有限期美式封顶股票抵押贷款的定价

马敬堂^{1,2*}, 鄢丽^{1,3}, 周志强¹

1. 西南财经大学经济数学学院, 成都 611130;

2. 西南财经大学金融安全协同创新中心, 成都 611130;

3. 重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331

E-mail: mjt@swufe.edu.cn, yl@2014.swufe.edu.cn, zqzhou@2014.swufe.edu.cn

收稿日期: 2016-10-07; 接受日期: 2018-04-30; 网络出版日期: 2019-05-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671323) 和新世纪优秀人才支持项目 (批准号: NCET-12-0922) 资助项目

摘要 本文研究有限期的美式封顶式股票抵押贷款的定价问题. 股票抵押贷款是一种用股票作为抵押品的贷款产品, 它们的定价问题是一种最优停时问题. 带封顶的股票抵押贷款通过设定股票价格的上限, 将“上限”功能纳入股票抵押贷款中, 这样贷款人就可以避免由于股价上涨而造成巨大损失. 本文利用随机分析方法推导出最优执行边界函数的积分方程, 从而得到有限期的美式封顶式股票抵押贷款价格的解析公式. 本文还进一步研究一类随机利率模型下美式封顶式股票抵押贷款的定价问题, 通过数值算例分析最优执行边界的性质.

关键词 封顶式股票抵押贷款 随机利率 零息债券 积分方程 最优执行边界

MSC (2010) 主题分类 91G20, 91G60

1 引言

股票抵押贷款是一种十分受欢迎的金融产品, 在这种金融产品里, 拥有股票的客户 (借款方) 把股票作为抵押品从提供股票抵押贷款的金融机构 (出借方) 获得一定数目的现金. 在缴纳一定的服务费后, 借款方得到一份资产和一种允许他在偿还本金和贷款利息后可以赎回股票, 或者在任何有效的时间内不偿还贷款而放弃股票的权利. 在文献中, 这份权利被认为是股票抵押贷款的价值. 考虑到它的提前执行特征和支付特征, 股票抵押贷款的定价问题本质上是一种最优停时问题.

Xia 和 Zhou^[1] 最早把股票抵押贷款作为期权问题进行研究. 在他们的论文中, 股票抵押贷款的借款人被认为是美式永久看涨期权的持有者, 并且有权在任何有效的时间内行使期权, 或者在抵押股票价格大幅下跌时放弃贷款. 在后续研究中, 标准股票抵押贷款被推广到各种情形. Dai 和 Xu^[2] 研究了不同股利分配的有限期股票抵押贷款, 并分析了最佳的赎回策略. Pascucci 等^[3] 将股票贷款估值延长至到期时的累计股息收益率. Lu 和 Putri^[4] 利用 Laplace 变换方法研究了有限期的股票抵押贷款的半解析式估值.

英文引用格式: Ma J T, Yan L, Zhou Z Q. Pricing finite-maturity American capped stock loan (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 943–966, doi: 10.1360/SCM-2016-0618

该合同规定借款人有义务偿还因赎回而预先确定的部分贷款, 之后以减少额度的标准抵押贷款继续运行. 当股票价格低于贷款金额时, 追加保证金股票抵押贷款就会生效, 由于借款人可能会离开, 因而, 它为贷款人提供了更多的保护. 追加保证金股票抵押贷款可以被看作是一个带有折扣的永久美式向下敲出期权.

还有一些其他的非标准股票抵押贷款, 它们包含了不同的特征, 为贷款人提供了更多的保护. Liu 和 Yu^[5] 提出了一种封顶式的股票抵押贷款, 为股票价格设定了上限, 这样, 贷款人就可以避免由于股价的大幅上涨而造成的巨大损失. 而股票抵押贷款的持有人在偿还贷款后将获得股票价格与预先确定的金额之间的最小值. 贷款人可能的最大损失是限额与累计贷款金额之间的差额. 确定一个合理的上限水平, 合同的持有人仍有可能获得利润, 而贷款者获得了保费收入, 与此同时降低了未来的风险. 带有无限期的封顶式股票抵押贷款被认为是一种具有时间依赖性的执行价格的永久美式封顶期权. Liang 等^[6] 提出了一种更复杂的非标准股票抵押贷款, 其中包含自动终止条款、封顶和保证金. 这种类型的股票抵押贷款类似于一个广义的永久美式期权. 以上提到的文献只研究了固定利率和无限期的股票贷款.

本文研究有限期的常数和随机利率的封顶式股票抵押贷款. Broadie 和 Detemple^[7] 使用积分方程方法研究常数利率下的美式封顶看涨期权, 受其启发, 我们研究常数利率和随机利率下有限期的封顶式股票抵押贷款的定价问题, 给出价值的解析公式, 刻画执行和持有区域的特征. 通过求解积分方程得到提前执行边界, 该公式易于实现. 美式股票抵押贷款价值函数可以转换为具有负利率的美式看涨期权. Broadie 和 Detemple^[7] 没有研究随机利率下的美式封顶式期权. Chen 等^[8] 使用偏微分方程和有限差分法研究了有限期的无封顶的股票抵押贷款. 然而, 不利用解析公式很难找到带封顶的和不带封顶的股票抵押贷款的提前执行边界之间的交点. 因此, Chen 等^[8] 的有限差分法很难运用到有限期的美式封顶股票抵押贷款定价.

本文运用概率方法研究随机利率模型下的有限期封顶式股票抵押贷款, 当上限接近于无限时, 这些贷款被简化为标准的股票抵押贷款.

本文的其余部分安排如下: 第 2 节给出常数利率下的有限期股票抵押贷款定价的结果; 第 3 节研究具有随机利率的有限期股票抵押贷款的定价问题; 第 4 节提供各种数值例子, 说明有限期的股票抵押贷款的提前执行区域和持有区域; 结论在最后一节中给出.

2 常数利率下的有限期封顶式股票抵押贷款

本节研究常数利率下有限期封顶式股票抵押贷款的定价. 在连续时间的金融市场里, 有两种资产: 债券和股票. 假设债券的连续复利率 $r > 0$ 是一个常数, 与股票相关的不确定性是由一个定义在风险中性概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 上的标准的 Brown 运动 $W := \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ 所描述, 其中 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ 是由 Brown 运动 W 所生成的域流, $\mathcal{F}_0 = \sigma\{\phi, \Omega\}$ 和 $\mathcal{F} = \sigma\{\bigcup_{t=0}^T \mathcal{F}_t\}$. 债券的价格满足如下方程:

$$dP_t = P_t r dt. \quad (2.1)$$

股价价格由动态方程决定:

$$dS_t = S_t(r - \delta)dt + S_t \sigma dW_t, \quad (2.2)$$

其中 $\delta \geq 0$ 是红利率, $\sigma > 0$ 表示波动率. 方程 (2.2) 的解为

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

如 Xia 和 Zhou^[1] 所提出的, 标准股票抵押贷款可以看成是一个客户以 $S - K + C$ 的价格购买了一份敲定价格为 $Ke^{\gamma t}$ 的美式看涨期权, 其中 S 表示股价, K 表示本金, C 表示金融机构收取的服务费, γ 表示连续的贷款利率, 通常 γ 大于无风险利率 r . 美式封顶式股票贷款是一种特殊的贷款, 出借方可以通过对股价设置一个上限从而避免可能的过大损失. 当借款方决定在时间 $t \in [0, T]$ 偿还本息时, 他将会得到当前股价 S_t 与预先约定的现金 $Le^{\gamma t}$ ($L > K$) 两者中最小者, 也就是说, 如果当前股价 S_t 小于上限 $Le^{\gamma t}$, 他拿回股票; 如果当前股价 S_t 大于 $Le^{\gamma t}$, 他得到现金 $Le^{\gamma t}$. 本文把这种合同看成是一份有限期的敲定价格 $Ke^{\gamma t}$ 依赖时间的美式封顶看涨期权. 期权的收益记为 $G_t = (S_t \wedge Le^{\gamma t} - Ke^{\gamma t})_+$, $0 \leq t \leq T$. 由衍生品定价理论, 到期日为 T 的美式封顶式股票抵押贷款在时间 t 的价格可表示为如下的风险中性公式:

$$V^L(t, S_t) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-r(\tau-t)}(S_\tau \wedge Le^{\gamma \tau} - Ke^{\gamma \tau})_+], \quad (2.3)$$

$\mathcal{T}_t$ 表示所有的 $(\mathcal{F}_s)_{s \in [t, T]}$ -停时, $E_t[\cdot] := E[\cdot | \mathcal{F}_t]$.

为了推出美式封顶股票抵押贷款定价的解析公式, 需要先推出无封顶的标准股票抵押贷款的定价公式. 到期日为 T 的无封顶股票抵押贷款在时间 t 的价格可表示为如下的风险中性公式:

$$V(t, S_t) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-r(\tau-t)}(S_\tau - Ke^{\gamma \tau})_+]. \quad (2.4)$$

利用如下的转换:

$$Y_t = e^{-\gamma t} S_t, \quad \tilde{r} = r - \gamma,$$

我们可把风险中性公式 (2.4) 重写为

$$\begin{aligned} V(t, S_t) &= \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-r(\tau-t)}(S_\tau - Ke^{\gamma \tau})_+] \\ &= e^{\gamma t} \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-(r-\gamma)(\tau-t)}(e^{-\gamma \tau} S_\tau - K)_+] \\ &= e^{\gamma t} \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-\tilde{r}(\tau-t)}(Y_\tau - K)_+] \\ &=: e^{\gamma t} C(t, Y_t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

注意, $C(t, Y_t)$ 可看成是一个原生资产为 Y_t 、敲定价格为 K 的标准美式看涨期权. 设 $\tilde{B}(t)$ 表示该美式看涨期权的最优执行边界, 则 $B(t) := \tilde{B}(t)e^{\gamma t}$ 刚好是有限期的无封顶股票抵押贷款的最优执行边界.

定理 1 到期日为 T 的无封顶股票抵押贷款在时间 t 的价格可表示为

$$\begin{aligned} V(t, S_t) &= e^{-\delta(T-t)} S_t \Phi[d_1(S_t, Ke^{\gamma t}, T-t)] \\ &\quad - e^{-r(T-t)+\gamma T} K \Phi[d_2(S_t, Ke^{\gamma t}, T-t)] \\ &\quad + \delta S_t \int_t^T e^{-\delta(v-t)} \Phi[d_1(S_t, B(v), v-t)] dv \\ &\quad - (r - \gamma) K \int_t^T e^{-r(v-t)+\gamma v} \Phi[d_2(S_t, B(v), v-t)] dv, \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中

$$d_1(x, y, \tau) := \frac{\ln(\frac{x}{y}) + (r - \gamma - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (2.7)$$

$$d_2(x, y, \tau) := d_1(x, y, \tau) - \sigma\sqrt{\tau}, \quad (2.8)$$

函数 Φ 是标准正态随机变量的分布函数, $B(t)$ 是无封顶股票抵押贷款的最优执行边界.

证明 根据文献 [9] 求解标准美式看涨期权定价的思想, 类似地, $C(t, Y_t)$ 可以分解为相应的欧式期权 $C_E(t, Y_t)$ 和提前执行收益 $e(t, Y_t)$ 两部分, 即

$$C(t, Y_t) = C_E(t, Y_t) + e(t, Y_t). \quad (2.9)$$

欧式期权的定价公式为

$$\begin{aligned} C_E(t, Y_t) &= E_t[e^{-\tilde{r}(T-t)}(Y_T - K)_+] \\ &= e^{-\delta(T-t)}Y_t\Phi[d_1(Y_t, K, T-t)] - e^{-\tilde{r}(T-t)}K\Phi[d_2(Y_t, K, T-t)], \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 d_1 和 d_2 的表达式参见 (2.7) 和 (2.8). 提前执行收益的公式为

$$\begin{aligned} e(t, Y_t) &= E_t\left[\int_t^T e^{-\tilde{r}(v-t)}(\delta Y_v - \tilde{r}K)I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v)\}}dv\right] \\ &= \delta \int_t^T E_t[e^{-\tilde{r}(v-t)}Y_v I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v)\}}]dv - \tilde{r}K \int_t^T e^{-\tilde{r}(v-t)}E_t[I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v)\}}]dv \\ &= \delta Y_t \int_t^T e^{-\delta(v-t)}\Phi[d_1(Y_t, \tilde{B}(v), v-t)]dv \\ &\quad - \tilde{r}K \int_t^T e^{-\tilde{r}(v-t)}\Phi[d_2(Y_t, \tilde{B}(v), v-t)]dv, \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $I_{\{\cdot\}}$ 为示性函数. 合并 (2.9)–(2.11), 再根据 $V(t, S_t) = e^{\gamma t}C(t, Y_t)$ 和 $Y_t = e^{-\gamma t}S_t$, 定理得以证明. $\square$

虽然定理 1 提供了计算有限期的无封顶股票抵押贷款的定价公式, 但是由于公式中包含未知的最优执行边界 $B(t)$, 所以需要首先计算它. 在如下的推论中, 我们给出计算最优执行边界的积分方程.

推论 1 有限期的无封顶的标准股票抵押贷款的最优执行边界 $B(t)$ 满足如下的积分方程:

$$\begin{aligned} B(t) - Ke^{\gamma t} &= e^{-\delta(T-t)}B(t)\Phi[d_1(B(t), Ke^{\gamma t}, T-t)] \\ &\quad - e^{-r(T-t)+\gamma T}K\Phi[d_2(B(t), Ke^{\gamma t}, T-t)] \\ &\quad + \int_t^T \{e^{-\delta(v-t)}\delta B(t)\Phi[d_1(B(t), B(v), v-t)] \\ &\quad - e^{-r(v-t)+\gamma v}(r-\gamma)K\Phi[d_2(B(t), B(v), v-t)]\}dv, \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 $B(T) = Ke^{\gamma T}$.

证明 因为 $V(t, B(t)) = B(t) - Ke^{\gamma t}$, 所以用 $B(t)$ 代替 (2.6) 里的 S_t 得到 (2.12). $\square$

最优执行边界可通过求解 (2.12) 的积分方程得到. 因为在到期日 $B(T) = Ke^{\gamma T}$ 成立, 所以, 我们通过对时间逆向递推得出最优执行边界. 又由于 (2.12) 没有解析解, 因此可采取数值积分的方法近

似得到解. 我们将区间 $[0, T]$ 划分为 n 个等距的子区间 $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, 其中 $t_i = i\Delta t$ 且 $\Delta t = T/n$. 定义

$$h(v) := e^{-\delta(v-t)} \delta B(t) \Phi[d_1(B(t), B(v), v-t)] - e^{-r(v-t)+\gamma v} (r-\gamma) K \Phi[d_2(B(t), B(v), v-t)],$$

那么, (2.12) 中的积分部分可近似为

$$I(k) = \sum_{i=0}^{k-1} h(t_{n-i}) \Delta t, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

如下的反向递推步骤可近似地推出最优执行边界. 已知

$$B(t_n) = B(T) = Ke^{\gamma T},$$

递归地, 当 $k = 1, \dots, n$ 时, 用 (2.13) 计算的 $I(k, t)$ 来近似 (2.12) 的积分部分, 然后求解如下方程中唯一的未知量 $B(t_{n-k})$ (参见文献 [10]):

$$\begin{aligned} B(t_{n-k}) - Ke^{\gamma t_{n-k}} &= e^{-\delta(T-t_{n-k})} B(t_{n-k}) \Phi[d_1(B(t_{n-k}), Ke^{\gamma t_{n-k}}, T-t_{n-k})] \\ &\quad - e^{-r(T-t_{n-k})+\gamma T} K \Phi[d_2(B(t_{n-k}), Ke^{\gamma t_{n-k}}, T-t_{n-k})] \\ &\quad + I(k, t_{n-k}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

下面推导由 (2.3) 定义的美式封顶股票抵押贷款的定价公式. 令 $\bar{B}(t)$ 表示封顶股票抵押贷款的最优执行边界, $t \in [0, T]$, 则

$$\bar{B}(t) = Le^{\gamma t} \wedge B(t),$$

其中 $B(t)$ 是具有相同到期日和敲定价格的无封顶的股票抵押贷款的最优执行边界. 令 $\tau_L := \inf\{v \in [t, \infty) : S_v \geq Le^{\gamma v}\}$ 表示首次碰到上限 $Le^{\gamma t}$ 的时间, 即股价首次大于或等于 $Le^{\gamma t}$ 的时间. 设 t^* 是方程 $B(v) = Le^{\gamma v}$ ($v \in [0, T]$) 的唯一解, 如果此解存在的话. 当对所有的 $v \in [0, T]$ 都有 $B(v) < Le^{\gamma v}$, 令 $t^* = 0$; 当对所有的 $v \in [0, T]$ 都有 $B(v) > Le^{\gamma v}$, 令 $t^* = T$. 类似于文献 [7] 的美式封顶看涨期权定价方法, 我们可推出到期日为 T 的封顶股票抵押贷款的价值函数.

定理 2 考虑一种到期日为 T 、敲定价格为 $Ke^{\gamma t}$ 、上限为 $Le^{\gamma t}$ 的美式封顶股票抵押贷款. 此股票抵押贷款在时间 t 的价格 $V^L(t, S_t)$ 可表示为

$$V^L(t, S_t) = \begin{cases} S_t \wedge Le^{\gamma t} - Ke^{\gamma t}, & S_t \geq Le^{\gamma t} \wedge B(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ V(t, S_t), & S_t < Le^{\gamma t} \wedge B(t), \quad t^* \leq t \leq T, \\ C^L(t, S_t), & S_t < Le^{\gamma t} \wedge B(t), \quad 0 \leq t < t^*, \end{cases}$$

其中 $V(t, S_t)$ 是由 (2.6) 给出的无封顶股票抵押贷款的价格, $C^L(t, S_t)$ 由下面的公式给出:

$$\begin{aligned} C^L(t, S_t) &= (L - K)e^{\gamma t} [\lambda_t^{2\alpha/\sigma^2} \Phi(d_0^-) + \lambda_t^{2\beta/\sigma^2} \Phi(d_0^+)] \\ &\quad + e^{-r(t^*-t)} \int_0^{Le^{\gamma t^*}} V(t^*, x) u(x, t, t^*) dx, \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中

$$d_0^\pm := \frac{1}{\sigma\sqrt{t^*-t}} [\ln(\lambda_t) \pm f(t^*-t)],$$

$$\begin{aligned}
 d_1^\pm(x) &:= \frac{1}{\sigma\sqrt{t^*-t}}[\pm \ln(\lambda_t) - \ln(Le^{\gamma t}) + \ln(x) + (b - \gamma)(t^* - t)], \\
 u(x, t, t^*) &:= \frac{1}{x\sigma\sqrt{t^*-t}}[\phi(d_1^-(x)) - \lambda_t^{2b/\sigma^2} \phi(d_1^+(x))], \\
 b &:= \delta - r + \gamma + \frac{\sigma^2}{2}, \quad f := \sqrt{b^2 + 2(r - \gamma)\sigma^2}, \\
 \alpha &:= \frac{b - f}{2}, \quad \beta := \frac{b + f}{2}, \quad \lambda_t := \frac{S_t}{Le^{\gamma t}},
 \end{aligned}$$

ϕ 是标准正态随机变量的密度函数.

证明 由 $\bar{B}(t) = Le^{\gamma t} \wedge B(t)$ 得, 当 $S_t \geq Le^{\gamma t} \wedge B(t)$ 时, 立即执行是最优的, 此时股票抵押贷款的价值为 $S_t \wedge Le^{\gamma t} - Ke^{\gamma t}$; 当 $S_t < Le^{\gamma t} \wedge B(t)$, 且 $t \geq t^*$ 时, 最优执行时间发生在股价首次等于边界 $B(t)$ 时或者到期日. 因此, 这时的封顶股票抵押贷款的价值就是标准的无上限股票抵押贷款的价值 $V(t, S_t)$; 当 $S_t < Le^{\gamma t} \wedge B(t)$, 且 $t < t^*$ 时, 封顶股票抵押贷款的价值为

$$\begin{aligned}
 C^L(t, S_t) &= E_t[e^{-r(\tau_L - t)}(S_{\tau_L} - Ke^{\gamma \tau_L})I_{\{\tau_L < t^*\}} + e^{-r(t^* - t)}V(t^*, S_{t^*})I_{\{\tau_L \geq t^*\}}] \\
 &= e^{\gamma t}E_t[e^{-\tilde{r}(\tau_L - t)}(Y_{\tau_L} - K)I_{\{\tau_L < t^*\}}] + E_t[e^{-r(t^* - t)}V(t^*, S_{t^*})I_{\{\tau_L \geq t^*\}}], \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

其中

$$Y_t = e^{-\gamma t}S_t, \quad \tilde{r} = r - \gamma.$$

由文献 [7] 知, 首达时间 τ_L 的密度函数为

$$\varphi(\tau) = -\phi\left(\frac{\ln(\lambda_t) - b\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\frac{\ln(\lambda_t)}{\sigma\tau^{3/2}}, \quad Y_t \leq L. \quad (2.17)$$

利用 (2.17), 下面计算 (2.16) 里的第一个期望 (注意 $t < t^*$):

$$\begin{aligned}
 E_t[e^{-\tilde{r}(\tau_L - t)}(Y_{\tau_L} - K)I_{\{\tau_L < t^*\}}] &= \int_{\tau=0}^{t^*-t} e^{-\tilde{r}\tau}(L - K)\varphi(\tau)d\tau \\
 &= (L - K)[\lambda_t^{2\alpha/\sigma^2}\Phi(d_0^-) + \lambda_t^{2\beta/\sigma^2}\Phi(d_0^+)], \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

上式的最后一个等式应用了文献 [7, 引理 4] 当 $a = g = 0$ 时的结果.

进一步地, 由文献 [7, 引理 1] 可知,

$$P[S_{t^*} \leq x, S_v < Le^{\gamma v}, \text{ 对于 } v \in [t, t^*]] = \Phi[d_1^-(x)] - \lambda_t^{2b/\sigma^2}\Phi[d_1^+(x)]. \quad (2.19)$$

下面利用 (2.19) 接着计算 (2.16) 里的第二个期望:

$$\begin{aligned}
 E_t[e^{-r(t^* - t)}V(t^*, S_{t^*})I_{\{\tau_L \geq t^*\}}] &= e^{-r(t^* - t)} \int_0^{Le^{\gamma t^*}} V(t^*, x)dP[S_{t^*} \leq x, S_v < Le^{\gamma v}, \text{ 对于 } v \in [t, t^*]] \\
 &= e^{-r(t^* - t)} \int_0^{Le^{\gamma t^*}} V(t^*, x)u(x, t, t^*)dx, \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

其中 $u(x, t, t^*)$ 是函数 (2.19) 关于 x 的导数. 最后合并 (2.16)、(2.18) 和 (2.20), 定理获证. $\square$

3 随机利率下的封顶式股票抵押贷款的定价

股票抵押贷款的有效期通常超过 10 年甚至 20 年. 由于利率对于股票抵押贷款的赎回策略有着重要的影响, 因此, 不管是在理论上还是实践上, 在随机利率框架下对股票抵押贷款进行定价都有重要的参考意义. 假设股价和无风险利率都遵从风险中性过程:

$$dS_t = S_t(r_t - \delta)dt + S_t\sigma_1 dW_{1t}, \quad (3.1)$$

$$dr_t = [\theta(t) - ar_t]dt + \sigma_2 dW_{2t}, \quad (3.2)$$

其中 r_t 是无风险利率, σ_1 、 σ_2 、 δ 和 a 都是正的常数, $\theta(t)$ 是确定性的函数, W_{1t} 和 W_{2t} 是相关系数为 ρ 的两个定义在风险中性概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 的标准 Brown 运动, 即

$$E[dW_{1t}dW_{2t}] = \rho dt.$$

系数 δ 是红利率, σ_1 是资产价格波动率, a 是利率的均值回归的速度, σ_2 是利率的波动率.

令 $P(t, T)$ 表示零息债券在时刻 t 的价格, 即 $P(t, T) = E_t[e^{-\int_t^T r_v dv}]$. 由 Itô 引理知, $P(t, T)$ 的微分为

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - \sigma_2 G(t, T) dW_{2t},$$

其中 $G(t, T) = \frac{1}{a}[1 - e^{-a(T-t)}]$ (标准的 Hull-White 解). 因此, 到期日为 T 的零息债券在时刻 t 的价格 (参见文献 [11]) 为

$$P(t, T) = \exp \left\{ \int_t^T \left[\frac{1}{2} \sigma_2^2 G^2(u, T) - \theta(u) G(u, T) \right] du - G(t, T) r_t \right\}. \quad (3.3)$$

到期日为 T , 随机利率为 r_t , 上限为 $LP(t, T)$, 支付过程为

$$G_t = (S_t \wedge LP(t, T)e^{\gamma t} - Ke^{\gamma t})_+, \quad 0 \leq t \leq T,$$

这样的美式封顶股票抵押贷款在时间 t 的价格可表示为如下的风险中性公式:

$$\tilde{V}^L(t, S_t, r_t) = \max_{\tau \in T_t} E_t[e^{-\int_t^\tau r_v dv} (S_\tau \wedge LP(\tau, T)e^{\gamma \tau} - Ke^{\gamma \tau})_+]. \quad (3.4)$$

定义与计价单位 $P(t, T)$ 相关的 T -远期测度 $\mathbb{Q}^T$, Radon-Nikodym 密度函数为

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{P}} = e^{-\int_0^T \sigma_2 G(v, T) dW_{2v} - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_2^2 G^2(v, T) dv}.$$

由 Girsanov 定理知, 在概率测度 $\mathbb{Q}^T$ 下, 过程

$$dW_{1t}^T := dW_{1t} + \rho \sigma_2 G(t, T) dt$$

和

$$dW_{2t}^T := dW_{2t} + \sigma_2 G(t, T) dt$$

是 Brown 运动. 下面对股价做一个转换:

$$S_t^* = S_t e^{\delta t}. \quad (3.5)$$

以零息债券计量, 它的价格为

$$X_t := \frac{S_t^*}{P(t, T)}. \quad (3.6)$$

由 Itô 引理得

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t[(\sigma_2^2 G^2(t, T) + \rho\sigma_1\sigma_2 G(t, T))dt + \sigma_1 dW_{1t} + \sigma_2 G(t, T)dW_{2t}] \\ &= X_t[\sigma_1 dW_{1t}^T + \sigma_2 G(t, T)dW_{2t}^T], \end{aligned} \quad (3.7)$$

且 $X_T = \frac{S_T^*}{P(T, T)} = S_T^*$. 故 X_t 是一个鞅且可表示为

$$X_t = X_0 e^{N_t - \frac{\xi_t}{2}}, \quad t \in [0, T], \quad (3.8)$$

其中

$$N_t = \int_0^t \sigma_1 dW_{1u}^T + \int_0^t \sigma_2 G(u, T) dW_{2u}^T, \quad (3.9)$$

$$\xi_t = \int_0^t \sigma_X^2(u, T) du, \quad (3.10)$$

$$\sigma_X^2(t, T) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 G^2(t, T) + 2\rho\sigma_1\sigma_2 G(t, T). \quad (3.11)$$

注意 $\xi_t = [N, N](t)$ 是鞅 N_t 的二次变差. 很明显, ξ_t 是区间 $[0, T]$ 到区间 $[0, \xi_T]$ 的一个双射. 由鞅的时间变化的 Dubin-Schwarz 定理 (参见文献 [12, 定理 3.4.6]) 知, 存在一个 $\mathbb{Q}^T$ -Brown 运动 M , 使得

$$N_t = M_{\xi_t}, \quad \text{对于 } t \in [0, T].$$

在远期 T 测度 $\mathbb{Q}^T$ 下, 有

$$X_t = X_0 e^{M_{\xi_t} - \frac{\xi_t}{2}}. \quad (3.12)$$

这个表达式对我们的推导非常有用, 因为它保证了 X_t 是几何正态的. 进一步地, 在远期 T 测度 $\mathbb{Q}^T$ 下, 利率过程满足

$$dr_t = [\theta(t) - ar_t - \sigma_2^2 G(t, T)]dt + \sigma_2 dW_{2t}^T. \quad (3.13)$$

方程 (3.13) 有如下的解:

$$r_v = r_t e^{-a(v-t)} + \int_t^v e^{-a(v-s)} [(\theta(s) - \sigma_2^2 G(s, v))ds + \sigma_2 dW_{2s}^T], \quad v > t. \quad (3.14)$$

下面推导美式封顶股票抵押贷款定价的解析公式. 为了这个目的, 需要先推导出无封顶的股票抵押贷款的定价公式. 定义到期日为 T 的无封顶股票抵押贷款在时间 t 的价格为

$$\tilde{V}(t, S_t, r_t) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-\int_t^\tau r_v dv} (S_\tau - K e^{\gamma\tau})_+]. \quad (3.15)$$

利用变换

$$Y_t = e^{-\gamma t} S_t, \quad (3.16)$$

风险中性公式 (3.15) 可重写为

$$\tilde{V}(t, S_t, r_t) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-\int_t^\tau r_v dv} (S_\tau - K e^{\gamma\tau})_+]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\gamma t} \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-\int_t^\tau (r_v - \gamma) dv} (S_\tau e^{-\gamma \tau} - K)_+] \\
&= e^{\gamma t} \max_{\tau \in \mathcal{T}_t} E_t[e^{-\int_t^\tau (r_v - \gamma) dv} (Y_\tau - K)_+] \\
&=: e^{\gamma t} \tilde{C}(t, Y_t, r_t).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

注意 $\tilde{C}(t, Y_t, r_t)$ 可以看作是原生资产为 Y_t 、敲定价格为 K 、随机利率为 $r_t - \gamma$ 的标准美式看涨期权。设 $\tilde{B}(t, r_t)$ 是该标准美式看涨期权的最优执行边界面, 那么 $B(t, r_t) := \tilde{B}(t, r_t)e^{\gamma t}$ 刚好可以表示为无封顶股票抵押贷款的最优执行边界面。

定理 3 无封顶的股票抵押贷款 $\tilde{V}(t, S_t, r_t)$ 在时间 t 的价格可表示为

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(t, S_t, r_t) &= e^{-\delta(T-t)} S_t \Phi[d^+(S_t, e^{\gamma t} K; t, T)] - e^{\gamma T} K P(t, T) \Phi[d^-(S_t, e^{\gamma t} K; t, T)] \\
&\quad + \delta S_t \int_t^T P(t, v) e^{-\delta(v-t)} \phi_1(S_t, r_t; B(v, \cdot), v) dv \\
&\quad - \int_t^T K e^{\gamma v} P(t, v) \phi_2(S_t, r_t; B(v, \cdot), v) dv,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中

$$d^\pm(x, y; t, T) := \frac{\ln(\frac{x}{yP(t, T)}) - (\delta + \gamma)(T - t)}{\sqrt{\xi_T - \xi_t}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\xi_T - \xi_t}, \tag{3.19}$$

ξ_t 由 (3.10) 给出, 并且

$$\begin{aligned}
&\phi_1(S_t, r_t; B(v, \cdot), v) \\
&:= \frac{1}{\hat{\sigma}_1(t, v)} e^{\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(t, v)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\bar{\mu}(r; r_t, t, v)} \phi\left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)}\right) \Phi[g(r, B(v, r); S_t, r_t, t, v)] dr
\end{aligned} \tag{3.20}$$

和

$$\begin{aligned}
&\phi_2(S_t, r_t; B(v, \cdot), v) \\
&:= \frac{1}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \int_{-\infty}^{\infty} (r - \gamma) \phi\left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)}\right) \Phi[g(r, B(v, r); S_t, r_t, t, v) - \bar{\sigma}(t, v)] dr.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

出现在 (3.20) 和 (3.21) 中的函数是

$$g(r, B(v, r); S_t, r_t, t, v) := \frac{\ln(\frac{S_t}{B(v, r)}) + \bar{\mu}(r; r_t, t, v) - (\delta + \gamma)(v - t) + \bar{\sigma}^2(t, v)}{\bar{\sigma}(t, v)}, \tag{3.22}$$

$$\bar{\mu}(r; r_t, t, v) := \hat{\mu}_2(r_t, t, v) + \frac{\hat{\rho}(t, v) \hat{\sigma}_2(t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)} (r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)), \tag{3.23}$$

$$\bar{\sigma}^2(t, v) := \hat{\sigma}_2^2(t, v) (1 - \hat{\rho}^2(t, v)), \tag{3.24}$$

$$\hat{\mu}_1(r_t, t, v) := r_t e^{-a(v-t)} + \int_t^v e^{-a(v-s)} [\theta(s) - \sigma_2^2 G(s, v)] ds, \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_2(r_t, t, v) &:= r_t G(t, v) - \frac{1}{2} \sigma_1^2 (v - t) + \int_t^v \int_t^s e^{-a(s-u)} \theta(u) du ds \\
&\quad - \int_t^v [\rho \sigma_1 \sigma_2 G(s, v) + \int_t^s e^{-a(s-u)} \sigma_2^2 G(u, v) du] ds,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\hat{\sigma}_1^2(t, v) := \sigma_2^2 \int_t^v e^{-2a(v-s)} ds, \quad (3.27)$$

$$\hat{\sigma}_2^2(t, v) := \int_t^v [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 G^2(s, v) + 2\rho\sigma_1\sigma_2 G(s, v)] ds, \quad (3.28)$$

$$\hat{\sigma}(t, v) := \int_t^v e^{-a(v-s)} [\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 G(s, v)] ds, \quad (3.29)$$

$$\hat{\rho}(t, v) := \frac{\hat{\sigma}(t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)\hat{\sigma}_2(t, v)}. \quad (3.30)$$

证明 与常数利率情形类似, (3.17) 中的 $\tilde{C}(t, Y_t, r_t)$ 可分解为相应的欧式部分 $\tilde{C}_E(t, Y_t, r_t)$ 和提前执行溢价 $\tilde{e}(t, Y_t, r_t)$, 即

$$\tilde{C}(t, Y_t, r_t) = \tilde{C}_E(t, Y_t, r_t) + \tilde{e}(t, Y_t, r_t). \quad (3.31)$$

由 (3.5)、(3.6) 和 (3.16), 首先计算欧式部分得

$$\begin{aligned} \tilde{C}_E(t, Y_t, r_t) &= E_t[e^{-\int_t^T (r_v - \gamma) dv} (Y_T - K)_+] \\ &= P(t, T) E_t \left[\frac{e^{-\int_t^T (r_v - \gamma) dv}}{P(t, T)} (S_T^* e^{-(\gamma + \delta)T} - K)_+ \right] \\ &= e^{\gamma(T-t)} P(t, T) E_t^{\mathbb{Q}^T} [(X_T e^{-(\gamma + \delta)T} - K)_+] \\ &= e^{-\delta(T-t)} Y_t \Phi[d^+(Y_t, K; t, T)] - e^{\gamma(T-t)} K P(t, T) \Phi[d^-(Y_t, K; t, T)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中 $d^\pm$ 由 (3.19) 所定义. 然后计算 (3.31) 中的提前执行溢价部分得

$$\begin{aligned} \tilde{e}(t, Y_t, r_t) &= E_t \left[\int_t^T e^{-\int_t^v (r_v - \gamma) dv} [\delta Y_v - (r_v - \gamma)K] I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v, r_v)\}} dv \right] \\ &= \delta \int_t^T A_1(v) dv - K \int_t^T A_2(v) dv + \gamma K \int_t^T A_3(v) dv, \end{aligned} \quad (3.33)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1(v) &= E_t[e^{-\int_t^v (r_v - \gamma) dv} Y_v I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v, r_v)\}}], \\ A_2(v) &= E_t[e^{-\int_t^v (r_v - \gamma) dv} r_v I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v, r_v)\}}], \\ A_3(v) &= E_t[e^{-\int_t^v (r_v - \gamma) dv} I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v, r_v)\}}]. \end{aligned}$$

下面分别计算这三个期望. 首先, 计算 A_1 ,

$$\begin{aligned} A_1(v) &= E_t[e^{-\int_t^v (r_v - \gamma) dv} Y_v I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v, r_v)\}}] \\ &= e^{-\gamma t - \delta v} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [S_v^* I_{\{S_v^* \geq \tilde{B}(v, r_v) e^{(\gamma + \delta)v}\}}] \\ &= e^{-\gamma t - \delta v} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [E_t^{\mathbb{Q}^v} [S_v^* I_{\{S_v^* \geq \tilde{B}(v, r_v) e^{(\gamma + \delta)v}\}} \mid r_v]] \\ &= e^{-\gamma t - \delta v} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [E_t^{\mathbb{Q}^v} [S_t^* e^{\ln \frac{S_v^*}{S_t^*}} I_{\{\ln \frac{S_v^*}{S_t^*} \geq \ln \frac{\tilde{B}(v, r_v)}{Y_t} + (\gamma + \delta)(v-t)\}} \mid r_v]]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

为了进一步计算上式, 需要知道 $\ln \frac{S_v^*}{S_t^*} \mid r_v$ 的条件分布和 r_v 的分布. 由 (3.14) 可知, 在远期 v 测度 $\mathbb{Q}^v$ 下, 有

$$r_v = r_t e^{-a(v-t)} + \int_t^v e^{-a(v-s)} [(\theta(s) - \sigma_2^2 G(s, v)) ds + \sigma_2 dW_{2s}^v].$$

此外, 由 Itô 引理得

$$\begin{aligned} \ln \frac{S_v^*}{S_t^*} = & -\frac{1}{2}\sigma_1^2(v-t) - \int_t^v \left[\rho\sigma_1\sigma_2G(s,v) + \int_t^s e^{-a(s-u)}\sigma_2^2G(u,v)du \right] ds \\ & + r_tG(t,v) + \int_t^v \int_t^s e^{-a(s-u)}\theta(u)duds \\ & + \int_t^v \sigma_1 dW_{1s}^v + \int_t^v \sigma_2 G(s,v) dW_{2s}^v. \end{aligned}$$

因此, 在远期 v 测度 $\mathbb{Q}^v$ 下, 二维随机变量 $(r_v, \ln \frac{S_v^*}{S_t^*})$ 遵从

$$\left(r_v, \ln \frac{S_v^*}{S_t^*} \right) \sim N[\hat{\mu}_1(r_t, t, v), \hat{\mu}_2(r_t, t, v), \hat{\sigma}_1^2(t, v), \hat{\sigma}_2^2(t, v), \hat{\rho}(t, v)],$$

其中均值向量和方差与协方差矩阵 $\hat{\mu}_1(r_t, t, v)$ 、 $\hat{\mu}_2(r_t, t, v)$ 、 $\hat{\sigma}_1^2(t, v)$ 、 $\hat{\sigma}_2^2(t, v)$ 和 $\hat{\rho}(t, v)$ 由 (3.25)–(3.29) 所定义. 因此, $\ln \frac{S_v^*}{S_t^*} | r_v$ 的条件分布函数为正态分布 $N[\bar{\mu}(r_v; r_t, t, v), \bar{\sigma}^2(t, v)]$, 即

$$\mathbb{Q}^v \left[\ln \frac{S_v^*}{S_t^*} \leq y \mid r_v \right] = \Phi \left[\frac{y - \bar{\mu}(r_v; r_t, t, v)}{\bar{\sigma}(t, v)} \right] = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}(t, v)} e^{-\frac{[x - \bar{\mu}(r_v; r_t, t, v)]^2}{2\bar{\sigma}^2(t, v)}} dx, \quad (3.35)$$

其中 $\bar{\mu}(r_v; r_t, t, v)$ 和 $\bar{\sigma}^2(t, v)$ 分别由 (3.23) 和 (3.24) 给出. 记随机利率 r_v 的密度函数为 $p(r; t, v)$, 那么有

$$p(r; t, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_1(t, v)} e^{-\frac{[r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)]^2}{2\hat{\sigma}_1^2(t, v)}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \phi \left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \right). \quad (3.36)$$

于是, 继续计算 (3.34) 得

$$\begin{aligned} A_1(v) = & e^{-\gamma t - \delta v} P(t, v) S_t^* E_t^{\mathbb{Q}^v} [E_t^{\mathbb{Q}^v} [e^{\ln \frac{S_v^*}{S_t^*}} I_{\{\ln \frac{S_v^*}{S_t^*} \geq \ln \frac{\tilde{B}(v, r_v)}{Y_t} + (\gamma + \delta)(v-t)\}} \mid r_v]] \\ = & e^{-\gamma t - \delta v} P(t, v) S_t^* E_t^{\mathbb{Q}^v} [e^{\bar{\mu}(r_v; r_t, t, v) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(t, v)} \Phi[g(r_v, \tilde{B}(v, r_v); Y_t, r_t, t, v)]] \\ = & \frac{e^{-\delta(v-t)} P(t, v) Y_t}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{\bar{\mu}(r; r_t, t, v) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(t, v)} \Phi[g(r, \tilde{B}(v, r); Y_t, r_t, t, v)] \right. \\ & \times \left. \phi \left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \right) \right\} dr, \end{aligned} \quad (3.37)$$

其中 g 由 (3.22) 所定义. 接着计算 $A_2(v)$,

$$\begin{aligned} A_2(v) = & E_t[e^{-\int_t^v (r_v - \gamma) dv} r_v I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v, r_v)\}}] \\ = & e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [r_v I_{\{S_v^* \geq \tilde{B}(v, r_v) e^{(\gamma + \delta)v}\}}] \\ = & e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [r_v E_t^{\mathbb{Q}^v} [I_{\{S_v^* \geq \tilde{B}(v, r_v) e^{(\gamma + \delta)v}\}} \mid r_v]] \\ = & e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [r_v E_t^{\mathbb{Q}^v} [I_{\{\ln \frac{S_v^*}{S_t^*} \geq \ln \frac{\tilde{B}(v, r_v)}{Y_t} + (\gamma + \delta)(v-t)\}} \mid r_v]] \\ = & e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [r_v \Phi[g(r_v, \tilde{B}(v, r_v); Y_t, r_t, t, v) - \bar{\sigma}(t, v)]] \\ = & \frac{e^{\gamma(v-t)} P(t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \int_{-\infty}^{+\infty} r \Phi[g(r, \tilde{B}(v, r); Y_t, r_t, t, v) - \bar{\sigma}(t, v)] \\ & \times \phi \left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \right) dr. \end{aligned} \quad (3.38)$$

以类似方法, 计算 $A_3(v)$ 得

$$\begin{aligned}
 A_3(v) &= E[e^{-\int_t^v (r_v - \gamma) dv} I_{\{Y_v \geq \tilde{B}(v, r_v)\}} | \mathcal{F}_t] \\
 &= e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [I_{\{S_v^* \geq \tilde{B}(v, r_v) e^{(\gamma+\delta)v}\}}] \\
 &= e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [E_t^{\mathbb{Q}^v} [I_{\{S_v^* \geq \tilde{B}(v, r_v) e^{(\gamma+\delta)v}\}} | r_v]] \\
 &= e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [E_t^{\mathbb{Q}^v} [I_{\{\ln \frac{S_v^*}{S_t^*} \geq \ln \frac{\tilde{B}(v, r_v)}{Y_t} + (\gamma+\delta)(v-t)\}} | r_v]] \\
 &= e^{\gamma(v-t)} P(t, v) E_t^{\mathbb{Q}^v} [\Phi[g(r_v, \tilde{B}(v, r_v); Y_t, r_t, t, v) - \bar{\sigma}(t, v)]] \\
 &= \frac{e^{\gamma(v-t)} P(t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi[g(r, \tilde{B}(v, r); Y_t, r_t, t, v) - \bar{\sigma}(t, v)] \\
 &\quad \times \phi\left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)}\right) dr. \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

将 (3.37)–(3.39) 代入 (3.33) 中, 再结合 (3.32) 和 (3.33) 的结果, 利用 $\tilde{V}(t, S_t, r_t) = e^{\gamma t} \tilde{C}(t, Y_t, r_t)$, $Y_t = e^{-\gamma t} S_t$ 和 $\tilde{B}(t, r_t) = e^{-\gamma t} B(t, r_t)$, 定理获证. $\square$

定理 3 提供了一种计算随机利率下的有限期股票抵押贷款定价的方法. 然而, 由于提前执行溢价依赖最优执行边界面 $B(t, r)$, 因此需要首先计算它. 下面的推论将给出计算最优执行边界面的积分方程.

推论 2 令 $B(t, r_t)$ 表示随机利率下的股票抵押贷款 $\tilde{V}(t, S_t, r_t)$ 的最优执行边界面, 则 $B(t, r_t)$ 满足如下的积分方程:

$$\begin{aligned}
 B(t, r_t) - Ke^{\gamma t} &= e^{-\delta(T-t)} B(t, r_t) \Phi[d^+(B(t, r_t), Ke^{\gamma t}; t, T)] \\
 &\quad - e^{\gamma T} KP(t, T) \Phi[d^-(B(t, r_t), Ke^{\gamma t}; t, T)] \\
 &\quad + \delta B(t, r_t) \int_t^T P(t, v) e^{-\delta(v-t)} \phi_1(B(t, r_t), r_t; B(v, \cdot), v) dv \\
 &\quad - \int_t^T Ke^{\gamma v} P(t, v) \phi_2(B(t, r_t), r_t; B(v, \cdot), v) dv, \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

且

$$B(T, r_T) = \max \left\{ Ke^{\gamma T}, \frac{r_T - \gamma}{\delta} Ke^{\gamma T} \right\},$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_2 分别由 (3.20) 和 (3.21) 给出.

证明 因为 $B(t, r_t) - Ke^{\gamma t} = \tilde{V}(t, S_t, r_t)$, 所以用 $B(t, r_t)$ 代替 (3.18) 中的 S_t , 即得 (3.40). $\square$

为方便起见, (3.40) 重记为

$$\begin{aligned}
 B(t, r_t) - Ke^{\gamma t} &= e^{-\delta(T-t)} B(t, r_t) \Phi[d^+(B(t, r_t), Ke^{\gamma t}; t, T)] \\
 &\quad - e^{\gamma T} KP(t, T) \Phi[d^-(B(t, r_t), Ke^{\gamma t}; t, T)] \\
 &\quad + \int_t^T \int_{-\infty}^{\infty} h(B(t, r_t), r_t; B(v, r), r, v) dr dv, \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

其中

$$h(S, r_t; B(v, r), r, v) = \frac{1}{\hat{\sigma}_1(t, v)} \phi\left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, v)}{\hat{\sigma}_1(t, v)}\right) P(t, v)$$

$$\begin{aligned} & \times \{ \delta S e^{\bar{\mu}(r; r_t, t, v) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, v) - \delta(v-t)} \Phi[g(r, B(v, r); S, r_t, t, v)] \\ & - K e^{\gamma v} (r - \gamma) \Phi[g(r, B(v, r); S, r_t, t, v) - \bar{\sigma}(t, v)] \}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

下面用数值方法计算积分方程 (3.41). 将区间 $[0, T]$ 划分为 n 个等距的子区间 $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, 其中 $t_i = i\Delta t$, $\Delta t = T/n$. 类似地划分 r 的范围, 即将区间 $[\underline{r}, \bar{r}]$ 划分为 m 个等距的子区间且令 $\Delta r = (\bar{r} - \underline{r})/m$. 对 $j = 0, 1, \dots, m$, 设 $r_j = \underline{r} + j\Delta r$. 于是, (3.41) 的积分部分约等于

$$I(i, j) := \sum_{p=0}^m \sum_{q=1}^{n-i} h(B(i, j), r_j; B(i+q, j+p), r_p, t_{i+q}) \Delta r \Delta t, \quad (3.43)$$

其中 $B(i, j) = B(t_i, r_j)$.

最优执行边界面 $B(t, r_t)$ 可通过递推如下的非线性方程得到 (参见文献 [10]):

$$\begin{aligned} B(i, j) - K e^{\gamma t_i} &= e^{-\delta(T-t_i)} B(i, j) \Phi[d^+(B(i, j), K e^{\gamma t_i}; t_i, T)] \\ &- e^{\gamma T} K P(t_i, T) \Phi[d^-(B(i, j), K e^{\gamma t_i}; t_i, T)] + I(i, j), \end{aligned} \quad (3.44)$$

对于 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 和 $j = 0, 1, \dots, m-1$, 且对于所有的 j , 有

$$B(n, j) = \max \left\{ K e^{\gamma T}, \frac{r_j - \gamma}{\delta} K e^{\gamma T} \right\}.$$

下面开始推导 (3.4) 定义的美式封顶股票抵押贷款的定价公式. 对 $t \in [0, T]$, 令 $\bar{B}(t, r_t)$ 表示封顶股票抵押贷款的最优执行边界面, 则有

$$\bar{B}(t, r_t) = LP(t, T) e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t).$$

设 τ_L 表示股价 S_t 首次达到随机临界值 $LP(t, T) e^{\gamma t}$ 的时间. 对 $v \in [0, T]$, 设 t^* 为方程 $B(v, r_v) = LP(v, T) e^{\gamma v}$ 的唯一解, 如果此解存在的话. 如果对所有 $v \in [0, T]$, 都有 $B(v, r_v) < LP(v, T) e^{\gamma v}$, 则令 $t^* = 0$; 如果对所有 $v \in [0, T]$, 都有 $B(v, r_v) > LP(v, T) e^{\gamma v}$, 则令 $t^* = T$. 我们有下面的定理.

定理 4 考虑 (3.4) 所定义的随机利率下的封顶式股票抵押贷款, 其敲定价格为 $K e^{\gamma t}$, 上限为 $LP(t, T) e^{\gamma t}$ 且到期日为 T , 那么, 它的定价 $\tilde{V}^L(t, S_t, r_t)$ 可表示为

$$\tilde{V}^L(t, S_t, r_t) = \begin{cases} S_t \wedge LP(t, T) e^{\gamma t} - K e^{\gamma t}, & S_t \geq LP(t, T) e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \tilde{V}(t, S_t, r_t), & S_t < LP(t, T) e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t), \quad t^* \leq t \leq T, \\ \tilde{C}^L(t, S_t, r_t), & S_t < LP(t, T) e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t), \quad 0 \leq t < t^*, \end{cases}$$

其中 $\tilde{V}(t, S_t, r_t)$ 是 (3.18) 给出的无上限股票抵押贷款的价格, $\tilde{C}^L(t, S_t, r_t)$ 的公式如下:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^L(t, S_t, r_t) &= LP(t, t^*) \int_t^{t^*} \tilde{\varphi}(y) e^{\gamma y} dy - P(t, t^*) K \int_t^{t^*} \tilde{\varphi}(\kappa) e^{\gamma \kappa} \\ &\times \exp \left\{ - \int_{\kappa}^{t^*} \left[\frac{1}{2} \sigma_1^2 G^2(u, t^*) - \theta(u) G(u, t^*) \right] du \right. \\ &+ G(\kappa, t^*) \hat{\mu}_1(r_t, t, \kappa) + \frac{G^2(\kappa, t^*) \hat{\sigma}_1^2(t, \kappa)}{2} \Big\} d\kappa \\ &+ P(t, t^*) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\hat{\sigma}_1(t, t^*)} \phi \left(\frac{r - \hat{\mu}_1(r_t, t, t^*)}{\hat{\sigma}_1(t, t^*)} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{Le^{\gamma t^*}} \tilde{V}(t^*, x, r) \tilde{u}(x, r; r_t, t, t^*) dx \Big] dr, \quad (3.45)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(y) = & -\phi(\tilde{d}_0^-(y)) \frac{\ln(\tilde{\lambda}_t)}{(\xi_y - \xi_t)^{3/2}} \sigma_X^2(y, t^*) \\ & + \tilde{\lambda}_t^{1 + \frac{2(\delta + \gamma)(y - t)}{(\xi_y - \xi_t)}} \ln(\tilde{\lambda}_t) \Phi(\tilde{d}_0^+(y)) \frac{2(\delta + \gamma)(\xi_y - \xi_t) - 2(\delta + \gamma)(y - t) \sigma_X^2(y, t^*)}{(\xi_y - \xi_t)^2}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\tilde{u}(x, r; r_t, t, t^*) = \frac{1}{x \tilde{\sigma}(t, t^*)} [\phi(\tilde{d}_1^-(x)) - \tilde{\lambda}_t^{\frac{2(\delta + \gamma)(t^* - t) - 2\tilde{\mu}(r; r_t, t, t^*)}{\tilde{\sigma}^2(t, t^*)}} \phi(\tilde{d}_1^+(x))], \quad (3.47)$$

及

$$\tilde{\lambda}_t := \frac{S_t}{LP(t, t^*) e^{\gamma t}}, \quad (3.48)$$

$$\tilde{\mu}(r; r_t, t, t^*) := \frac{\hat{\rho}(t, t^*) \hat{\sigma}_2(t, t^*)}{\hat{\sigma}_1(t, t^*)} (r - \hat{\mu}_1(r_t, t, t^*)), \quad (3.49)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t, t^*) := \hat{\sigma}_2^2(t, t^*) (1 - \hat{\rho}^2(t, t^*)), \quad (3.50)$$

$$\tilde{d}_0^\pm(y) := \frac{1}{\sqrt{\xi_y - \xi_t}} \left[\ln(\tilde{\lambda}_t) \pm \left((\delta + \gamma)(y - t) + \frac{1}{2}(\xi_y - \xi_t) \right) \right], \quad (3.51)$$

$$\tilde{d}_1^\pm(x) := \frac{1}{\tilde{\sigma}(t, t^*)} [\pm \ln(\tilde{\lambda}_t) - \ln(Le^{\gamma t}) + \ln(x) - \tilde{\mu}(r; r_t, t, t^*) + \delta(t^* - t)], \quad (3.52)$$

未指明的符号与定理 3 相同.

证明 由封顶股票抵押贷款的最优执行边界面 $\bar{B}(t, r_t) = LP(t, T)e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t)$ 可得, 如果 $S_t \geq LP(t, T)e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t)$, 即刻执行是最优的并且股票抵押贷款的价值为 $S_t \wedge LP(t, T)e^{\gamma t} - Ke^{\gamma t}$; 如果 $S_t < LP(t, T)e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t)$ 且 $t \geq t^*$, 最优执行时刻发生在首次碰到边界面 $B(t, r_t)$ 或者到期日. 因此, 封顶股票抵押贷款的价值即为标准的无上限股票抵押贷款的价值 $\tilde{V}(t, S_t, r_t)$; 如果 $S_t < LP(t, T)e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t)$ 且 $t < t^*$, 障碍股票抵押贷款的价值为

$$\begin{aligned} \tilde{C}^L(t, S_t, r_t) = & E_t[e^{-\int_t^{\tau_L} r_v dv} (LP(\tau_L, t^*)e^{\gamma \tau_L} - Ke^{\gamma \tau_L}) I_{\{\tau_L < t^*\}}] \\ & + E_t[e^{-\int_t^{t^*} r_v dv} \tilde{V}(t^*, S_{t^*}, r_{t^*}) I_{\{\tau_L \geq t^*\}}] \\ = & LD_1 - KD_2 + D_3, \end{aligned} \quad (3.53)$$

其中

$$\begin{aligned} D_1 = & E_t[e^{-\int_t^{\tau_L} r_v dv} e^{\gamma \tau_L} P(\tau_L, t^*) I_{\{\tau_L < t^*\}}], \\ D_2 = & E_t[e^{-\int_t^{\tau_L} r_v dv} e^{\gamma \tau_L} I_{\{\tau_L < t^*\}}], \\ D_3 = & E_t[e^{-\int_t^{t^*} r_v dv} \tilde{V}(t^*, S_{t^*}, r_{t^*}) I_{\{\tau_L \geq t^*\}}]. \end{aligned}$$

对任意支付 Y_T , 有如下的 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{Q}^T$ 之间的测度变换关系:

$$E_t[e^{-\int_t^T r_v dv} Y_T] = P(t, T) E_t^{\mathbb{Q}^T}[Y_T]. \quad (3.54)$$

记 τ 为 t 之后的停时, 对任意支付 Y_τ , 有

$$E_t[e^{-\int_t^\tau r_v dv} Y_\tau] = P(t, T) E_t^{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{Y_\tau}{P(\tau, T)} \right]. \quad (3.55)$$

于是, 在 t^* - 远期测度下, 可对 D_1 、 D_2 和 D_3 做如下简化:

$$\begin{aligned} D_1 &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} [e^{\gamma \tau_L} I_{\{\tau_L < t^*\}}], \\ D_2 &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} \left[\frac{e^{\gamma \tau_L}}{P(\tau_L, t^*)} I_{\{\tau_L < t^*\}} \right] \\ &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} \left[E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} \left[\frac{e^{\gamma \tau_L}}{P(\tau_L, t^*)} I_{\{\tau_L < t^*\}} \mid \tau_L = \kappa \right] \right], \\ D_3 &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} [\tilde{V}(t^*, S_{t^*}, r_{t^*}) I_{\{\tau_L \geq t^*\}}] \\ &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} [E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} [\tilde{V}(t^*, S_{t^*}, r_{t^*}) I_{\{\tau_L \geq t^*\}} \mid r_{t^*} = r]]. \end{aligned}$$

为了计算 D_1 , 需要知道 $\tau_L \mid \mathcal{F}_t$ 的条件分布. 由 (3.5) 和 (3.6), 在 t^* - 远期测度下, 有 $X_t = \frac{S_t e^{\delta t}}{P(t, t^*)}$. 因为

$$\{\tau_L < y\} = \{\exists t \leq y \mid S_t \geq LP(t, t^*) e^{\gamma t}\} = \left\{ \max_{0 \leq v < y} X_v e^{-(\delta + \gamma)v} \geq L \right\},$$

且 $X_v = X_t e^{M_{\xi_v} - M_{\xi_t} - \frac{\xi_v - \xi_t}{2}} (见 (3.12))$, 所以, 利用文献 [13, 第 3.2.2 小节] 得

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{t^*}(\tau_L < y \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{Q}^{t^*} \left(\max_{t \leq v < y} X_v e^{-(\delta + \gamma)v} \geq L \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{Q}^{t^*} \left(\max_{t \leq v < y} \left(M_{\xi_v} - M_{\xi_t} - \frac{1}{2}(\xi_v - \xi_t) - (\delta + \gamma)(v - t) \right) \geq \ln \frac{L e^{(\delta + \gamma)t}}{X_t} \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{Q}^{t^*} \left(\max_{0 \leq s < y - t} M_{\xi_s} - \frac{1}{2} \xi_s - (\delta + \gamma)s \geq \ln \frac{LP(t, t^*) e^{\gamma t}}{S_t} \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \Phi[\tilde{d}_0^-(y)] + \tilde{\lambda}_t^{1 + \frac{2(\delta + \gamma)(y - t)}{\xi_y - \xi_t}} \Phi[\tilde{d}_0^+(y)], \end{aligned} \quad (3.56)$$

其中 $\tilde{\lambda}_t$ 和 $\tilde{d}_0^\pm$ 分别由 (3.48) 和 (3.51) 所定义. (3.56) 关于 y 的导数即为首达时间 τ_L 的密度函数 $\tilde{\varphi}(y)$ (见 (3.46)). 我们计算

$$\begin{aligned} D_1 &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} [e^{\gamma \tau_L} I_{\{\tau_L < t^*\}}] \\ &= P(t, t^*) \int_t^{t^*} \tilde{\varphi}(y) e^{\gamma y} dy. \end{aligned} \quad (3.57)$$

为计算 D_2 , 在 $\tau_L = \kappa$ 的情形下, 需要知道 $r_\kappa \mid \kappa$ 的条件分布. 参照 (3.14), 在 t^* - 远期测度下, 利率 r_κ 可写为

$$r_\kappa = r_t e^{-a(\kappa - t)} + \int_t^\kappa e^{-a(\kappa - s)} [(\theta(s) - \sigma_2^2 G(s, \kappa)) ds + \sigma_2 dW_{2s}^{t^*}].$$

显然, $r_\kappa \mid \kappa \sim N[\hat{\mu}_1(r_t, t, \kappa), \hat{\sigma}_1^2(t, \kappa)]$, 其中 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\sigma}_1^2$ 分别由 (3.25) 和 (3.27) 所定义. 将 (3.3) 给出的 $P(\kappa, t^*)$ 代入 D_2 中, 得

$$\begin{aligned} &E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} \left[\frac{e^{\gamma \tau_L}}{P(\tau_L, t^*)} \mid \tau_L = \kappa \right] \\ &= E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} \left[\exp \left\{ \gamma \tau_L - \int_{\tau_L}^{t^*} \left[\frac{1}{2} \sigma_2^2 G^2(u, t^*) - \theta(u) G(u, t^*) \right] du + G(\tau_L, t^*) r_{\tau_L} \right\} \mid \tau_L = \kappa \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left\{ \gamma \kappa - \int_{\kappa}^{t^*} \left[\frac{1}{2} \sigma_2^2 G^2(u, t^*) - \theta(u) G(u, t^*) \right] du \right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{\widehat{\sigma}_1(t, \kappa)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{G(\kappa, t^*) r} \phi \left(\frac{r - \widehat{\mu}_1(r_t, t, \kappa)}{\widehat{\sigma}_1(t, \kappa)} \right) dr, \\
 &= \exp \left\{ \gamma \kappa - \int_{\kappa}^{t^*} \left[\frac{1}{2} \sigma_2^2 G^2(u, t^*) - \theta(u) G(u, t^*) \right] du \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ G(\kappa, t^*) \widehat{\mu}_1(r_t, t, \kappa) + \frac{G^2(\kappa, t^*) \widehat{\sigma}_1^2(t, \kappa)}{2} \right\}. \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 D_2 &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} \left[E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} \left[\frac{e^{\gamma \tau_L}}{P(\tau_L, t^*)} I_{\{\tau_L < t^*\}} \mid \tau_L = \kappa \right] \right] \\
 &= P(t, t^*) \int_t^{t^*} \widetilde{\varphi}(\kappa) \exp \left\{ \gamma \kappa - \int_{\kappa}^{t^*} \left[\frac{1}{2} \sigma_2^2 G^2(u, t^*) - \theta(u) G(u, t^*) \right] du \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ G(\kappa, t^*) \widehat{\mu}_1(r_t, t, \kappa) + \frac{G^2(\kappa, t^*) \widehat{\sigma}_1^2(t, \kappa)}{2} \right\} d\kappa. \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

为了计算 D_3 , 我们需要 $(S_{t^*}, \tau_L | r_{t^*})$ 的联合分布. 在 t^* - 远期测度下, 利率 r_{t^*} 和对数价格 $\ln \frac{X_{t^*}}{X_t}$ 分别为

$$\begin{aligned}
 r_{t^*} &= r_t e^{-a(t^*-t)} + \int_t^{t^*} e^{-a(t^*-s)} [(\theta(s) - \sigma_2^2 G(s, t^*)) ds + \sigma_2 dW_{2s}^{t^*}], \\
 \ln \frac{X_{t^*}}{X_t} &= \int_t^{t^*} \sigma_1 dW_{1s}^{t^*} + \int_t^{t^*} \sigma_2 G(s, t^*) dW_{2s}^{t^*}.
 \end{aligned}$$

因此, 它们遵循一个二元正态分布

$$\left(r_{t^*}, \ln \frac{X_{t^*}}{X_t} \right) \sim N[\widehat{\mu}_1(r_t, t, t^*), 0, \widehat{\sigma}_1^2(t, t^*), \widehat{\sigma}_2^2(t, t^*), \widehat{\rho}(t, t^*)],$$

其中 $\widehat{\mu}_1, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2$ 和 $\widehat{\rho}$ 由 (3.25) 和 (3.27)–(3.30) 给出. $\ln \frac{X_{t^*}}{X_t} | r_{t^*}$ 的条件分布为 $N[\widetilde{\mu}(r_{t^*}; r_t, t, t^*), \widetilde{\sigma}^2(t, t^*)]$, 其中 $\widetilde{\mu}$ 和 $\widetilde{\sigma}^2$ 分别由 (3.49) 和 (3.50) 给出. 在 t^* - 远期测度下, $X_{t^*} = \frac{S_{t^*}^*}{P(t^*, t^*)} = S_{t^*} e^{\delta t^*}$ (注意 $P(t^*, t^*) = 1$), 以及利用文献 [7, 引理 1] 中的 (S_{t^*}, τ_L) 的联合分布, 得

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{Q}^{t^*}[S_{t^*} \leq x, \tau_L \geq t^* | r_{t^*} = r] \\
 &= \mathbb{Q}^{t^*}[S_{t^*} \leq x, S_v < LP(v, t^*) e^{\gamma v}, \text{ 对 } v \in [t, t^*) | r_{t^*} = r] \\
 &= \mathbb{Q}^{t^*}[X_{t^*} e^{-\delta t^*} \leq x, X_v e^{-\delta v} < L e^{\gamma v}, \text{ 对 } v \in [t, t^*) | r_{t^*} = r] \\
 &= \Phi[\widetilde{d}_1^-(x)] - \widetilde{\lambda}_t^{\frac{2(\delta+\gamma)(t^*-t)-2\widetilde{\mu}(r; r_t, t, t^*)}{\widehat{\sigma}^2(t, t^*)}} \Phi[\widetilde{d}_1^+(x)], \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

其中 $\widetilde{d}_1^\pm$ 由 (3.52) 给出. 于是可得

$$\begin{aligned}
 D_3 &= P(t, t^*) E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} [E_t^{\mathbb{Q}^{t^*}} [\widetilde{V}(t^*, S_{t^*}, r_{t^*}) I_{\{\tau_L \geq t^*\}} | r_{t^*} = r]] \\
 &= P(t, t^*) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\widehat{\sigma}_1(t, t^*)} \phi \left(\frac{r - \widehat{\mu}_1(r_t, t, t^*)}{\widehat{\sigma}_1(t, t^*)} \right) \\
 &\quad \times \int_0^{L e^{\gamma t^*}} \widetilde{V}(t^*, x, r) \widetilde{u}(x, r; r_t, t, t^*) dx dr, \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{u}(x, r; r_t, t, t^*)$ 由 (3.47) 给出, 它是 (3.60) 所表示的函数关于 x 的导数. 将 (3.57)、(3.59) 和 (3.61) 代入到 (3.53) 中, 定理得证. $\square$

4 数值分析

本节通过执行算法来寻找最优执行边界以及计算常数利率和随机利率下的股票抵押贷款在不同贷款额下的价值和服务费. 大量的数值例子用来比较无封顶的股票抵押贷款和封顶股票抵押贷款, 并对股票抵押贷款的价值、最优执行边界、贷款本金、到期日、服务费以及股价之间的关系进行了分析. 通过实验发现, 在相同的条件下, 封顶股票抵押贷款比无封顶的股票抵押贷款有更低的服务费. 注意到股票抵押贷款的定义给出了如下的关系:

$$\text{股票抵押贷款的价值} = \text{股价}(S) - \text{贷款额}(K) + \text{服务费}(C).$$

4.1 常数利率情形下的数值分析

图 1 绘制了 $T = 5$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $L = 80$, $r = 0.05$ 时, 常数利率下封顶股票抵押贷款在贷款额 K 分别为 50、60、70、80 时的最优执行边界及可执行范围. 以 $K = 50$ 为例, 可执行范围是曲线 ABC 上面的区域. 美式封顶式股票抵押贷款的最优执行边界是 ABC 曲线, 不带封顶的股票抵押贷款的最优执行边界是 ABC 曲线上的实线, 带封顶的和不带封顶的股票抵押贷款的最优执行边界的交点是 B 点. 从图 1 可以看出, 最优执行边界关于贷款额单调递增, 且贷款额 K 越大, 封顶式股票抵押贷款的可执行区域就越小.

图 2 绘制了参数设置为 $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $L = 80$, $K = 70$, $r = 0.05$ 时, 常数利率下封顶式股票抵押贷款在到期日 T 分别为 1、3、5、7 时的最优执行边界以及可执行范围. 以 $T = 7$ 为例, 可执行范围是曲线 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 上面的区域. 从图 2 可以看出最优执行边界关于合同到期日单调递增, 且贷款时间 T 越长, 有封顶的股票抵押贷款的执行区域就越小.

图 3 研究了在 $T = 5$, $r = 0.05$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $K = 70$, $L = 120$ 的设置下, 无封顶的股票抵押贷款和封顶股票抵押贷款的价值与股价 S_0 以及它们的服务费与股价 S_0 之间的关系. 图 3(a) 显示了无封顶股票抵押贷款和封顶股票抵押贷款的价值都随着股价 S_0 的增长而增大, 而且在相同的

图 1 常数利率下, 贷款额 K 取不同值时封顶股票抵押贷款的最优执行边界. 参数设定: $T = 5$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $L = 80$, $r = 0.05$

图 2 常数利率下, T 分别为 1、3、5、7 时的封顶股票抵押贷款的最优执行边界. 参数设定: $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $L = 80$, $K = 70$, $r = 0.05$

图 3 (a) 有封顶与无封顶的股票抵押贷款关于初始股价 S_0 的对比图; (b) 服务费关于初始股价 S_0 的对比图. 参数设定: $T = 5$, $r = 0.05$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $K = 70$, $L = 120$

股价 S_0 下, 封顶股票抵押贷款的价值比无封顶的股票抵押贷款的价值要小. 从图 3(b) 可看出服务费随着股价 S_0 的增长而降低, 而且在相同的股价 S_0 下, 封顶股票抵押贷款的服务费比无封顶的股票抵押贷款的服务费要低.

图 4 研究了 $T = 1$, $r = 0.05$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $S_0 = 100$, $L = 120$ 设置下, 无封顶股票抵押贷款和有封顶股票抵押贷款的价值与贷款额 K 以及服务费与贷款额 K 之间的关系. 图 4(a) 显示无封顶股票抵押贷款和封顶股票抵押贷款的价值都随着贷款额 K 的增长而降低, 并且在相同的贷款额 K 下, 封顶股票抵押贷款的价值比无封顶的股票抵押贷款的价值要小. 从图 4(b) 可看出服务费随着贷款额 K 的增长而增大, 并且在相同的贷款额 K 下, 有封顶的股票抵押贷款的服务费比无封顶的股票抵押贷款的服务费要低. 图 4 所探讨的关系进一步显示在表 1 (参数设定为 $S_0 = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $L = 120$. V 表示无封顶的股票抵押贷款价值, V^L 表示有封顶的股票抵押贷款的价值, C_1 表示无封顶的股票抵押贷款的服务费, C_2 表示有封顶的股票抵押贷款的服务费) 中. 从表中可以得知, 在参数设定为 $S_0 = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $L = 120$ 下, 当贷款额 $K \geq 85$ 时, 借款人选择封顶股票抵押贷款比选择无封顶的股票抵押贷款会获得更多的实际金额.

图 4 (a) 有封顶与无封顶的股票抵押贷款关于贷款额 K 的对比图; (b) 服务费关于贷款额 K 的对比图. 参数设定: $T = 1$, $r = 0.05$, $\gamma = 0.07$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $S_0 = 100$, $L = 120$

表 1 $t = 0$ 时刻, 常数利率下贷款额 K 取不同值时的股票抵押贷款价值以及服务费

K	V	V^L	C_1	C_2	$K - C_1$	$K - C_2$	$C_1 - C_2$
80	22.1424	22.1424	2.1424	2.1424	77.8576	77.8576	0.0000
85	18.6772	18.6524	3.6772	3.6524	81.3228	81.3476	0.0249
90	15.6285	15.4239	5.6285	5.4239	84.3715	84.5761	0.2046
95	12.9799	12.4579	7.9799	7.4579	87.0201	87.5421	0.5221
100	10.7061	9.7130	10.7061	9.7130	89.2939	90.2870	0.9931
105	8.7753	7.1421	13.7753	12.1421	91.2247	92.8579	1.6332
110	7.1519	4.6965	17.1519	14.6965	92.8481	95.3035	2.4554
115	5.7990	2.3298	20.7990	17.3298	94.2010	97.6702	3.4692
120	4.6807	0.0009	24.6807	20.0009	95.3193	99.9991	4.6798

4.2 随机利率情形下的数值分析

图 5 绘制了在 $T = 1$, $\underline{r} = 0$, $\bar{r} = \frac{\theta}{a} = 0.07$, $\gamma = 0.07$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.01$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0$, $a = 0.005$, $K = 90$, $L = 120$ 的设置下, 利率是随机的封顶式股票抵押贷款的提前执行边界面和执行区域. 可以观察到, 最优执行边界关于距离到期日的时间单调不减, 而且关于利率也是非增的. 图 6 绘制了无风险利率 r 分别为 0.0589、0.0405、0.0221、0.0037 下的封顶股票抵押贷款的最优执行边界面的横截面, 从图中可以看出, 随着利率的增大, 最优执行的可执行区域变小. 图 7 展示了随机利率下的有封顶与无封顶的股票抵押贷款的价值和服务费与初始股价 S_0 之间的关系, 从图 7(a) 可以看出股票抵押贷款的价值都随初始股价呈递增趋势, 且带封顶的股票抵押贷款的价值要低于不带封顶的股票抵押贷款的价值. 从图 7(b) 可以看出, 服务费关于初始股价是单调递减的, 且在相同环境下带封顶的股票抵押贷款的服务费小于不带封顶的服务费. 这些与常数利率的情形是相同的. 图 8 描绘了随机利率下的有封顶与无封顶的股票抵押贷款的价值和服务费分别与贷款额之间的关系. 从图 8(a) 可以看出, 股票抵押贷款的价值都随贷款额的增加而减少, 且相同条件下, 带封顶的股票抵押贷款比不带封顶的股票抵押贷款的价值要小. 从图 8(b) 可以观察到股票抵押贷款的服务费都随贷款额的增加而增加. 通过对比常数利率

图 5 (网络版彩图) 随机利率下的封顶股票抵押贷款的最优执行边界面. 参数设置如下: $T = 1$, $\underline{r} = 0$, $\bar{r} = \frac{\theta}{\alpha} = 0.07$, $\gamma = 0.07$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.01$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0$, $a = 0.005$, $K = 90$, $L = 120$

图 6 不同利率下的最优执行边界的横截面. 实线表示边界 $B(t, \cdot)$ 以及虚线表示上限 $LP(t, \cdot)e^{\gamma t}$. 参数设定为 $T = 1$, $\underline{r} = 0$, $\bar{r} = \frac{\theta}{\alpha} = 0.07$, $\gamma = 0.07$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.01$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0$, $a = 0.005$, $K = 90$, $L = 120$

图 7 随机利率下的有封顶与无封顶的股票抵押贷款的价值和服务费与股价之间的关系. (a) 股票抵押贷款的价值关于初始股价 S_0 的对比图; (b) 服务费关于初始股价 S_0 的对比图. 参数设定为 $T = 1$, $\underline{r} = 0$, $\bar{r} = \frac{\theta}{\alpha} = 0.07$, $\gamma = 0.07$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.01$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0$, $a = 0.005$, $r_0 = 0.0467$, $K = 100$, $L = 120$

下的表 1 与随机利率下的表 2 可以发现, 与常数利率相比, 在随机利率下, 带封顶和不带封顶的股票抵押贷款的服务费差额要更加明显. 此外, 表 2 还表明, 当贷款额 $K \geq 85$ 时, 借款人选择封顶股票抵押贷款比选择无封顶的股票抵押贷款会获得更多的实际金额.

为了进行比较, 我们开发了随机利率模型下的美式封顶股票抵押贷款的偏微分方程方法. 美式封顶股票抵押贷款的价格 $\tilde{V}^L(t, S_t, r_t)$ 可表示为

$$\tilde{V}^L(t, S_t, r_t) = \begin{cases} S_t \wedge LP(t, T)e^{\gamma t} - Ke^{\gamma t}, & S_t \geq LP(t, T)e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \tilde{V}(t, S_t, r_t), & S_t < LP(t, T)e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t), \quad t^* \leq t \leq T, \\ \tilde{C}^L(t, S_t, r_t), & S_t < LP(t, T)e^{\gamma t} \wedge B(t, r_t), \quad 0 \leq t < t^*, \end{cases}$$

由 Itô 引理和无套利机会原则得, $\tilde{V}$ 和 $\tilde{C}^L$ 分别满足如下的偏微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + (r - \delta)S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} + (\theta - ar) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2} \\ + \rho S \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S \partial r} - r\tilde{V} = 0, \quad (S, t, r) \in (0, B(t, r)) \times (0, T) \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (4.1)$$

图 8 随机利率下的有封顶与无封顶的股票抵押贷款的价值和服务费与贷款额之间的关系. (a) 股票抵押贷款的价值关于贷款额 K 的对比图; (b) 服务费关于贷款额 K 的对比图. 参数设定为 $T = 1$, $\underline{r} = 0$, $\bar{r} = \frac{\theta}{a} = 0.07$, $\gamma = 0.07$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.01$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0$, $a = 0.005$, $S_0 = 100$, $r_0 = 0.0467$, $L = 120$

表 2 在时刻 $t = 0$, 随机利率下贷款额 K 取不同值时的股票抵押贷款价值和服务费 (参数设定为 $S_0 = 100$, $T = 1$, $r_0 = 0.0467$, $\underline{r} = 0$, $\bar{r} = \frac{\theta}{a} = 0.07$, $\gamma = 0.07$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.01$, $a = 0.005$, $\delta = 0.05$, $L = 120$. V 表示无封顶的股票抵押贷款价值, V^L 表示有封顶的股票抵押贷款的价值, C_1 表示无封顶的股票抵押贷款的服务费, C_2 表示有封顶的股票抵押贷款的服务费)

K	V	V^L	C_1	C_2	$K - C_1$	$K - C_2$	$C_1 - C_2$
80	23.1369	23.1369	3.1369	3.1369	76.8631	76.8631	0.0000
85	20.0448	19.3302	5.0448	4.3302	79.9552	80.6698	0.7145
90	17.3293	15.8031	7.3293	5.8031	82.6707	84.1969	1.5262
95	14.9529	12.4949	9.9529	7.4949	85.0471	87.5051	2.4580
100	12.8804	9.4330	12.8804	9.4330	87.1196	90.5670	3.4474
105	11.0788	6.5292	16.0788	11.5292	88.9212	93.4708	4.5496
110	9.5173	3.3360	19.5173	13.3360	90.4827	96.6640	6.1813

以及

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{C}^L}{\partial t} + (r - \delta)S \frac{\partial \tilde{C}^L}{\partial S} + (\theta - ar) \frac{\partial \tilde{C}^L}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}^L}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}^L}{\partial r^2} \\ & + \rho S \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 \tilde{C}^L}{\partial S \partial r} - r \tilde{C}^L = 0, \quad (S, t, r) \in (0, LP(t, t^*)e^{\gamma t}) \times (0, t^*) \times (0, \infty). \end{aligned} \quad (4.2)$$

为了获得 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{C}^L$ 的价值, (4.1) 和 (4.2) 需要用一组适当的边界条件来解决. 因为在到期日股票抵押贷款的价值和收益是一样的, 所以有 $\tilde{V}(T, S, r) = \max\{S - Ke^{\gamma T}, 0\}$. 另一方面, 当股票价格为 0 时, 一个理性的投资者永远不会选择偿还股票抵押贷款. 因此, 边界条件在 $S = 0$ 时满足 $\tilde{V}(t, 0, r) = 0$ 和 $\tilde{C}^L(t, 0, r) = 0$. 假设股票贷款价格和它的 delta 值在自由边界上是连续的, 即

$$\begin{aligned} & \lim_{S \rightarrow B(t, r)} \tilde{V}(t, S, r) = B(t, r) - Ke^{\gamma t}, \\ & \lim_{S \rightarrow LP(t, t^*)e^{\gamma t}} \tilde{C}^L(t, S, r) = LP(t, t^*)e^{\gamma t} - Ke^{\gamma t}, \\ & \lim_{S \rightarrow B(t, r)} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} = 1, \\ & \tilde{C}^L(t^*, S, r) = \tilde{V}(t^*, S, r). \end{aligned}$$

在数学上, $r = 0$ 是所谓的退化边界, 如果相应的 Fichera 函数是非负的, 则不需要沿着退化边界设置边界条件. (4.1) 和 (4.2) 的 Fichera 函数为 $\theta - ar - \frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2$ 在 $r = 0$ 时是正的, 其理由是 $\rho \leq 0$ 且 σ_1 和 σ_2 是正的常数. 因此, 在 $r = 0$ 时不应该强加任何边界条件.

鉴于美式看涨期权的价值受到股票价格和相应的欧式期权的限制, 显然,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{V}(t, S, r) = e^{-\delta(T-t)}S, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{C}^L(t, S, r) = 0.$$

总而言之, 在随机利率框架下的股票抵押贷款定价的偏微分方程系统为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + (r - \delta)S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} + (\theta - ar) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2} + \rho S \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S \partial r} - r \tilde{V} = 0, \\ \tilde{V}(T, S, r) = \max\{S - Ke^{\gamma T}, 0\}, \\ \tilde{V}(t, B(t, r), r) = B(t, r) - Ke^{\gamma t}, \\ \tilde{V}(t, 0, r) = 0, \\ \left. \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} \right|_{S=B(t, r)} = 1, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{V}(t, S, r) = e^{-\delta(T-t)}S, \end{cases} \quad (4.3)$$

以及

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{C}^L}{\partial t} + (r - \delta)S \frac{\partial \tilde{C}^L}{\partial S} + (\theta - ar) \frac{\partial \tilde{C}^L}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}^L}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}^L}{\partial r^2} + \rho S \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 \tilde{C}^L}{\partial S \partial r} - r \tilde{C}^L = 0, \\ \tilde{C}^L(t^*, S, r) = \tilde{V}(t^*, S, r), \\ \tilde{C}^L(t, 0, r) = 0, \\ \tilde{C}^L(t, LP(t, t^*)e^{\gamma t}, r) = LP(t, t^*)e^{\gamma t} - Ke^{\gamma t}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{C}^L(t, S, r) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

表 3 随机利率下求解股票抵押贷款的价值和服务费的方法对比 (参数取为 $S_0 = 100$, $T = 1$, $r_0 = 0.03$, $\underline{r} = 0$, $\bar{r} = 0.18$, $\gamma = 0.07$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.01$, $a = 0.005$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0$, $\theta(t) = a\bar{r}$)

K	本文方法		有限差分法	
	价值	服务费	价值	服务费
80	22.7576	2.7576	22.8820	2.8820
90	16.8857	6.8857	17.0160	7.0160
100	12.4442	12.4442	12.5566	12.5566
110	9.1235	19.1235	9.2131	19.2131
120	6.6647	26.6647	6.7334	26.7334
CPU 时间 (s)	132.7		421.8	

为了求解偏微分方程 (4.3) 和 (4.4), 我们需要找到 t^* 使得

$$LP(t, T)e^{\gamma t} = B(t, r),$$

如果不使用 $B(t, r)$ 的积分表达式 (3.40), 这似乎并不容易. 考虑到这一困难, 我们仅用本文方法和有限差分法对无封顶的股票贷款进行比较. 对于有限差分法的计算, 我们把网格分区 $\Delta S = S_{\max}/400$, 其中 $S_{\max} = 500$, $\Delta r = \bar{r}/60$, 其中 $\Delta t = 1/30000$. 表 3 中的数值结果显示本文中的方法比有限差分法快.

5 结论

本文研究了股票价格服从几何 Brown 运动模型和随机利率模型的有限期封顶式股票抵押贷款. 首先推导出了无封顶股票抵押贷款的提前执行边界的积分方程; 然后给出了带封顶的股票抵押贷款的解析公式. 利用积分方程的数值解, 计算了封顶式股票抵押贷款的价值. 最后给出了数值算例.

参考文献

- 1 Xia J, Zhou X Y. Stock loans. *Math Finance*, 2007, 17: 307–317
- 2 Dai M, Xu Z Q. Optimal redeeming strategy of stock loans with finite maturity. *Math Finance*, 2011, 21: 775–793
- 3 Pascucci A, Suárez-Taboada M, Vázquez C. Mathematical analysis and numerical methods for a PDE model of a stock loan pricing problem. *J Math Anal Appl*, 2013, 403: 38–53
- 4 Lu X, Putri E R M. Semi-analytic valuation of stock loans with finite maturity. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2015, 27: 206–215
- 5 Liu G, Xu Y. Capped stock loans. *Comput Math Appl*, 2010, 59: 3548–3558
- 6 Liang Z, Wu W, Jiang S. Stock loan with automatic termination clause, cap and margin. *Comput Math Appl*, 2010, 60: 3160–3176
- 7 Broadie M, Detemple J. American capped call options on dividend-paying assets. *Rev Financ Stud*, 1995, 8: 161–191
- 8 Chen W, Xu L, Zhu S P. Stock loan valuation under a stochastic interest rate model. *Comput Math Appl*, 2015, 70: 1757–1771
- 9 Kim I J, Yu G G. An alternative approach to the valuation of American options and applications. *Rev Deriv Res*, 1996, 1: 61–85
- 10 Bernard C, MacKay A, Muehlbeyer M. Optimal surrender policy for variable annuity guarantees. *Insurance Math Econom*, 2014, 55: 116–128
- 11 Björk T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford: Oxford University Press, 2004

- 12 Karatzas I, Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York: Springer, 1991
- 13 Jeanblanc M, Yor M, Chesney M. Mathematical Methods for Financial Markets. Berlin: Springer, 2006

Pricing finite-maturity American capped stock loan

Jingtang Ma, Li Yan & Zhiqiang Zhou

Abstract In this paper we study the valuation of finite-maturity American capped stock loan using the stochastic approach. The stock loans are loans with stocks as collateral and their valuation is a kind of optimal stopping problems. The capped stock loan is a kind of product incorporating a “cap” feature to the stock loans by setting a limit for the stock price, in which way the lender can avoid the possible large loss due to the rise of the stock price. This paper utilizes the stochastic approach to derive an integral equation for the optimal exercise boundary function and then obtain the analytical formulas for the price of the finite-maturity American capped stock loan. A stochastic interest rate model is also studied in this paper. Numerical examples are carried out to investigate the properties of the optimal exercise boundaries.

Keywords capped stock loan, stochastic interest rate, zero-coupon bond, integral equation, optimal exercise boundary

MSC(2010) 91G20, 91G60

doi: 10.1360/SCM-2016-0618