论文

三维裂纹端部应力场的三参数描述及等效厚度概念

余崇民*, 赵军华, 于培师, 郭万林*

南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016

*联系人: 余崇民, E-mail: cmshe@nuaa.edu.cn; 郭万林, E-mail: wlguo@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2013-01-05; 接受日期: 2013-06-07

中央高校基本科研业务费专项基金(编号: NS2012126)、航空科学基金(编号: 2010ZA52005)和国家自然科学基金项目(批准号: 50805079)资助

摘要 传统的二维断裂理论忽略了各种断裂参数的三维厚度效应, 将其应用到三维结构的损伤容限设计及评定中具有明显的局限性. 另一方面, 工程中存在的裂纹通常具有复杂的形状, 并且无法直接考虑其对应的厚度. 因此, 工程中通常采用最保守的平面应变断裂韧性或固定的裂纹扩展速率曲线来描述裂纹的扩展和断裂, 这无疑会带来巨大的误差. 事实上, 在含裂纹的三维结构中, 裂尖局部场总是呈现出复杂的三维应力状态, 而裂尖复杂的三维应力场对结构的强度起着至关重要的作用. 对裂尖三维应力场进行研究、发展三维断裂理论将是解决实际工程问题的必然路径. 本文介绍了近年来本研究组有关裂尖场描述体系从二维到三维, 从单参数到多参数体系, 从线弹性体系到弹塑性以及蠕变理论体系的发展, 重点介绍了有关裂尖场三维三参数描述体系的研究进展和基于裂尖三维应力场和约束等效原则发展起来的裂纹的等效厚度概念及其工程应用情况.

关键词 应力场, 等效厚度, 三维断裂, 疲劳寿命, 裂纹

PACS: 46.50.+a, 46.35.+z, 46.25.Cc, 46.25.-y, 46.05.+b

doi: 10.1360/132013-16

断裂力学已经发展了数十年, 其有效性得到了工程应用的证实. 然而, 一些必要且基础的问题仍然没有得到很好的解决. 二维断裂理论的局限性仍然无法跨越从实验室标准试件到实际复杂三维工程结构的应用. 在含裂纹的三维结构中, 裂尖局部场总是呈复杂的三维应力状态, 裂尖复杂的三维应力场对含裂纹结构的强度起着至关重要的作用^[1,2]. 实验表

明, 采用基于二维理论发展起来的断裂以及疲劳寿命预测方法对实际三维结构进行评估将会导致不精确的预测结果^[3,4]. 因此, 系统地研究裂尖三维应力场, 发展三维断裂理论体系是相当重要和必要的.

自 Irwin^[5,6]提出应力强度因子 K 以后, 裂尖场的描述体系便经历了从线弹性体系到弹塑性、蠕变理论体系, 从单参数体系到三参数体系以及从二维体系

引用格式: 余崇民, 赵军华, 于培师, 等. 三维裂纹端部应力场的三参数描述及等效厚度概念. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 55–67

She C M, Zhao J H, Yu P S, et al. Three-parameter descriptions for the three-dimensional stress field near the crack front and a concept of equivalent thickness (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2014, 44: 55–67, doi: 10.1360/132013-16

到三维体系的发展^[7], 其发展路线如图 1 所示.

结合面内约束理论体系(K - T , J - Q , C - Q)和离面约束理论体系(K - T_z , J - T_z , C - T_z), 可以建立起三维三参数约束理论体系(K - T - T_z , J - Q - T_z , C - Q^* - T_z). 大量研究^[20-23]表明, 断裂韧性和裂纹扩展速率的厚度效应本质上是三维约束效应的表现, 为了研究裂尖三维约束效应, Guo^[20-23]定义离面应力约束因子 T_z 为

$$T_z = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{11} + \sigma_{22}}. \quad (1)$$

其中下标 1, 2, 3 分别代表局部直角坐标系下的 x, y, z 或局部柱坐标系下的 r, θ, z , 其中 z 轴与裂纹前沿线相切(如图 2 所示); σ_{11} 和 σ_{22} 为与裂纹前沿线法平面内的正应力分量^[21]. 平面应力状态下 $T_z=0$; 平面应变状态下, 对于线弹性情况 $T_z=\nu$, ν 为弹性泊松比, 对于理想弹塑性情况 $T_z=0.5$. 在此基础上, 裂尖附近的三维应力约束可以由 T_z 准确描述.

本文重点介绍本研究组有关三维裂尖场三参数描述体系的研究进展以及基于约束等效原则的裂尖等效厚度理论的发展.

1 裂尖场三参数描述体系

1.1 K - T - T_z 三参数描述

在 Irwin 提出应力强度因子 K 的概念以后,

Williams^[11]于 1957 年给出了各向同性线弹性材料中平面裂纹端部场的 K - T 双参数解, 对于三维裂纹, Guo^[1]在 K - T 解的基础上引入离面应力约束因子 T_z 发展了可以完整描述裂纹端部场的 K - T - T_z 三参数理论体系, 即

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{ij} \delta_{1j}, \\ \sigma_{zz} = T_z (\sigma_{ii} + \sigma_{jj}). \end{cases} \quad (2)$$

(i, j) = (x, y), (r, θ) or ($1, 2$).

其中

$$f_{11}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (3)$$

$$f_{22}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (4)$$

$$\tau_{12}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}. \quad (5)$$

T 表示 T 应力, K 为应力强度因子, 该解可以很好地描述二维裂纹端部场. 图 2 为裂尖坐标系示意图.

下面针对结构中典型的几种裂纹(穿透直裂纹、半椭圆表面裂纹、四分之一椭圆角裂纹和椭圆内埋裂纹)来讨论 K - T - T_z 三参数描述体系.

图 3, 图 4 分别给出了四分之一椭圆角裂纹的几何示意图和有限元网格图, 有限元模型中裂尖采用四分之一节点奇异单元. 改变边界约束条件, 该模型

图 1 裂尖应力场描述

Figure 1 Description for the fracture theories from 2D to 3D crack-tip field.

图 2 裂纹前沿局部坐标系

Figure 2 The local coordinate system at crack front.

图 3 四分之一椭圆角裂纹示意图

Figure 3 Schematic illustration of the quarter elliptic corner crack.

图 4 四分之一椭圆角裂纹有限元模型

Figure 4 Typical FE mesh of the symmetrical half plate containing a quarter elliptic corner crack. (a) The whole 1/2 model, (b) a magnification of the selected part of (a), (c) the cylindrical mesh of the crack tip with singularity elements, (d) a magnification of selected part of (c), (e) the illustration of a 20-nodes collapsed singularity element.

可以对半椭圆表面裂纹和中心椭圆内埋裂纹进行分析. 图 5 给出了 K - T - T_z 三参数解与有限元分析结果的比较^[26-29].

从以上数据可以看出, 采用 K - T - T_z 三参数解能更好地描述裂尖应力分布. 其中面内应力 σ_{22} 独立于 T 应力和 T_z 约束, 但若不考虑 T 应力, 面内应力 σ_{11} 与实际计算值差距较大; 若不考虑离面约束 T_z , 平面应变状态下的 σ_{33} 与实际的三维计算结果之间的差距也较大.

1.2 J - Q - T_z 三参数描述

在 HRR^[8,9]解中, 各应力表达式可表示为

$$(\sigma_{ij}, \sigma_m, \sigma_e) = Kr^{-\frac{1}{n+1}} (\tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \tilde{\sigma}_m(\theta), \tilde{\sigma}_e(\theta)). \quad (6)$$

其中

$$K = \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I(n)} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (7)$$

式中 σ_0 为屈服应力.

Guo^[20,21]的进一步研究表明, I 不仅是 n 的函数, 同时也是 T_z 的函数, 即

$$K = \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I(n, T_z)} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (8)$$

式中

$$I(n, T_z) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_e^{n+1} \cos \theta - \sin \theta \left[\tilde{\sigma}_{rr} \left(\tilde{u}_\theta - \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} \right) - \tilde{\sigma}_{r\theta} \left(\tilde{u}_r + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - \cos \theta [n(s-2)+1] (\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_{r\theta} \tilde{u}_\theta) \right\} d\theta. \quad (9)$$

其中

$$\tilde{u}_r = \frac{\tilde{\sigma}_e^{n-1}}{n(s-2)+1} \left(d_1 \tilde{\Phi} + d_2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} \right), \quad (10)$$

$$\tilde{u}_\theta = \frac{1}{n(s-2)} \left(2d_s \tilde{\sigma}_e^{n-1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} = \frac{1}{n(s-2)+1} \left[\frac{\partial (\tilde{\sigma}_e^{n-1})}{\partial \theta} \left(d_1 \tilde{\Phi} + d_2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} \right) + \tilde{\sigma}_e^{n-1} \left(d_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} + d_2 \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^3} \right) \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} = \tilde{\sigma}_e^{n-1} \left(d_3 \tilde{\Phi} + d_4 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} \right) - \tilde{u}_r. \quad (13)$$

式中 d_i 为 T_z 和 n 的函数, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\Phi)$ 与 HRR 解中的

 图5 (网络版彩图) 裂尖应力分量角分布及 K - T - T_z 三维三参数描述

(a) 穿透直裂纹, (b) 半椭圆表面裂纹, (c) 四分之一椭圆角裂纹, (d) 中心椭圆内埋裂纹

Figure 5 (Color online) The angular distributions of stress components and the three-dimensional three-parameter K - T - T_z characterization of the crack-tip fields. (a) Through-the-thickness crack, (b) semi-elliptic surface crack, (c) quarter elliptic corner crack, (d) embedded center-elliptical crack.

相同。

考虑到结构的几何形状和尺寸对裂尖约束的影响, O'Dowd 和 Shih^[12,13]发展了 J - Q 双参数解来描述裂尖应力场, 即

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I(n, r)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) + Q_{ij} \delta_{ij} \left(\frac{r}{J/\sigma_0} \right)^{\lambda} \sigma_0. \quad (14)$$

式中的第一项为 HRR 解 ($|\theta| < \pi/2$), Q 为裂纹前沿三轴应力的函数, λ 取 0 时 $Q_{rr} = Q_{\theta\theta}$, Q_{ij} 可以表示为

$$Q_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ij}|_{\text{HRR}}}{\sigma_0}, \quad \theta=0^\circ \text{ 且 } r=2J/\sigma_0. \quad (15)$$

随后 Guo 和 Zhao 在小范围屈服基础上进一步研究了大范围屈服条件下平面应变裂纹尖端三维应力场, 发现在这两种屈服条件下, 一些重要的应力参数 (如: 等效应力 σ_e , 静水压力 σ_m 及三轴应力参数 R_θ) 都不能被 J - Q 双参数解很好地描述, 必须采用 J - Q - T_z 三参数才能准确描述裂纹端部的弹塑性应力场。因

此 Guo 在式(14)的基础上进行了修正

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I(n, T_z) r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, T_z) + Q_{Tij} \delta_{ij} \sigma_0. \quad (16)$$

式中

$$Q_{Tij} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ij}|_{J-T_z}}{\sigma_0}, \quad \theta=0^\circ \text{ 且 } r=2J/\sigma_0. \quad (17)$$

将式(15)带入式(17)可得

$$Q_{Tij} = Q + \frac{\sigma_{ij}|_{\text{HRR}} - \sigma_{ij}|_{J-T_z}}{\sigma_0}. \quad (18)$$

λ 取 0 时 $Q_{Trr} = Q_{T\theta\theta}$, 则有

$$Q_T = Q + \frac{\sigma_{ij}|_{\text{HRR}} - \sigma_{ij}|_{J-T_z}}{\sigma_0}. \quad (19)$$

图 6 给出了 J - Q - T_z 三参数解、 J - Q 解、HRR 解与有限元计算结果的比较^[26,30,31], 从图中可以明显地看出 J - Q - T_z 三参数解与三维有限元计算结果吻合得很好。

图 6 (网络版彩图)应力沿径向分布的理论预测结果与有限元结果对比

(a) 半椭圆表面裂纹, (b) 四分之一椭圆角裂纹, (c) 中心内埋椭圆裂纹

Figure 6 (Color online) Comparisons of theoretical results with FE results for the stress components. (a) Semi-elliptic surface crack, (b) quarter elliptic corner crack, (c) embedded center-elliptical crack.

1.3 $C\text{-}Q^*\text{-}T_z$ 三参数描述

与 $J\text{-}Q\text{-}T_z$ 三参数解类似, Xiang 等人^[24,25]针对蠕变断裂问题发展了 $C\text{-}Q^*\text{-}T_z$ 三参数解,

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{C(t)}{\sigma_0 \dot{\epsilon}_0 I(n, T_z) r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, T_z) + Q^* \delta_{ij} \sigma_0. \quad (20)$$

其中

$$Q^* = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ij}|_{C(t)=T_z}}{\sigma_0}, \quad \theta=0^\circ \text{ 且 } r=\Lambda. \quad (21)$$

$$\Lambda = \begin{cases} r\sigma_0 / [C(t)t(n+1)^{(n+1)/n} \tilde{t}^{1/n}], & \text{(小尺度蠕变)} \\ r\sigma_0 / (C^* \tilde{t}^{1/n}), & \text{(大范围蠕变)} \\ r\sigma_0 / [C^* t_r (n+1)^{(n+1)/n} \tilde{t}^{1/n} + C^* \tilde{t}^{1/n}], & \text{(渡期)} \end{cases} \quad (22)$$

图 7 给出了 $C(t)\text{-}T_z\text{-}Q^*$ 三参数描述与 $C(t)\text{-}T_z$ 双参数描述的比较, 显然, 三参数描述方法能更加准确地描述蠕变裂尖场。

2 裂尖等效厚度研究

在结构的断裂评估和疲劳裂纹扩展分析中, 应用最广的 K_C 断裂判据和裂纹扩展速率 Paris 公式 $da/dN=C(\Delta K)^n$ 都是基于 Irwin 建立的应力强度因子的概念. 从概念上看, 基于应力强度因子的断裂评估和裂纹扩展寿命预测是方便的. 随着数值分析技术特别是有限元技术的发展, 目前对于复杂结构的三维裂纹, 已经能够很方便地得到裂纹前沿应力强度因子 K 的精确值, 将得到的 K 值代入对应材料的断裂判据和裂纹扩展速率曲线, 便能够对结构的剩余强度和剩余寿命进行评估. 然而, 在实际操作中, 材料的断裂韧性 K_C 和 Paris 公式中 C 和 n 都不是常数, 对于含穿透直裂纹的平板结构, 其断裂韧性和裂纹扩展速率与板的厚度密切相关. 如图 8 所示, K_C 在很大范围内随厚度增加而降低, 裂纹扩展速率随厚度增加而增加. 对于给定厚度的含穿透直裂纹的平板结构, 选取合适的 K_C 和 Paris 公式中 C 和 n 是保证预测结果准确的前提条件. 为了得到各种厚度下的 K_C , C , n 等参数, 人们不得不进行大量的试验. 即使得到了各种厚度下的材料数据, 在面对实际工程问题时, 仍然显得力不从心. 工程中大量存在的裂纹往往都是非穿透的曲线裂纹, 对于这类裂纹, K_C , C 和 n 均无法根据厚度选取. 因此, 当前不得不采用最保守的平面应变断裂韧性 K_{IC} 来评估断裂, 采用固定的 C 和 n 来描

 图 7 $C(t)-T_z-Q^*$ 三参数解与 $C(t)-T_z$ 双参数解的比较^[24]

(a) 中心裂纹, (b) 单边裂纹

Figure 7 Comparison of results obtained by $C(t)-T_z-Q^*$ description and $C(t)-T_z$ description for (a) centre-cracked tension specimens and (b) single-edge cracked specimens.

图 8 材料属性的厚度效应

 (a) 断裂韧性 $K_{IC}^{[32]}$ 和(b) 裂纹扩展速率 $da/dN \sim \Delta K^{[33]}$ 随厚度变化

Figure 8 The thickness effect of material properties. (a) Fracture toughness $K_{IC}^{[32]}$, (b) crack growth rate $da/dN \sim \Delta K^{[33]}$.

述裂纹扩展, 这无疑会带来巨大的误差。

为了将基于穿透直裂纹试件得到的材料断裂韧性和疲劳裂纹扩展数据准确应用于工程中广泛存在的非穿透曲线裂纹结构, 我们发展了等效厚度概念. 此概念基于约束等效原则, 将曲线裂纹前沿线上的一点与某一厚度的穿透直裂纹板建立一种等价关系, 进而可以将基于穿透直裂纹板得到的材料数据合理地应用于曲线裂纹, 将有利于解决曲线裂纹的剩余强度评估、裂纹张开应力计算和裂纹扩展寿命预测等关键问题. 这一概念的建立与完善为如何将实验室中标准试件得到的材料数据合理地应用于实际复杂裂纹结构奠定了理论基础。

2.1 基于穿透直裂纹的等效厚度概念

对于远端承受单向拉伸的无限大中心裂纹板(如图 9), 在裂尖附近总是存在一个三维应力约束区, 该区域大小约为厚度的二分之一, 即 $B/2$. 在三维约束区外, 即当 $r > B/2$ 时, 近似为平面应力状态, $T_z = 0$. 在中面上, 随着 r 从 0 增加到 $0.5B$, T_z 由 ν 单调下降为 0. 若以无量纲距离 r/B 为横坐标, T_z 为纵坐标, 则发现 T_z 的变化曲线在不同厚度的板中都趋于一致, 即 $T_z \sim r/B$ 曲线与 B 无关。

为了将基于标准结构得到的材料数据准确应用于实际工程结构的评估, Wang 等人^[34]和 Guo 等人^[32]引入一个等效厚度的概念 B_{eq} , 并将其应用于角裂纹

图 9 承受远端单向拉伸载荷的无限大中心裂纹板

(a) 正视图; (b) 俯视图; (c) T_z 沿裂纹前沿线垂直方向分布示意图;
(d) T_z 沿裂纹前沿线垂直方向随无量纲距离 r/B 分布的归一化

Figure 9 Illustration of a crack in an infinite plate subjected to far-end tensile loading. (a) The front view of the crack, (b) the top view of the crack plane, (c) illustration of T_z distribution against the distance to crack front line, (d) independence of T_z distribution against the thickness normalized distance to the crack front line.

剩余强度评估和表面疲劳裂纹扩展预测^[32,34,35]. 最初的 B_{eq} 被经验地定义为裂纹前沿线的切线与结构表面的交点与切点的最短距离的两倍, 如图 10 所示. 后来, 对于含有穿透直裂纹的平板, She 等人^[36]研究了三维约束从板的中心面到表面的变化, 并基于约束等效的原则, 提出了一种基于离面应力约束因子 T_z 的等效厚度的定义, 如图 11 所示. 对于厚度为 B_{eq} 的

穿透直裂纹(如图 11(b)), 中面上 T_z 沿着 r 方向的分布($z=0, \theta=0$)可以通过以下公式进行描述^[36]:

$$T_z = \nu \cdot \exp\left(-8\left(r/B_{eq}\right)^{1.5} - 1.6\left(r/B_{eq}\right)^{0.5}\right). \quad (23)$$

其中 ν 是泊松比. 另外, 考察穿透直裂纹线上某一点 P(如图 11(a)). 若 T_z 在 P 点沿 r 方向的分布与厚度为 B_{eq} 的穿透直裂纹板中面上 T_z 沿着 r 方向的分布相一致, 则将该穿透直裂纹板的厚度 B_{eq} 定义为 P 点的等效厚度. 经过分析 P 点处于不同位置时 T_z 沿着 r 方向的分布的结果, 穿透直裂纹板裂纹前沿线上任意一点的等效厚度可以定义为

$$B_{eq} = B \left[1 - (2z/B)^2 \right]. \quad (24)$$

其中 z 是 P 到中面的距离. 在此基础上, 图 11(a)中 P 点处的断裂韧性可以认为与图 11(b)中 P' 处的断裂韧性 K_C 相同, 而 K_C 即为厚度为 B_{eq} 的中心裂纹板的断裂韧性.

2.2 各种典型裂纹的等效厚度

对于各种典型三维裂纹的 T_z 分布已有大量详细的研究^[27-29,37-39]. 从已有结果中可以发现, T_z 可以用一个通用的函数关系来表达, 即

$$T_z = \nu \cdot f(r, \theta, z, B, t, \dots), \quad (25)$$

图 10 (a) 角裂纹、(b) 表面裂纹和(c) 内埋裂纹的等效厚度的经验定义: $B_{eq}=2\min\{B_1, B_2\}$

Figure 10 The empirical definition of the equivalent thickness. (a) Corner crack, (b) surface crack, (c) embedded crack.

图 11 (a) 基于 T_z 的穿透直裂纹上某一点 P 的等效厚度定义示意图; (b) 以 P 点的等效厚度 B_{eq} 为厚度的中心裂纹板

Figure 11 (a) Schematic illustration of the definition of equivalent thickness B_{eq} at a point P on the through-the-thickness crack front line, (b) a virtual through-the-thickness cracked plate with thickness of B_{eq} .

其中 (r, θ, z) 为裂尖的局部极坐标, B 是板的厚度, t 是裂纹前沿线的形状因子. 对于小范围屈服的三维弹塑性 T_z 分布, 只需将公式(25) 中的 ν 替换为弹塑性泊松比 ν_{eq} 即可得到^[27-29]. 在裂纹前沿线的法平面内, T_z 在 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 范围内几乎不随 θ 变化而变化^[37-39]. 另外, 分析对比可以发现, 各种不同形状裂纹的 T_z 分布与不同厚度的穿透直裂纹板具有高度的一致性. 基于这一点, 曲线裂纹上某一点 P 处的等效厚度可以由具有相同 T_z 分布的穿透直裂纹板的厚度来确定, 如图 12 所示.

图 13-16 分别给出了穿透直裂纹^[36](图 13)、四分之一椭圆角裂纹^[40](图 14), 半椭圆表面裂纹^[41](图 15) 以及内埋裂纹^[42](图 16) 的等效厚度研究结果, 其中 t 为椭圆形状比($t=a/c$). 下面分别给出各种裂纹的裂纹前沿线上某点的等效厚度 B_{eq} .

四分之一椭圆角裂纹:

$$B_{eq} = B_{eq0} [1 - \varphi_u^{4t}], \quad (26)$$

半椭圆表面裂纹:

$$B_{eq} = B_{eq0} [1 - \varphi_u^{6t}], \quad (30)$$

$$B_{eq0} = c, \quad (31)$$

$$\varphi_u = \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0}, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad (32)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (33)$$

椭圆内埋裂纹:

图 12 等效厚度定义示意图: 各种典型裂纹前沿线上 P 点处的等效厚度 B_{eq}

(a) 穿透直裂纹, (b) 1/4 椭圆角裂纹, (c) 椭圆内埋裂纹, (d) 半椭圆表面裂纹, (e) T_z 在 P 点处的法平面内沿 r 方向分布与其在某一假想的厚度为 B_{eq} 的穿透直裂纹板的中面上 P' 点处的法平面内沿 r 方向分布, (f) 虚拟的厚度为 B_{eq} 的穿透直裂纹

Figure 12 Schematic illustration of the definition of equivalent thickness: the equivalent thickness B_{eq} at a point of P on various typical crack front line. (a) A through-the-thickness crack, (b) a quarter elliptic corner crack, (c) a embedded elliptic crack, (d) semi-elliptic surface crack, (e) the distribution of T_z in the normal plane of point P or P' , (f) a virtual through-the-thickness cracked plate with thickness of B_{eq} .

图 13 (网络版彩图)穿透直裂纹

(a) 未采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布, (b) 采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布**Figure 13** (Color online) The distributions of T_z along r direction for a through-the-thickness crack, the r is normalized by (a) the thickness B or (b) the equivalent thickness B_{eq} .

图 14 (网络版彩图)四分之一椭圆角裂纹

(a) 未采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布, (b) 采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布**Figure 14** (Color online) The distributions of T_z along r direction for a quarter elliptic corner crack, the r is normalized by (a) the elliptical major axis c or (b) the equivalent thickness B_{eq} .

图 15 (网络版彩图)半椭圆表面裂纹

(a) 未采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布, (b) 采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布**Figure 15** (Color online) The distributions of T_z along r direction for a semi-elliptic surface crack, the r is normalized by (a) the elliptical major axis c or (b) the equivalent thickness B_{eq} .

图 16 (网络版彩图)椭圆内埋裂纹

(a) 未采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布, (b) 采用等效厚度 B_{eq} 时的 T_z 分布**Figure 16** (Color online) The distributions of T_z along r direction for a embedded elliptic crack, the r is normalized by (a) the elliptical major axis c or (b) the equivalent thickness B_{eq} .

$$B_{eq} = B_{eq0} \left[t^{1.5} + (1-t)^2 \varphi \right], \quad (34)$$

$$B_{eq0} = (3 - 2.3t)a. \quad (35)$$

2.3 基于等效厚度的断裂评估

等效厚度概念的提出为准确评估非穿透曲线裂纹结构奠定了理论基础. 这里将等效厚度概念应用于角裂纹试件的断裂评估, 以验证其有效性. 选取 Pitt 等人^[43]报导的对边角裂纹结构(图 17)进行评估. 文献[43]对三种不同尺寸的裂纹结构($a=3.75$ mm, $c=12$ mm; $a=4.375$ mm, $c=14$ mm; $a=5$ mm, $c=16$ mm)进行了拉伸破坏试验, 每一种尺寸有三个试件. 所有的试验件都是从 50 mm 厚的铝合金 A7-U4SG (2214) 板件中沿着 L-T 方向切割得到的. 材料的屈服应力 $\sigma_0 = 390$ MPa, 杨氏模量 $E=70$ GPa, 泊松比 $\nu=0.33$. 利用厚度为 55 mm 的标准试验件测定的平面应变断裂韧性 $K_{IC}=31.9$ MPa·m^{0.5}, 试验中测得的破坏时远端拉伸载荷在表 1 中列出.

图 18 给出了裂纹前沿应力强度因子的分布情况, 并与 K_{IC} 进行了比较. 分析模型采用与图 4 类似的有限元模型^[40,42]. 从图中可知, 当结构发生断裂时, 所有 9 个试验件裂纹前沿应力强度因子 K_I 的最大值均出现在裂纹前沿短轴方向的自由面附近, 并且全部显著大于材料平面应变断裂韧性 K_{IC} , 两者之差为 $(K_{I,max}-K_{IC})/K_{IC} = 23\%-46\%$. 因此, 若不考虑裂纹前沿各点的等效厚度而直接采用平面应变断裂韧性 K_{IC} 进行判断, 在此种情况下将无法给出准确的预测结果.

图 17 对边角裂纹试件几何结构和裂纹形貌示意图

Figure 17 Schematic view and dimensions of the test specimen with double corner cracks.表 1 实验中测得的破坏载荷^[43]**Table 1** Experimental failure stresses^[43]

试件编号	$2c/W$	破坏载荷 (MPa)
1-1	0.6	380.8
1-2		381.6
1-3		350.6
2-1	0.7	360.4
2-2		348.1
2-3		335.7
3-1	0.8	322.0
3-2		314.2
3-3		294.4

下面将裂尖的等效厚度引入断裂判据, 采用如下考虑了三维厚度效应的断裂判据对该问题进行分析:

$$K_{Iz} = K_{ZC}, \quad (36)$$

$$K_{Iz,i} = K_{I,i} \sqrt{f(\bar{T}_z(B_{eq,i}))}, \quad (37)$$

图 18 (网络版彩图) 结构破坏时应力强度因子 K_I 沿裂纹前沿的分布以及与平面应变断裂韧性 K_{IC} 的比较

Figure 18 (Color online) Calculated stress intensity factors along the crack front at experimental failure stresses.

$$f(\bar{T}_z) = \frac{2}{3}(1+\nu) + \frac{4}{3}(1-2\nu) \left(\frac{1+\bar{T}_z}{1-2\bar{T}_z} \right)^2, \quad (38)$$

$$\bar{T}_z(B_{eq,i}) = \frac{1}{B_{eq,i} \bar{r}_p} \int_0^{\bar{r}_p} \int_0^{B_{eq,i}} T_z dz dr. \quad (39)$$

式中 i 表示裂纹前沿的一点, $K_{I,i}$ 表示该点的应力强度因子, $B_{eq,i}$ 表示该点的等效厚度, K_{Iz} , $K_{Iz,i}$ 和 K_{ZC} 分别表示考虑了厚度效应后的应力强度因子以及断裂韧性^[23].

图 19 给出了结构破坏时的三维应力强度因子 K_{Iz} 沿裂纹前沿的分布以及与三维断裂韧性 K_{ZC} 的比较. 从图中可以看出, 对于全部 9 个试验件, 三维应力强度因子的最大值出现在裂纹内部方向角接近 $\pi/4$ 的位置, 与 K_{ZC} 之差均在 7% 以内, 误差远远比未采用等效厚度的预测小. 显然, 由此进行的裂纹疲劳扩展模拟^[41]也将比未采用等效厚度的模拟结果理想. 因此, 基于等效厚度的断裂和疲劳分析为工程中广

图 19 (网络版彩图) 结构破坏时三维应力强度因子 K_{Iz} 沿裂纹前沿的分布以及与三维断裂韧性 K_{ZC} 的比较

Figure 19 (Color online) Calculated 3D stress intensity factors K_{Iz} along the crack front at failure stresses base on the equivalent thickness.

泛存在的非穿透曲线裂纹结构的断裂和疲劳寿命评估提供了比二维理论更为有效的途径.

3 结论

(1) 无论是对线弹性裂尖场, 还是弹塑性裂尖场以及蠕变裂尖场, 考虑了离面应力约束因子 T_z 和相应的面内约束因子以后获得的三维多参数解($K-T-T_z$, $J-Q_T-T_z$, $C-Q^*-T_z$)均能够对三维裂尖场进行更加理想的描述.

(2) 在充分研究裂尖三维应力场和应力约束的基础上, 基于约束等效原则发展起来的等效厚度 B_{eq} 能够比较理想地描述各种裂纹的等效厚度, 在断裂评估和疲劳寿命预测上的应用表明了等效厚度的有效性. 等效厚度概念的建立为如何将实验室中基于标准试件得到的材料数据合理地应用于实际复杂裂纹结构奠定了理论基础.

参考文献

- Guo W. Recent advances in three-dimensional fracture mechanics. Key Eng Mater, 2000, 183, 193–198
- Clatterbuck D M, Chrzan D C, Morris Jr J W. The influence of triaxial stress on the ideal tensile strength of iron. Scripta Mater, 2003, 49: 1007–1011
- Bellet D, Taylor D, Marco S, et al. The fatigue behaviour of three-dimensional stress concentrations. Int J Fatigue, 2005, 27: 207–221
- Bellet D, Taylor D. The effect of crack shape on the fatigue limit of three-dimensional stress concentrations. Int J Fatigue, 2006, 28: 114–123
- Irwin G R. Fracture dynamics. In: Fracturing of Metals Seminar. Chicago: American Society for Metals, 1948. 147–166

- 6 Irwin G R. Fracture. Handbuch der Phys, 1958, 6: 551–590
- 7 She C, Guo W. The out-of-plane constraint of mixed-mode cracks in thin elastic plates. *Int J Solids Struct*, 2007, 44(9): 3021–3034
- 8 Hutchinson J W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. *J Mech Phys Solids*, 1968, 16: 13–31
- 9 Rice J R, Rosengren G F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J Mech Phys Solids*, 1968, 16: 1–12
- 10 Riedel H, Rice J. Tensile cracks in creeping solids, *Fracture Mechanics: Twelfth Conference*. ASTM STP, 1980(700): 112–130
- 11 Williams M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech*, 1957, 24: 109–114
- 12 O'Dowd N P, Shih C F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-I. Structure of fields. *J Mech Phys Solids*, 1991, 39: 989–1015
- 13 O'Dowd N P, Shih C F. Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-II. Fracture applications. *J Mech Phys Solids*, 1992, 40: 939–963
- 14 Li Y C, Wang Z Q. High-order asymptotic field of tensile plane-strain nonlinear crack problems. *Sci China Math*, 1986, 29: 941–955
- 15 Chao Y J, Yang S, Sutton M A. On the fracture of solids characterized by one or two parameters: theory and practice. *J Mech Phys Solids*, 1994, 42: 629–647
- 16 Betegon C, Hancock J W. Two-parameter characterization of elastic-plastic crack tip fields. *J Appl Mech*, 1991, 58: 104–113
- 17 Budden P J, Ainsworth R A. The effect of constraint on creep fracture assessments. *Int J Fract*, 1997(87): 139–149
- 18 Nguyen B, Onck P, van der Giessen E. Crack-tip constraint effects on creep fracture. *Eng Fract Mech*, 2000(65): 467–490
- 19 Nguyen B, Onck P, van Der Giessen E. On higher-order crack-tip fields in creeping solids. *J Appl Mech*. 2000(67): 372–382
- 20 Guo W. Elastoplastic three-dimensional crack border field-I. Singular structure of the field. *Eng Fract Mech*, 1993, 46: 93–104
- 21 Guo W. Elastoplastic three-dimensional crack border field-II. Asymptotic solution for the field. *Eng Fract Mech*, 1993, 46: 105–113
- 22 Guo W. Elastoplastic three-dimensional crack border field-III. Fracture parameters. *Eng Fract Mech*, 1995, 51: 51–71
- 23 郭万林. 三维断裂和疲劳裂纹扩展. 博士学位论文. 西安: 西北工业大学, 1991
- 24 Xiang M, Yu Z, Guo W. Characterization of three-dimensional crack border fields in creeping solids. *Int J Solids Struct*, 2011, 48: 2695–2705
- 25 Xiang M, Guo W. Formulation of the stress fields in power law solids ahead of three-dimensional tensile cracks. *Int J Solids Struct*, 2013, 50: 3067–3088
- 26 赵军华. 宏观结构的三参数三维断裂研究. 博士学位论文. 南京: 南京航空航天大学, 2008
- 27 Zhao J, Guo W, She C. The in-plane and out-of-plane stress constraint factors and $K-T-T_z$ description of stress field near the border of a semi-elliptical surface crack. *Int J Fatigue*, 2007, 29(3): 435–443
- 28 Zhao J, Guo W, She C. Three-parameter description of stress field near the border of an embedded elliptical crack. *Acta Mech*, 2007, 190: 29–44
- 29 Zhao J, Guo W, She C. The in-plane and out-of-plane stress constraint factors and $K-T-T_z$ description of stress field near the border of a quarter-elliptical corner crack. *Fatigue Fracture Eng Mater Struct*, 2007, 30(8): 673–681
- 30 Zhao J, Guo W, She C. Three-parameter approach for elastic-plastic fracture of the semi-elliptical surface crack under tension. *Int J Mech Sci*, 2008, 50: 1168–1182
- 31 Zhao J. Three-parameter approach for elastic-plastic stress field of an embedded elliptical crack. *Eng Fract Mech*, 2009, 76: 2429–2444
- 32 Guo W, Yu P. Three dimensional fracture and fatigue mechanics of structures and its application in aeronautical engineering (in Chinese). *Chin J Solid Mech*, 2010, 31(5): 553–571 [郭万林, 于培师. 构件三维断裂与疲劳力学及其在航空工程中的应用. *固体力学学报*, 2010, 31(5): 553–571]
- 33 Wu X. Handbook of Mechanical Properties of Aircraft Structural Metals. Beijing: Aviation Industry Press, 1997. 157–162
- 34 Wang S, Wang J, Guo W, et al. Surface crack calculations by equivalent thickness concepts. *Int J Fracture*, 1996, 82: 67–70
- 35 Shen H, Guo W. 3D constraint effect on 3D fatigue crack propagation. *Int J Fatigue*, 2005, 27: 617–623
- 36 She C, Zhao J, Guo W. Three-dimensional stress fields near notches and cracks. *Int J Fracture*, 2008, 151: 151–160
- 37 Zhang B, Guo W. T_z constraints of semi-elliptical surface cracks in elastic plates subjected to uniform tension loading. *Int J Fracture*, 2005, 131: 173–187
- 38 She C, Guo W. The out-of-plane constraint of mixed-mode cracks in thin elastic plates. *Int J Solids Struct*, 2007, 44: 3021–3034
- 39 Zhang B, Guo W. Three-dimensional stress state around quarter-elliptical corner cracks in elastic plates subjected to uniform tension loading. *Eng Fracture Mech*, 2007, 74: 386–398
- 40 Yu P, She C, Guo W. Equivalent thickness conception for corner cracks. *Int J Solids Struct*, 2010, 47: 2123–2130
- 41 Yu P, Guo W. An equivalent thickness conception for prediction of surface fatigue crack growth life and shape evolution. *Eng Fracture*

Mech, 2012, 93: 65–74

42 于培师. 含曲线裂纹结构的三维断裂与疲劳裂纹扩展模拟研究. 博士学位论文. 南京: 南京航空航天大学, 2010

43 Pitt S, Jones R. Compliance measurements for assessing structural integrity. Eng Failure Ana, 2001, 8: 371–397

Three-parameter descriptions for the three-dimensional stress field near the crack front and a concept of equivalent thickness

SHE ChongMin^{*}, ZHAO JunHua, YU PeiShi & GUO WanLin^{*}

State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

Classical two-dimensional (2D) fracture theories have obvious limitations in the three-dimensional (3D) damage tolerance design and prediction for the practical engineering structures with complex cracks because the effect of thickness on fracture parameters is not considered in the theory system. On the other hand, the corresponding thickness of the structure with a crack cannot be determined explicitly. So some errors will exist in engineering analysis and design because of the used conservative fracture criteria such as plane-strain fracture toughness and crack growth rate. In fact, the complicated 3D stress fields near the crack front play a vital role in the strength of materials, so it is inevitable to research on the 3D stress fields near the crack front and corresponding 3D fracture theory. In this manuscript, the development of the stress field near the crack front is summarized from planar solution to 3D solution, the 3D 3-parameter solutions and equivalent thickness of crack front based on the constraint equivalence principle are emphasized.

stress field, equivalent thickness, three-dimensional fracture, fatigue life, crack

PACS: 46.50.+a, 46.35.+z, 46.25.Cc, 46.25.-y, 46.05.+b

doi: 10.1360/132013-16