = 0, \quad (5)$$

$$\hat{C}^j H_1^j a^j - \hat{C}^j b^j - a^{j+1} + H_2^{j+1} b^{j+1} = 0, \quad (6)$$

其中 $\tilde{C}^j$ 和 $\hat{C}^j$ 为耦合矩阵, 分别定义为

$$\tilde{C}_{vn}^j = \int_0^\infty \frac{\Psi_v^{j+1}(z) \Psi_n^j(z)}{\rho^{j+1}(z)} dz, \quad (7)$$

$$C = \begin{bmatrix} I & -D & 0 & & & & \\ \tilde{C}^1 H_1^1 & \tilde{C}^1 & -I & -H_2^2 & & & \\ \hat{C}^1 H_1^1 & -\hat{C}^1 & -I & H_2^2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \tilde{C}^{J-2} H_1^{J-2} & \tilde{C}^{J-2} & -I & -H_2^{J-1} & \\ & & \hat{C}^{J-2} H_1^{J-2} & -\hat{C}^{J-2} & -I & H_2^{J-1} & \\ & & & & \tilde{C}^{J-1} H_1^{J-1} & \tilde{C}^{J-1} & -I \\ & & & & \hat{C}^{J-1} H_1^{J-1} & -\hat{C}^{J-1} & -I \end{bmatrix}, \quad (13)$$

x 为列向量,

$$x = \begin{bmatrix} a^1 & b^1 & a^2 & b^2 & \cdots & a^{J-1} & b^{J-1} & a^J \end{bmatrix}^T, \quad (14)$$

v 也为列向量,

$$v = \begin{bmatrix} s_1 + \cdots + s_L & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (15)$$

(14) 式和 (15) 式中的上标 T 代表转置.

$$\hat{C}_{vn}^j = \frac{k_{rn}^j}{k_{rv}^{j+1}} \int_0^\infty \frac{\Psi_v^{j+1}(z) \Psi_n^j(z)}{\rho^j(z)} dz. \quad (8)$$

最后, 在 $r=0$ 处使用声源条件, 在 $r \rightarrow \infty$ 处使用辐射条件. 对于辐射条件, 要满足 $b^J = 0$, J 代表水平分段总数. 声源条件可由下面的表达式给出 [21,25]

$$a^1 - D b^1 = s_1 + \cdots + s_L, \quad (9)$$

其中 D 为对角矩阵, 对角线上的元素为

$$D_{nn} = \frac{H_0^{(1)}(k_{rn}^1 r^1)}{H_0^{(2)}(k_{rn}^1 r^1)}, \quad n = 1, 2, \cdots, N, \quad (10)$$

s_l 是与第 l 个声源相对应的列向量, 其元素为

$$s_{ln} = S_l \frac{i}{4\rho(z_l)} \Psi_n^1(z_l) H_0^{(1)}(k_{rn}^1 r^1), \quad n = 1, 2, \cdots, N. \quad (11)$$

联合 (5) 式、(6) 式和 (9) 式, 并结合辐射条件 $b^J = 0$, 最终得到如下形式的线性系统方程:

$$C x = v, \quad (12)$$

其中 C 是全局系数矩阵,

2.2 二维线源问题

一般而言, 点源适合用于水声学中的实际问题. 但是为了模型间的比较和三维建模等目的, 研究二维线源问题是有意义的. 在 2.1 节的二维点源问题中, 坐标系是轴对称的, 因此声源距离必须等于 0. 但是对于二维线源问题, 声源不须置于 $x=0$ 处, 可以在任意距离. 本节给出的二维线源方法可以处理声

源在任意距离的问题, 比如在斜坡上方. 在下面的推导过程中, 如果变量符号未做特殊说明, 则其意义与 2.1 节中相同.

在直角坐标系中, L 个角频率为 ω 的线声源分别位于 $\mathbf{x}_l = (x_l, z_l)$ 处, 此时 Helmholtz 方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p \\ &= - \sum_{l=1}^L S_l \delta(x - x_l) \delta(z - z_l). \end{aligned} \quad (16)$$

将水平变化波导划分成一系列水平不变区域, 然后将第 j 个区域内的声场表示为

$$p^j(x, z) = \sum_{n=1}^N \left[a_n^j E_{1n}^j(x) + b_n^j E_{2n}^j(x) \right] \Psi_n^j(z), \quad (17)$$

其中 $E_{1n}^j(x)$ 和 $E_{2n}^j(x)$ 为归一化的指数函数, 定义如下:

$$E_{1n}^j(x) = e^{ik_{xn}^j(x-x^{j-1})}, \quad (18)$$

$$E_{\gamma_n}^j(x) = e^{-ik_{xn}^j(x-x^j)}, \quad (19)$$

式中 k_{xn}^j 为水平波数.

在每个声源距离处引入一个垂直虚拟界面, 即第 l 个声源对应虚拟界面 j_{sl} , 共 L 个. 此处需要强调, 虚拟界面上的边界条件包含声源信息, 与其他垂直界面上的边界条件不同. 根据所有界面上的边界

条件,可以得到如下形式的方程:

$$\tilde{\mathbf{C}}^j \mathbf{E}_1^j \mathbf{a}^j + \tilde{\mathbf{C}}^j \mathbf{b}^j - \mathbf{a}^{j+1} - \mathbf{E}_2^{j+1} \mathbf{b}^{j+1} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\widehat{\mathcal{C}}^j E_1^j \mathbf{a}^j - \widehat{\mathcal{C}}^j \mathbf{b}^j - \mathbf{a}^{j+1} + E_2^{j+1} \mathbf{b}^{j+1} = \begin{cases} \mathbf{0}, & j \neq j_{sl}, \\ s_l, & j = j_{sl}, \end{cases} \quad (21)$$

其中 $\mathbf{s}_l$ 是与第 l 个声源相对应的列向量, 其元素为

$$s_{ln} = -S_l \frac{i}{\rho(z_l)} \frac{\Psi_n^{jsl}(z_l)}{k_{yn}^{jsl}}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

将上面的边界条件与辐射条件 $\mathbf{a}^1 = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{b}^J = \mathbf{0}$ 结合, 可以得到如下形式的线性系统方程:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{v}, \quad (23)$$

其中 $\mathbf{x}$ 为列向量.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b^1 & a^2 & b^2 & a^3 & \dots & b^{j_{S1}} & a^{j_{S1}+1} & \dots \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ b^{j_{SL}} & a^{j_{SL}+1} & \dots & b^{J-1} & a^J \end{bmatrix}^T, \quad (24)$$

v 也为列向量,

$$\mathbf{v} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0} \ s_1 \ \cdots \ \mathbf{0} \ s_L \ \cdots \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T, \quad (25)$$

C 是全局系数矩阵,

$$C = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{C}}^1 & -I & -E_2^2 & & & \\ -\widehat{\mathcal{C}}^1 & -I & E_2^2 & & & \\ & \widetilde{\mathcal{C}}^2 E_1^2 & \widetilde{\mathcal{C}}^2 & -I & -E_2^3 & \\ & \widehat{\mathcal{C}}^2 E_1^2 & -\widehat{\mathcal{C}}^2 & -I & E_2^3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \widetilde{\mathcal{C}}^{j_{s1}} E_1^{j_{s1}} & \widetilde{\mathcal{C}}^{j_{s1}} & -I & -E_2^{j_{s1}+1} \\ & & & \widehat{\mathcal{C}}^{j_{s1}} E_1^{j_{s1}} & -\widehat{\mathcal{C}}^{j_{s1}} & -I & E_2^{j_{s1}+1} \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \widetilde{\mathcal{C}}^{j_{sL}} E_1^{j_{sL}} & \widetilde{\mathcal{C}}^{j_{sL}} & -I & -E_2^{j_{sL}+1} \\ & & & & & \widehat{\mathcal{C}}^{j_{sL}} E_1^{j_{sL}} & -\widehat{\mathcal{C}}^{j_{sL}} & -I & E_2^{j_{sL}+1} \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \widetilde{\mathcal{C}}^{J-1} E_1^{J-1} & \widetilde{\mathcal{C}}^{J-1} & -I \\ & & & & & & & \widehat{\mathcal{C}}^{J-1} E_1^{J-1} & -\widehat{\mathcal{C}}^{J-1} & -I \end{bmatrix}. \quad (26)$$

此处需要注意, 如果只包含一个声源, 针对二维点源问题的 (12)–(15) 式和针对二维线源问题的 (23)–(26) 式将简化为文献 [23] 和 [24] 中的结果. 由于常规计算机的内存有限, 因此对于大尺度问题 (高频问题中简正波号数 N 较大, 长距离或者海底地形变化剧烈问题中水平分段数 J 较大), 普通算法无法求解 (12) 和 (23) 式. 文献 [26] 给出了一种节省内存的矩阵求逆算法, 该算法将全局系数矩阵作为分块五对角矩阵来处理, 可用在常规计算机上求解大尺度问题, 但计算效率会有一定程度的降低.

3 数值结果

本节给出三个数值算例, 来说明本文提出的模型对于多声源问题的计算能力. 声场计算结果以声强 (单位为 dB) 给出, 将其定义为 $20\log_{10}|p(\mathbf{r})/p_0|$, 其中 $p(\mathbf{r})$ 为多个声源在接收点产生的总声压, p_0 为距单个单位强度声源 1 m 处的参考声压.

3.1 偶极子声源置于双层波导中

考虑海沟问题, 这是一个二维点源问题. 本算例中的双层波导与文献 [20] 中的例子相同, 海底地形由如下表达式给出:

$$h(r) = \begin{cases} 65 + 25 \cos \frac{2\pi(r-0.5)}{0.4}, & 0.3 < r < 0.7, \\ 40, & \text{其他距离,} \end{cases} \quad (27)$$

其中所有距离的单位均为 km. 均匀水体中的声速 $c_1 = 1500$ m/s, 密度 $\rho_1 = 1.0$ g/cm³. 沉积层中的声速 $c_2 = 1700$ m/s, 密度 $\rho_2 = 1.5$ g/cm³. 水平绝对硬基底的深度为 100 m. 偶极子声源由两个相位相反的声源组成, 声源频率为 25 Hz. 第一个零相位的声源置于 25 m 深度, 第二个 π 相位的声源置于 10 m 深度. 两个声源的距离为 $\lambda/4$, 其中 λ 为波长. 两个声源都具有单位强度, 也就是说, $S_1 = 1$, $S_2 = -1$.

在本模型对该问题的数值计算中, 将海沟在 $r = 0.3$ km 到 $r = 0.7$ km 的范围内分成 400 段, 共 15 号简正波参与计算. 两个声源的信息都包含在线性系统方程中, 可以通过一次求解线性系统方程得到总的声场解. 对于该问题, CCMM^[20] 用来提供参考解, 具

体的计算参数与文献 [20] 中相同. 由于 CCMM 模型没有考虑多声源问题, 需要首先对于每个声源分别进行计算, 然后再叠加得到总声压. 因为两个声源的相位相反, 需要从第一个声源产生的声压减去第二个声源产生的声压. 图 1 给出了本模型和 CCMM 计算得到的声场解, 并给出了 25 m 和 70 m 两个深度的声强随距离的变化. 可以看出, 两个模型得到的结果非常一致.

3.2 两个不同距离的声源置于理想楔形波导中

考虑图 2 所示的理想楔形问题, 这是一个二维线源问题. 波导的上边界为自由海面, 下边界为绝对软海底, 均匀水体的声速 $c_w = 1500$ m/s, 密度 $\rho_w = 1.0$ g/cm³. 楔形角度近似等于 2.86° , 两个单位强度的线源平行于楔形顶点. 将坐标原点置于海面, 该处的水深为 400 m. 第一个零相位的声源置于 0 km 距离处, 声源深度为 200 m, 第二个 π 相位的声源置于 4 km 距离处, 声源深度为 100 m, 两个声源的频率均为 25 Hz.

在数值计算中, 本模型共包含 20 号简正波, 并使用 600 个水平分段来近似斜坡. 可以通过一次求解线性系统方程得到总的声场解, 该线性系统方程包含两个声源条件 (不同的距离和深度, 相反的相位). 对于该理想楔形问题, 文献 [27] 给出了声场的解析解, 这里将其用作参考解. 在使用解析解计算声场时, 首先对于每个声源分别进行计算, 然后再得到总声压. 因为两个声源的相位相反, 需要从第一个声源产生的声压减去第二个声源产生的声压. 图 3 给出了整个水体中的声强计算结果 (图 3(a) 和 (b)), 并给出了 30 m 深度上的声强曲线 (图 3(c) 和 (d)). 从图中可以看出, 本模型的计算结果与参考解吻合非常好, 表明该模型具有很高的计算精度.

从图 3(a) 和 (b) 中可以看到明显的模式截止效应. 在本问题中, 海面和海底均为绝对软边界, 那么截止深度 $D_n = n\lambda/2$, 其中 n 为简正波号数, λ 为波长, 截止深度与简正波号数和声源频率有关. 截止距离 R_n 与截止深度相对应, 这里 $R_n = 8 - D_n/50$, 单位为 km. 两个声源均位于水体正中间, 因此只有奇数号简正波被激发, 置于 (0 km, 200 m) 的声源激发第 1,

图 1 海沟问题的声场解. 偶极子声源的频率为 25 Hz. 第一个零相位的声源置于 25 m 深度, 第二个 π 相位的声源置于 10 m 深度. (a) 本模型的计算结果; (b) CCMM 的计算结果; (c) 25 m 深度上的声强; (d) 70 m 深度上的声强. 在 (a) 和 (b) 中, 海底地形由黑色实线 标出, 在 (c) 和 (d) 中, 蓝色实线为 CCMM 的结果, 红色虚线为本模型的结果

Figure 1 Field solutions for the underwater trench problem. The frequency of the dipolar source is 25 Hz. The first source with zero phase is located at 25 m depth, and the second source with a phase of π is located at 10-m depth. (a) Intensity by the present model; (b) intensity by CCMM; (c) intensity at depth 25 m; (d) intensity at depth 70 m. In (a) and (b), a thick black line is used to exhibit the bathymetry. In (c) and (d), the CCMM solution is expressed by the solid line in blue, and the solution of the present model is expressed by the dashed line in red.

图 2 绝对软边界的理想楔形问题示意图. 波导中存在两个相位相反的声源, 一个置于 (0 km, 200 m), 另一个置于 (4 km, 100 m)

Figure 2 Geometry of the ideal wedge problem involving pressure-release boundaries. Two line sources are present, one located at (0 km, 200 m) and another located at (4 km, 100 m).

3, 5, 7, 9, 11, 13 号简正波, 置于 (4 km, 100 m) 的声源激发第 1, 3, 5 号简正波, 在图 3(a) 中奇数号简正波的截止距离用白色虚线标出. 当距离大于 7.4 km 时, 第 1 号简正波截止, 不再有能量继续向前传播. 波导中的声强起伏结构由两个声源激发的前向传播声场和后向传播声场相互干涉形成, 从图 3(c) 和 (d) 中可以看出声强在 30 m 深度上的详细结构. 在 0–4 km 范围内, 简正波号数较多, 声场的干涉结构十分复杂, 在 4–7.4 km 范围内, 简正波号数减少, 声场的干涉相对简单, 特别是 6.2–7.4 km 范围内, 只有第 1 号简正波存在.

3.3 高斯波束在向下斜坡波导中的声传播

考虑高斯波束在向下斜坡波导中的传播问题, 该

图 3 2.86° 理想楔形波导问题的声场解. 波导中两个单位强度的声源置于不同位置, 声源频率均为 25 Hz . 第一个零相位的声源置于 0 km 距离处, 深度为 200 m , 第二个 π 相位的声源置于 4 km 距离处, 深度为 100 m . (a) 本模型的计算结果; (b) 解析解的计算结果; (c) 30 m 深度上的声强 ($0\text{--}8\text{ km}$); (d) 30 m 深度上的声强 ($0\text{--}1\text{ km}$). 在 (c) 和 (d) 中, 蓝色实线为解析解的结果, 红色虚线为本模型的结果

Figure 3 Intensity results in the 2.86° ideal wedge waveguide with two sources at different locations. The frequency of these two source is 25 Hz . The first source with zero phase is placed at a range of 0 km and a depth of 200 m , and the second source with a phase of π is placed at a range of 4 km and a depth of 100 m . (a) Intensity in water calculated by the present multiple-source model; (b) by the analytical solution presented in ref. [27]; (c) intensity at 30 m depth, along the range from 0 km to 8 km ; (d) intensity at 30 m depth, along the range from 0 km to 1 km . In (c) and (d), the solid line in blue corresponds to the analytical solution, and the dashed line in red corresponds to the solution of the present model.

波导由绝对软边界 (绝对软海面 and 绝对软海底) 和均匀水体组成, 均匀水体的声速 $c_w = 1500\text{ m/s}$, 密度 $\rho_w = 1.0\text{ g/cm}^3$. 在 0 km 距离处的初始水深为 100 m , 在 2 km 水平距离上线性增加至 200 m , 向下斜坡的角度近似为 2.86° . 该算例也是一个二维线源问题. 在该问题中, 波束由一个垂直声源阵生成, 垂直阵由多个等间距分布的线源组成. 波束的方向可以通过适当调整每个声源的相位来改变, 波束的强度分布可以使用每个声源的幅度加权来选择. 这个产生波束的方法与水平分层黏弹性系统中的 SAFARI 模型 [28] 类似. 在该算例中, 使用 0 km 距离处的垂直阵产生 1000 Hz 的高斯波束, 垂直阵由 41 个间隔为 $\lambda/2$ (0.75 m) 的线源组成, 阵的中心在海面下方 50 m 处. 波束通过 (16)

式和 (22) 式中的 S_l 控制, 其形式如下:

$$S_l = \exp[i\pi(l-1)\sin\theta] \exp\left[-\left(\frac{l-(L+1)/2}{W}\right)^2\right],$$

$$l = 1, 2, \dots, L, \quad (28)$$

其中 θ 为相对于水平方向的波束角度, W 是控制波束宽度的参数, 在这里将其值取为 10.

对于该向下斜坡声传播问题, 计算中共包含 320 号简正波. 此外, 一共使用 6000 个水平分段来近似斜坡. 本模型计算得到整个水体中的声场解, 如图 4 所示, 图 4(a) 和 (b) 分别对应的波束角度为 0° 和 10° (相对于水平方向). 实际上, 很少有数值模型能够精确地

图 4 高斯波束在理想向下斜坡波导中传播问题的声场解. 垂直阵置于 0 km 距离处, 由 41 个间隔为 $\lambda/2$ 的线源组成, 阵的中心在海面下方 50 m 处. 声源频率均为 1000 Hz. (a) 波束角度相对于水平方向为 0° ; (b) 波束角度相对于水平方向为 10° . 海底地形由红色实线标出

Figure 4 Field solutions for the propagation problem of a Gaussian beam in an ideal downslope waveguide. The vertical linear array composed of 41 equidistant line sources with $\lambda/2$ distance, centered 50 m below the surface, is located at range 0 km. The frequency of each source is 1000 Hz. (a) Intensity in the water column for the beam angle of 0° relative to horizontal; (b) for the beam angle of 10° relative to horizontal. The bathymetry is indicated by a thick red line.

处理该问题. 通过模拟绝对软海底, COUPLE^[4,21] 能够得到该问题的声场解, 但需要对于每个声源单独计算声压, 然后再将其相加得到总声压. 需要说明的是, 对于这样一个高频问题, 而且如此多的声源数, COUPLE 的计算时间非常长, 是不能接受的.

3.4 讨论

本节中的三个算例均为理想波导中的声传播问题, 在求解过程中使用了本地模式和耦合矩阵的解析形式. 数值结果表明, 本模型具有很高的计算精度, 因此对于该类水平变化波导中的多声源问题, 本模型可以为其他声传播模型提供标准解. 另外, 本文提出的方法同样适用于实际问题, 即通过利用某种简正波计算模型, 如 KRAKEN^[29] 等, 计算本地简正波解和耦合矩阵, 进而求解实际波导中的声场. 除此之外, 该模型可以用于分析某些现象, 如在实际的大陆架环境中, 高斯波束入射到水平变化海底后的反射和传播, 文献 [30] 已经对水平不变环境中的这个问

题进行了研究.

4 结论

本文提出了一种处理水平变化波导中多声源问题的耦合简正波方法. 可以通过求解一个线性系统方程得到声场解, 为了处理多声源问题, 本方法在全局矩阵耦合简正波方法 (DGMCM)^[23,24] 的基础上对线性系统方程进行了修改. 修改线性系统方程所增加的计算量可以忽略不计, 因此, 当多个声源存在时, 本方法可以高效地求解水平变化波导中的声传播问题. 另外, 数值结果表明, 本模型具有非常高的计算精度, 可以在多声源问题的声场建模中为其他方法提供标准解. 本文还求解了一个高频、多声源的例子, 该类问题使用其他声传播模型求解较为困难. 接下来, 将把本文的方法应用于三维声场建模, 进而处理水平声源阵产生的波束在水平变化波导中的反向散射问题, 与文献 [31] 中的问题类似.

参考文献

- 1 Tappert F D. The parabolic approximation method. In: Wave Propagation and Underwater Acoustics. Keller J B, Papadakis J S, eds. New York: Springer, 1977. 224–287

- 2 Collis J M, Siegmann W L, Jensen F B, et al. Parabolic equation solution of seismo-acoustics problems involving variations in bathymetry and sediment thickness. *J Acoust Soc Am*, 2008, 123(1): 51–55
- 3 Pierce A D. Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium. *J Acoust Soc Am*, 1965, 37(1): 19–27
- 4 Evans R B. A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom. *J Acoust Soc Am*, 1983, 74(1): 188–195
- 5 Zhang R H, Liu H, He Y, et al. WKBZ adiabatic mode approach to sound propagation in gradually range-dependent channels (in Chinese). *Acta Acust*, 1994, 19(6): 408–417 [张仁和, 刘红, 何怡, 等. 水平缓变声道中的 WKBZ 绝热简正波理论. *声学学报*, 1994, 19(6): 408–417]
- 6 Zhang R H, He Y, Liu H, et al. Applications of the WKBZ adiabatic mode approach to sound propagation in the Philippine Sea. *J Sound Vib*, 1995, 184(3): 439–451
- 7 Gao B, Yang S E, Piao S C, et al. Method of coupled mode for long-range bottom reverberation. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2010, 53(12): 2216–2222
- 8 Wang H Z, Wang N, Gao D Z. A Hamiltonian method for finding broadband modal eigenvalues. *J Acoust Soc Am*, 2012, 131(2): 1047–1054
- 9 Collins M D, Schmidt H, Siegmann W L. An energy-conserving spectral solution. *J Acoust Soc Am*, 2000, 107(4): 1964–1966
- 10 Thompson L L. A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics. *J Acoust Soc Am*, 2006, 119(3): 1315–1330
- 11 Zampolli M, Tesei A, Jensen F B, et al. A computationally efficient finite element model with perfectly matched layers applied to scattering from axially symmetric objects. *J Acoust Soc Am*, 2007, 122(3): 1472–1485
- 12 Cornyn J J. GRASS: A digital-computer ray-tracing and transmission-loss-prediction system. Technical Report 7621, Naval Research Laboratory, Washington DC, 1973
- 13 Porter M B, Buckner H P. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. *J Acoust Soc Am*, 1987, 82(4): 1349–1359
- 14 Abawi A T, Kuperman W A, Collins M D. The coupled mode parabolic equation. *J Acoust Soc Am*, 1997, 102(1): 233–238
- 15 Peng Z H, Zhang R H. On study of the theory and algorithm of the three dimensional coupled mode-parabolic equation (in Chinese). *Acta Acust*, 2005, 30(2): 97–102 [彭朝晖, 张仁和. 三维耦合简正波-抛物方程理论及算法研究. *声学学报*, 2005, 30(2): 97–102]
- 16 Milder D M. Ray and wave invariants for SOFAR channel propagation. *J Acoust Soc Am*, 1969, 46(5): 1259–1263
- 17 Rutherford S R, Hawker K E. Consistent coupled mode theory of sound for a class of nonseparable problems. *J Acoust Soc Am*, 1981, 70(2): 554–564
- 18 Fawcett J A. A derivation of the differential equations of coupled-mode propagation. *J Acoust Soc Am*, 1992, 92(1): 290–295
- 19 Godin O A. A note on differential equations of coupled-mode propagation in fluids. *J Acoust Soc Am*, 1998, 103(1): 159–168
- 20 Athanassoulis G A, Belibassakis K A, Mitsoudis D A, et al. Coupled mode and finite element approximations of underwater sound propagation problems in general stratified environments. *J Comput Acoust*, 2008, 16(1): 83–116
- 21 Evans R B. The decoupling of stepwise coupled modes. *J Acoust Soc Am*, 1986, 80(5): 1414–1418
- 22 Porter M B, Jensen F B, Ferla C M. The problem of energy conservation in one-way models. *J Acoust Soc Am*, 1991, 89(3): 1058–1067
- 23 Luo W Y, Yang C M, Zhang R H. Generalized coupled-mode formulation for sound propagation in range-dependent waveguides. *Chin Phys Lett*, 2012, 29(1): 014302
- 24 Luo W Y, Yang C M, Qin J X, et al. A numerically stable coupled-mode formulation for acoustic propagation in range-dependent waveguides. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2012, 55(4): 572–588
- 25 Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, et al. *Computational Ocean Acoustics*. 2nd ed. New York: Springer, 2011. 338–340
- 26 Qin J X, Luo W Y, Zhang R H, et al. Numerical solution of range-dependent acoustic propagation. *Chin Phys Lett*, 2013, 30(7): 074301
- 27 Buckingham M J, Tolstoy A. An analytical solution for benchmark problem 1: The “ideal” wedge. *J Acoust Soc Am*, 1990, 87(4): 1511–1513
- 28 Schmidt H, Jensen F B. A full wave solution for propagation in multilayered viscoelastic media with application to Gaussian beam reflection at fluid-solid interfaces. *J Acoust Soc Am*, 1985, 77(3): 813–825
- 29 Porter M B. The KRAKEN normal mode program. Technical Report SM-245, SACLANT Undersea Research Centre, La Spezia, 1991
- 30 Jensen F B, Schmidt H. Subcritical penetration of narrow Gaussian beams into sediments. *J Acoust Soc Am*, 1987, 82(2): 574–579
- 31 Orris G J, Collins M D. The spectral parabolic equation and three-dimensional backscattering. *J Acoust Soc Am*, 1994, 96(3): 1725–1731

A coupled-mode method for sound propagation with multiple sources in range-dependent waveguides

QIN JiXing^{1*}, LUO WenYu¹, ZHANG RenHe¹ & YANG ChunMei²

¹ State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

² Key Laboratory of Marine Science and Numerical Modeling, the First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Qingdao 266061, China

An accurate and efficient coupled-mode method for multiple-source problems is presented. In order to treat multiple-source problems, we modify the linear system of equations based on the theory of a range-dependent propagation model recently developed by Luo et al. The additional computational effort caused by the modification is negligible, and thus field solutions can be obtained efficiently by solving the modified linear system of equations in the presence of multiple sources. Numerical results indicate that the present model is remarkably accurate, and capable of dealing with multiple-source problems which cannot be treated efficiently by existing models. This model can serve as benchmark in range-dependent propagation modeling for multiple-source problems, and can also be applied in three-dimensional modeling to treat realistic propagation and backscattering problems of a beam generated by a source array.

coupled-mode theory, multiple sources, range-dependent waveguide, direct global matrix approach

PACS: 43.30.Bp, 43.30.Gv, 43.20.Fn

doi: 10.1360/SSPMA2014-00321