算子尺度稳定随机场的局部不确定性和局部时的联合连续性

倪文清^{1,2}, 陈振龙^{1*}

1. 浙江工商大学统计与数学学院, 杭州 310018;

2. 集美大学理学院, 厦门 361021

E-mail: wqni@jmu.edu.cn, zlchenv@163.com

收稿日期: 2018-05-27; 接受日期: 2018-09-01; 网络出版日期: 2018-12-12; * 通信作者

教育部人文社会科学研究规划基金 (批准号: 18YJA910001)、国家自然科学基金 (批准号: 11371321)、全国统计科学研究项目 (批准号: 2017LY51)、浙江省统计重点研究课题 (批准号: 18TJZZ08) 和福建省中青年教师教育科研基金 (批准号: JAT170334) 资助项目

摘要 设 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是一个具有稳定 (stable) 增量的实值可调和算子尺度稳定随机场. 本文利用 Fourier 分析方法给出了该随机场的局部不确定性, 并应用局部不确定性得到了其局部时存在和联合连续的充分条件.

关键词 可调和算子尺度 稳定随机场 局部不确定性 局部时 联合连续性

MSC (2010) 主题分类 60G17, 60G18, 60G52, 60G60

1 引言

由于理论的进展和应用的需要, 越来越多更为一般的随机过程和随机场应运而生, 其中典型的例子有算子自相似过程和算子尺度随机场. 许多学者利用这些随机过程和随机场来建立多元时间序列和统计推断的泛函中心极限定理, 也用它们来模拟空间统计学、随机水文学和数字图像处理中的各种现象 (参见文献 [1–4]).

最近, Li 和 Xiao^[5] 将算子自相似和算子尺度的概念拓展到向量值随机场, 并给出了这两类过程的一个统一框架. 他们利用齐次函数和随机积分表示构造了两类算子自相似向量值随机场, 新构造的随机场是上述两类过程的一般化. Li 和 Xiao^[5] 也对尺度算子的特征进行刻画, 更进一步的结果参见文献 [6]. 这些随机场越来越多地被用在空间统计及其应用领域的模型中 (参见文献 [7, 8]). 因此, 对这些随机场, 无论是理论还是应用的研究都具有十分重要的意义.

本文研究一类可调和算子尺度稳定 (stable) 随机场的轨道性质, 主要讨论其局部不确定性和局部时的联合连续性. 下面先给出该随机场的定义.

英文引用格式: Ni W Q, Chen Z L. Local nondeterminism and joint continuity of the local times for operator-scaling stable random fields (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 301–316, doi: 10.1360/SCM-2018-0367

设 $\alpha \in (0, 2)$ 和 $H \in (0, 1)$ 是两个给定的实数, E 是一个所有特征值的实部为正的 $N \times N$ 矩阵, 称 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是 Hurst 指数为 H 的实值可调和算子尺度稳定随机场 (harmonizable operator-scaling stable random fields, HOSSRFs), 即所谓的 $(N, 1)$ - 随机场,

$$X(t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1}{\psi(\xi)^{H+q/\alpha}} W_\alpha(d\xi), \quad (1.1)$$

其中 $\langle t, \xi \rangle$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中 t 和 ξ 的 Euclid 内积; $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ 是连续的 E - 齐次函数, 且满足当 $x \neq 0$ 时, $\psi(x) \neq 0$; $q = \operatorname{trace}(E)$ 是矩阵 E 的迹; W_α 是 $\mathbb{R}^N$ 上一个由 Lebesgue 测度 λ_N 控制的各向同性、独立分散和对称的复值 α - 稳定 (SaS) 随机测度. E - 齐次函数的定义参见文献 [9], 而独立分散和对称的 α - 稳定随机测度的定义参见文献 [10].

HOSSRFs 是算子尺度稳定随机场的一种调和表示方式, 这种表示方式首先由 Biermé 等 [9] 给出. Biermé 等 [9] 证明了由 (1.1) 定义的随机场 $X(t)$ 有意义且随机连续的充分必要条件是 $H \in (0, a_1)$, 其中 a_1 是矩阵 E 所有特征值实部的最小值. 他们还证明了 $X(t)$ 是具有平稳增量的算子尺度随机场. 当 $\psi(\xi) = |\xi|$ 且 E 为单位矩阵时, HOSSRFs 简化为调和分数稳定随机场 (harmonizable fractional stable fields, HFSFs), 即 HOSSRFs 是 HFSFs 的推广.

HOSSRFs 作为 HFSFs 的自然推广, 很多学者研究了它与 HFSFs 相对应的各种样本轨道性质, 如 Hölder 规则性 [11]、确切的连续模 [12] 和不变原理 [13] 等. 最近, Ayache 和 Xiao [14] 研究了 HFSFs 的局部不确定性和局部时的联合连续性. 由于局部不确定性是处理相依结构随机场的有效工具, Berman [15] 在研究 Gauss 随机过程时首先引进了局部不确定性, 随后, Pitt [16] 将它推广到 Gauss 随机场的情形, Nolan [17] 进一步将它推广到稳定随机过程和随机场的情形. 关于局部不确定性的内容可参见文献 [18, 19]. 如果随机过程或随机场具有局部不确定性, 我们就可以使用它来研究其局部时的联合连续性. 本文的主要目的是利用 Fourier 分析方法给出 HOSSRFs 的局部不确定性, 并应用该局部不确定性确定其局部时的存在性和联合连续性.

本文剩余内容结构如下: 第 2 节是一些准备工作, 介绍了 Nolan [17] 所定义的稳定过程局部不确定性的概念、正定矩阵的极坐标变换公式和对称 α - 稳定过程的随机测度的随机积分, 并给出一些基本引理. 第 3 节给出了本文的主要结论, 即 HOSSRFs 的局部不确定性. 最后一节, 利用第 3 节的局部不确定性给出了 HOSSRFs 局部时的联合连续性.

下面给出本文的一些记号. 对任意的正整数 n , 用 $\mathbb{R}^n$ 表示 Euclid 空间. $\mathbb{R}^n$ 的元素记为 $t = (t_1, \dots, t_n)$, 或者当 $t_1 = \dots = t_n = c$ 时, 记成 $\langle c \rangle$. 对分量满足 $s_j < t_j$ ($j = 1, \dots, n$) 的 $s, t \in \mathbb{R}^n$, 称 $[s, t] = \prod_{j=1}^n [s_j, t_j]$ 是一个闭区间或闭矩形. $\mathbb{R}^n$ 空间中的内积和范数分别记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $|\cdot|$, 而算子的范数将记为 $\|\cdot\|$.

本文恒以 c 表示非特定的有限正常数, 每次出现可以不同. 第 i 节中的常数用 $c_{i,1}, c_{i,2}, \dots$ 来表示.

2 基本概念和引理

本文中矩阵的极坐标变换是一个重要的工具, 下面先介绍这方面的一些记号. 设 E 是一个 $N \times N$ 阶矩阵, 其所有特征值的实部都是正数, 将其互不相同的特征值实部记为 $a_1, \dots, a_p$ ($p \leq N$). 为方便起见, 不妨设 $a_1 < a_2 < \dots < a_p$. 设 e_{ii} 为矩阵 E 主对角线上的元素, 记 $q = \operatorname{trace}(E) = \sum_{i=1}^N e_{ii}$. 对任意的 $s \in \mathbb{R}^N$, 存在一个关于矩阵 E 的极坐标表示, 将其记为 $(\tau_E(s), l_E(s))$, 即对任给的 $s \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, s 可唯一地表示为 $\tau_E(s)l_E(s)$, 其中 $\tau_E(s)$ 称为径向部分, $l_E(s)$ 称为方向部分. 由于 $\tau_E(s)$ 是关于 s 连

续的, 且当 $s \rightarrow 0$ 时, $\tau_E(s) \rightarrow 0$, 所以可以通过令 $\tau_E(0) = 0$, 将 $\tau_E(s)$ 连续地延拓到整个 $\mathbb{R}^N$ 空间. 关于极坐标表示的更详细介绍, 可参见文献 [9, 12, 20].

对任意的 $r > 0$, 线性算子 r^E 定义为 $r^E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log r)^n E^n}{n!}$. Biermé 等 [9] 利用矩阵 E 特征值的实部和 s 的 Euclid 范数给出了 $\tau_E(s)$ 的上下界.

引理 2.1 对充分小的 $\delta > 0$, 存在正的常数 $c_{2,1}, \dots, c_{2,4}$, 使得对满足 $|s| \leq 1$ 或 $\tau_E(s) \leq 1$ 的所有 $s \in \mathbb{R}^N$, 有

$$c_{2,1}|s|^{1/(a_1-\delta)} \leq \tau_E(s) \leq c_{2,2}|s|^{1/(a_p+\delta)};$$

对满足 $|s| \geq 1$ 或 $\tau_E(s) \geq 1$ 的所有 $s \in \mathbb{R}^N$, 有

$$c_{2,3}|s|^{1/(a_p+\delta)} \leq \tau_E(s) \leq c_{2,4}|s|^{1/(a_1-\delta)}.$$

引理 2.2 设 E 是一个 $N \times N$ 的矩阵, 其所有特征值的实部都是正数 ($0 < a_1 < \dots < a_p$), 则对任意给定的 (充分小) $\delta > 0$, 存在一个正常数 $c_{2,5}$, 使得对任意的 $\theta \in S_N := \{s : \tau_E(s) = 1\}$, 有

$$|r^E \theta| \geq c_{2,5} r^{a_1-\delta}, \quad \forall r \geq 1.$$

证明 由 $\tau_E(\cdot)$ 的齐次性知, $\tau_E(r^E \theta) = r$. 再根据引理 2.1 可得结论成立. $\square$

Biermé 等 [9] 给出了正定矩阵在极坐标下的积分公式.

引理 2.3 在以上假设和记号下, 存在 S_N 上的唯一一个有限的 Radon 测度 μ , 使得对所有 $\mathbb{R}^N$ 上的绝对可积函数 $f(t)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(t) dt = \int_0^\infty \int_{S_N} f(r^E \theta) r^{q-1} \mu(d\theta) dr,$$

其中 $S_N = \{t : \tau_E(t) = 1\}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中在伪度量 τ_E 下的单位球面, 而 q 是正定矩阵 E 的迹.

设 W_α 是 $\mathbb{R}^N$ 上一个由 Lebesgue 测度 λ_N 控制的、独立分散的对称 α -稳定随机测度 (参见文献 [10, 第 3 和 6 章], $0 < \alpha \leq 2$), $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ($t \in \mathbb{R}^N$) 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的复值可测函数, 且 $f \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, 即

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(t, \xi)|^\alpha \lambda_N(d\xi) < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}^N. \quad (2.1)$$

采用文献 [10] 中相同的方法, 可以定义关于 S α S 随机测度的随机积分.

定义 2.1 在条件 (2.1) 下, 随机场

$$Y(t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} f(t, \xi) W_\alpha(d\xi) \quad (2.2)$$

有定义, 且 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是实值 S α S 随机场.

对任意整数 $n \geq 0$, $s^0, \dots, s^n \in \mathbb{R}^N$, 由文献 [10, 定理 6.3.1 和 6.3.4], 经过适当的规范化处理, 可得随机向量 $(Y(s^0), \dots, Y(s^n))$ 的特征函数为

$$\mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=0}^n b_j Y(s^j) \right\} = \exp \left\{ - \left\| \sum_{j=0}^n b_j f(s^j, \cdot) \right\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha \right\}, \quad (2.3)$$

其中 b_j 是任意的实数, $\|\cdot\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}$ 是 $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ 上的拟范数, 即

$$\|g\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} |g(\xi)|^\alpha \lambda_N(d\xi), \quad \forall g \in L^\alpha(\mathbb{R}^N). \quad (2.4)$$

由 (2.3) 和 (2.4) 知, $\sum_{j=0}^n b_j Y(s^j)$ 的尺度参数为

$$\left\| \sum_{j=0}^n b_j Y(s^j) \right\|_\alpha^\alpha = \left\| \sum_{j=0}^n b_j f(s^j, \cdot) \right\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha. \quad (2.5)$$

下面介绍随机场 Y 的局部不确定性的定义^[17]. 对任意的整数 $n \geq 0$ 和 $s^0, \dots, s^n \in \mathbb{R}^N$, 用符号 $\text{span}\{f(s^1, \cdot), \dots, f(s^n, \cdot)\}$ 表示由函数集 $\{f(s^1, \cdot), \dots, f(s^n, \cdot)\} (\subseteq L^\alpha(\mathbb{R}^N))$ 所生成的 $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ 的子空间, 且 $f(s^0, \cdot)$ 和 $\text{span}\{f(s^1, \cdot), \dots, f(s^n, \cdot)\}$ 的距离记为

$$\begin{aligned} & \|f(s^0, \cdot) - \text{span}\{f(s^1, \cdot), \dots, f(s^n, \cdot)\}\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha \\ &= \inf\{\|f(s^0, \cdot) - g(\cdot)\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha : g(\cdot) \in \text{span}\{f(s^1, \cdot), \dots, f(s^n, \cdot)\}\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

由文献 [14] 可知, 上式等价于

$$\begin{aligned} & \|f(s^0, \cdot) - \text{span}\{f(s^1, \cdot), \dots, f(s^n, \cdot)\}\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha \\ &= \inf\left\{\left\|f(s^0, \cdot) - \sum_{j=1}^n b_j f(s^j, \cdot)\right\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}^\alpha : \forall b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

综合 (2.5) 和 (2.7), 可得

$$\|Y(s^0) - \text{span}\{Y(s^1), \dots, Y(s^n)\}\|_\alpha = \|f(s^0, \cdot) - \text{span}\{f(s^1, \cdot), \dots, f(s^n, \cdot)\}\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}, \quad (2.8)$$

其中 $\text{span}\{Y(s^1), \dots, Y(s^n)\}$ 表示由 $\{Y(s^1), \dots, Y(s^n)\}$ 生成的 $L^\alpha(\Omega)$ 的子空间.

设记号 $s^1 \preceq s^2 \preceq \dots \preceq s^n$ 表示对任意的 $1 \leq k < j \leq n$, 有

$$|s^j - s^{j-1}| \leq |s^j - s^k| \quad (2.9)$$

成立. 显然, 对任意的 n 个点 $s^1, \dots, s^n \in I$, 存在 $\{1, \dots, n\}$ 的一个置换 σ , 使得 $s^{\sigma(1)}, \dots, s^{\sigma(n)}$ 满足 (2.9) (参见文献 [17]).

下面介绍局部不确定性的定义.

定义 2.2^[17] 设 $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是 (2.2) 所定义的随机场, $I \subset \mathbb{R}^N$ 是一个闭矩形. 若 Y 满足下列条件:

- (i) 对任意的 $t \in I$, 有 $\|Y(t)\|_\alpha > 0$;
- (ii) 对所有充分接近且不同的 $s, t \in I$, 有 $\|Y(s) - Y(t)\|_\alpha > 0$;
- (iii) 对任意的 $n > 1$, 有

$$\liminf \frac{\|Y(s^n) - \text{span}\{Y(s^1), \dots, Y(s^{n-1})\}\|_\alpha}{\|Y(s^n) - Y(s^{n-1})\|_\alpha} > 0, \quad (2.10)$$

其中下极限 $\liminf$ 是对所有满足 $s^1 \preceq s^2 \preceq \dots \preceq s^n$, 且 $|s^n - s^1| \rightarrow 0$ 的 $s^1, \dots, s^n \in I$ 取定的, 则称 Y 在 I 上具有 $\|\cdot\|_\alpha$ 局部不确定性 (locally nondeterministic, LND).

3 随机场的局部不确定性

本节将考虑 (1.1) 所定义随机场的局部不确定性. 为了简单起见, 本文剩余部分恒假定 $I = [0, 1]^N$. 下面给出本节的主要定理.

定理 3.1 设 $\alpha \in (0, 2)$, $H \in (0, 1)$, E 是一个所有特征值的实部为正的 $N \times N$ 矩阵, ψ 是一个 E -齐次函数, $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是一个由 (1.1) 所定义的可调和算子尺度稳定随机场, 则下面结论成立:

- (i) 随机场 X 在 I 上具有局部不确定性;
- (ii) 对任意整数 $n \geq 2$, 存在一个仅依赖于 α 、 H 、 N 、 n 、 ψ 和 I 的正常数 $c_{3,1}$, 使得对所有充分接近且满足 (2.9) 的 $s^1, \dots, s^n \in I$, 对所有的 $b_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$), 有

$$\left\| b_1 X(s^1) + \sum_{j=2}^n b_j (X(s^j) - X(s^{j-1})) \right\|_{\alpha} \geq c_{3,1} \left(\|b_1 X(s^1)\|_{\alpha} + \left\| \sum_{j=2}^n b_j (X(s^j) - X(s^{j-1})) \right\|_{\alpha} \right). \quad (3.1)$$

为了证明定理 3.1, 需要下面两个引理.

引理 3.1 若定理 3.1 的条件成立, 则存在正常数 $c_{3,2}$ 和 $c_{3,3}$, 使得

$$c_{3,2} \tau_E(s-t)^H \leq \|X(s) - X(t)\|_{\alpha} \leq c_{3,3} \tau_E(s-t)^H. \quad (3.2)$$

证明 由 (1.1) 和 (2.4) 可得

$$\|X(s) - X(t)\|_{\alpha} = \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle s-t, \xi \rangle} - 1|^{\alpha} \psi(\xi)^{-\alpha H - q} d\xi. \quad (3.3)$$

令 $t - s = \tau_E(s-t)^E \theta$, 再作变量替换 $x = \tau_E(s-t)^{E^T} \xi$ (E^T 表示矩阵 E 的转置), 由引理 2.3 得

$$\begin{aligned} \|X(s) - X(t)\|_{\alpha} &= \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle \theta, \tau_E(s-t)^{E^T} \xi \rangle} - 1|^{\alpha} \psi(\xi)^{-\alpha H - q} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle \theta, x \rangle} - 1|^{\alpha} \psi(\tau_E(s-t)^{-E^T} x)^{-\alpha H - q} \tau_E(s-t)^{-q} dx \\ &= \tau_E(s-t)^{\alpha H} \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle \theta, x \rangle} - 1|^{\alpha} \psi(x)^{-\alpha H - q} dx, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中最后一个等式中用到了函数 ψ 的齐次性. 由于函数 $\theta \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle \theta, x \rangle} - 1|^{\alpha} \psi(x)^{-\alpha H - q} dx$ 在紧集 $S_0 := \{x : \tau_E(x) = 1\}$ 上是连续的, 且该紧集不包含 0 点, 所以存在正常数 $c_{3,2}$ 和 $c_{3,3}$, 使得

$$c_{3,2} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle \theta, x \rangle} - 1|^{\alpha} \psi(x)^{-\alpha H - q} dx \leq c_{3,3}. \quad (3.5)$$

综合 (3.4) 和 (3.5), 结论得证. $\square$

在文献 [14, 引理 3.3] 中, 由于 q_0 是一个固定的数, 而且可替换为任意大于等于 1 的常数, 从而, 下面的引理是文献 [14, 引理 3.3] 的一个直接结论.

引理 3.2 设 $q_0 := \lfloor (H + q/\alpha + q/2)/(a_1 - \delta) \rfloor + 1$, $L_0 := 2q_0 \sqrt{N c_{2,4}^{\alpha_1 - \delta}}$, 其 δ 和 $c_{2,4}$ 由引理 2.1 定义, a_1 是矩阵 E 所有特征值实部的最小值, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整. 设 G 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上具有紧支撑的连续实值函数, 其表示形式由如下的张量积给出:

$$G(s) := \prod_{n=1}^N \tau_{q_0}(L_0 s_n), \quad \forall s = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^N, \quad (3.6)$$

其中 $\tau_{q_0}(s)$ 是 $\mathbb{R}$ 上具有紧支撑为 $[-2q_0, 2q_0]$ 的函数, 其 Fourier 变换为 $\hat{\tau}_{q_0}(v) = v^{-2q_0} \sin^{4q_0} v$ ($v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), 且满足 $\hat{\tau}_{q_0}(0) = 0$, $\tau_{q_0}(0) > 0$, 则下面结论成立:

(i) G 的支撑包含在矩形 $[-(Nc_{2,4}^{\alpha_1-\delta})^{-1/2}, -(Nc_{2,4}^{\alpha_1-\delta})^{1/2}]^N$ 内, 且 $G(0) > 0$;

(ii) G 的 Fourier 变换 $\hat{G}$ 取值于 $[0, 1]$, 且存在一个仅依赖于 q 、 H 和 α 的正常数 $c_{3,4}$, 使得对任意 $v \in \mathbb{R}^N$, 有

$$\hat{G}(v) \leq c_{3,4} \min\{|v|^{2q_0}, |v|^{-2q_0}\}. \quad (3.7)$$

定理 3.1 的证明 以下证明方法基于文献 [14, 命题 3.1] 的思想. 如果我们能够证明: 对任意整数 $n \geq 2$, 存在一个仅依赖于 α 、 H 、 N 、 n 、 ψ 和 I 的正常数 $c_{3,5}$, 使得对所有充分接近且满足 (2.9) 的 $s^1, \dots, s^n \in I$, 对任意的 $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$, 有

$$\left\| X(s^n, \cdot) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j X(s^j, \cdot) \right\|_{\alpha}^{\alpha} \geq c_{3,5} \min\{\tau_E(s^n - s^j)^{\alpha H} : 0 \leq j \leq n-1\}, \quad (3.8)$$

其中 $s^0 = 0$, 则由 (2.7) 和 (2.8) 可得

$$\|X(s^n, \cdot) - \text{span}\{X(s^1), \dots, X(s^{n-1})\}\|_{\alpha} \geq c_{3,5} \min\{\tau_E(s^n - t^j)^H : 0 \leq j \leq n-1\}. \quad (3.9)$$

由引理 3.1 可知, 定义 2.2 中的条件 (i) 和 (ii) 显然满足. 由此及 (3.9) 可核实定义 2.2(iii) 也满足. 因此定理 3.1(i) 得证. 再由定理 3.1(i) 和文献 [17, 定理 3.2] 可得定理 3.1(ii) 成立.

下面分两种情形证明 (3.8) 成立.

(1) 当 $\max\{|b_j| : 1 \leq j \leq n-1\} > 2$ 时, 类似于文献 [14] 中的讨论, 可以证明在这种情形下结论成立.

(2) 当 $\max\{|b_j| : 1 \leq j \leq n-1\} \leq 2$ 时, 下面证明这种情形下 (3.8) 成立. 首先由 (1.1) 和 (2.8) 得

$$\begin{aligned} & \left\| X(s^n, \cdot) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j X(s^j, \cdot) \right\|_{\alpha}^{\alpha} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(e^{i\langle s^n, \xi \rangle} - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j (e^{i\langle s^j, \xi \rangle} - 1) \right) \right|^{\alpha} \psi(\xi)^{-\alpha H - q} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-i\langle s^n - s^j, \xi \rangle} - \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j \right) e^{-i\langle s^n, \xi \rangle} \right) \right|^{\alpha} \psi(\xi)^{-\alpha H - q} d\xi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

为了简便起见, 设 $\bar{s} := (s^1, \dots, s^n) \in \mathbb{R}^{nN}$, $b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 则对任意的 $(\bar{s}, b, \xi) \in \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$, 定义

$$F(\bar{s}, b, \xi) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-i\langle s^n - s^j, \xi \rangle} - \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j \right) e^{-i\langle s^n, \xi \rangle}, \quad (3.11)$$

利用 (3.10) 和 (3.11) 可得

$$\left\| X(s^n, \cdot) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j X(s^j, \cdot) \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{\mathbb{R}^N} |F(\bar{s}, b, \xi)|^{\alpha} \psi(\xi)^{-\alpha H - q} d\xi. \quad (3.12)$$

由 $\max\{|b_j| : 1 \leq j \leq n-1\} \leq 2$, 显然有

$$|F(\bar{s}, b, \xi)| \leq 4n-2. \quad (3.13)$$

为了证明 (3.8), 不妨假设 $\min\{\tau_E(s^n - s^j) : 0 \leq j \leq n-1\} > 0$, 否则结论显然成立. 设 γ 由下面式子定义:

$$\gamma^{-1} := \epsilon \min\{\tau_E(s^n - s^j) : 0 \leq j \leq n-1\}, \quad (3.14)$$

其中 ϵ 是满足 $0 < \epsilon \leq 1$ 的任意常数, 注意 γ^{-1} 是由 $\bar{s}$ 和 ϵ 所确定的. 利用变量替换 $\eta = (\gamma^{-1})^E \xi$ 可得

$$\begin{aligned} (3.12) \text{ 的右边} &= \int_{\mathbb{R}^N} |F(\bar{s}, b, \gamma^E \eta)|^\alpha \psi(\gamma^E \eta)^{-\alpha H - q} \gamma^q d\eta \\ &= \gamma^{-\alpha H} \int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|^\alpha \psi(\eta)^{-\alpha H - q} d\eta, \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中最后一个等式用到了 ψ 的齐次性. 至此, 为了证明 (3.8), 只需证明: 存在仅依赖于 α, H, N, n, ψ 和 ϵ 的常数 $c^* > 0$, 使得对所有的 $b \in A := [-2, 2]^n$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|^\alpha \psi(\eta)^{-\alpha H - q} d\eta \geq c^*. \quad (3.16)$$

由引理 3.2, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|^\alpha \psi(\eta)^{-\alpha H - q} d\eta \geq \int_{\mathbb{R}^N} (|F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)| \psi(\eta)^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(\eta)})^\alpha d\eta. \quad (3.17)$$

由 (3.13) 可得

$$|F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)| \psi(\eta)^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(\eta)} \leq (4n-2) \psi(\eta)^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(\eta)}. \quad (3.18)$$

因为 $\psi(\eta)^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(\eta)}$ 是关于 η 的连续函数, 所以其在闭区域 $\{\eta : 0 < c_1 \leq |\eta| \leq c_2 < \infty\}$ 上有界. 因此只需考虑当 η 在 0 点附近和 η 趋近于 ∞ 时的这两种情形. 由 ψ 的齐次性和 (3.18), 有

$$|F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)| \psi(\eta)^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(\eta)} \leq (4n-2) \tau_E(\eta)^{-H - q/\alpha} \psi(l_E(\eta))^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(\eta)}. \quad (3.19)$$

由于 ψ 是一个齐次的连续函数, 且 $l_E(\eta) \in S_0 = \{x : \tau_E(x) = 1\}$, 所以存在正的常数 m 和 M , 使得 $m \leq \psi(l_E(\eta)) \leq M$. 由此可得

$$(3.19) \text{ 的右边} \leq c \tau_E(\eta)^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(\eta)}. \quad (3.20)$$

当 η 在 0 点附近时, 由引理 2.1 和 3.2, 有

$$(3.19) \text{ 的右边} \leq c |\eta|^{-(H + \frac{q}{\alpha})/(a_1 - \delta)} |\eta|^{q_0} \leq c |\eta|^{\frac{q}{2(a_1 - \delta)} + 1}, \quad (3.21)$$

其中约定 $|\eta|^{-H - q/\alpha} \sqrt{\widehat{G}(0)} = 0$. 当 η 趋近于 ∞ 时, 由引理 2.1 和 3.2, 同理可得

$$\begin{aligned} (3.19) \text{ 的右边} &\leq c |\eta|^{-(H + \frac{q}{\alpha})/(a_1 - \delta)} |\eta|^{-2q_0} \\ &= c |\eta|^{-(2q_0 + H + \frac{q}{\alpha})/(a_1 - \delta)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

由上面的讨论可知, (3.19) 的右边有上界, 即可得

$$0 < c_{3,6} = \sup\{|F(\bar{s}, b, \eta)|\psi(\eta)^{-H-q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)} : (\bar{s}, b, \eta) \in \mathbb{R}^{nN} \times A \times \mathbb{R}^N\} < \infty. \quad (3.23)$$

因此, 对任意的 $(\bar{s}, b, \eta) \in \mathbb{R}^{nN} \times A \times \mathbb{R}^N$, 有

$$0 \leq c_{3,6}^{-1}|F(\bar{s}, b, \eta)|\psi(\eta)^{-H-q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)} \leq 1. \quad (3.24)$$

由此可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|\psi(\eta)^{-H-q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)})^\alpha d\eta \geq c_{3,6}^{\alpha-2} \int_{\mathbb{R}^N} (|F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|\psi(\eta)^{-H-q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)})^2 d\eta. \quad (3.25)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|\widehat{G}(\eta) d\eta \right|^2 \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|\psi(\eta)^{-H-q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)} \cdot \psi(\eta)^{H+q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)} d\eta \right|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|\psi(\eta)^{-H-q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)})^2 d\eta \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\eta)^{2H+2q/\alpha}\widehat{G}(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

下面证明 (3.26) 中最后一个积分有限. 事实上, 首先将其积分区域 $\mathbb{R}^N$ 划分成两部分: $\{\eta : \tau_E(\eta) \geq 1\}$ 和 $\{\eta : \tau_E(\eta) < 1\}$, 并将在上面的定积分分别记为 J_1 和 J_2 . 由 $\psi(\eta)$ 和 $\widehat{G}(\eta)$ 的连续性, 有 $J_2 < \infty$. 再利用引理 3.2 和齐次性, 可得

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{S_N} \mu(d\theta) \int_1^\infty \psi(\theta)^{2H+2q/\alpha} \widehat{G}(r^E \theta) r^{2H+2q/\alpha+q-1} dr \\ &\leq c \int_{S_N} \mu(d\theta) \int_1^\infty |r^E \theta|^{-2q_0} r^{2H+2q/\alpha+q-1} dr \\ &\leq c \int_1^\infty r^{-2q_0(a_1-\delta)} r^{2H+2q/\alpha+q-1} dr, \end{aligned} \quad (3.27)$$

其中倒数第二个不等式由引理 3.2 可得, 而最后一个不等式由引理 2.2 可得. 注意到由引理 3.2 中 q_0 的定义可推得

$$J_1 \leq c \int_1^\infty r^{2H+2q/\alpha+q-1-2q_0(a_1-\delta)} dr < \infty. \quad (3.28)$$

记 $c_{3,8} = J_1 + J_2$, 则由上述讨论可得 $c_{3,8} < \infty$. 由此及 (3.26) 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|\psi(\eta)^{-H-q/\alpha}\sqrt{\widehat{G}(\eta)})^2 d\eta &\geq c \left| \int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta)|\widehat{G}(\eta) d\eta \right|^2 \\ &\geq c \left| \int_{\mathbb{R}^N} F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta) \widehat{G}(\eta) d\eta \right|^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

利用 $F(\bar{s}, b, \eta)$ 的定义和 Fourier 逆变换公式, 可得

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta) \widehat{G}(\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j e^{-i\langle \gamma^{E^T}(s^n - s^j), \xi \rangle} - \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j \right) e^{-i\langle \gamma^{E^T} s^n, \xi \rangle} \right) \widehat{G}(\eta) d\eta \\
&= G(0) - \sum_{j=1}^{n-1} b_j G(-\gamma^{E^T}(s^n - s^j)) - \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j \right) G(-\gamma^{E^T} s^n). \tag{3.30}
\end{aligned}$$

由 (3.14) 和 $\tau_E(s)$ 的齐次性有

$$\begin{aligned}
\tau_E(-\gamma^E(s^n - s^j)) &= \gamma \tau_E((s^n - s^j)) \geq \frac{1}{\epsilon} > 1, \quad \forall j = 1, \dots, n, \\
\tau_E(-\gamma^E s^n) &= \gamma \tau_E((s^n)) > 1.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

由此及引理 2.1 知, 至少存在一个 j , 使得 $|s_j| > -(N \cdot c_{2,4}^{\alpha_1 - \delta})^{-1/2}$. 因此, 由引理 3.2(i) 和 $q_0 \geq 1$, 有

$$G(-\gamma^E(s^n - s^j)) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \text{和} \quad G(-\gamma^E s^n) = 0. \tag{3.32}$$

从而, 由 (3.28) 可得

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} F(\gamma^{E^T} \bar{s}, b, \eta) \widehat{G}(\eta) d\eta = G(0). \tag{3.33}$$

令 $c_{3,7} = c_{3,6}^{\alpha-2} c_{3,8}^{-1} ((2\pi)^N |G(0)|^2)$, 综合上述讨论, 可得 (3.8) 成立. 故定理 3.1 得证. $\square$

4 局部时的联合连续性

设 $Z = \{Z(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是一个定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}^d$ - 值可调和算子尺度稳定随机场, 其定义为

$$Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t)), \tag{4.1}$$

其中各分量 $Z_1(t), \dots, Z_d(t)$ 相互独立, 且与 (1.1) 所定义的 X 具有相同的分布. 本节将研究 (4.1) 所定义的可调和算子尺度稳定随机场的局部时存在和联合连续的充分条件.

随机场 Z 在 $T \subset \mathbb{R}^N$ 上的逗留时定义为

$$\mu(A) = \int_T 1_A(Z(s)) ds, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^d.$$

若 μ 关于 $\mathbb{R}^d$ 上 Lebesgue 测度 λ_d 绝对连续, 则称 Z 的局部时存在, 记为 $\ell(x, T)$, 且

$$\mu(A) = \int_A \ell(x, T) dx.$$

由此可知, $\ell(x, T)$ 是逗留时 μ 的密度, 并称 x 为空间变量, T 为时间变量. 注意, 若 Z 在 T 上的局部时存在, 则对 T 的任意 Borel 子集 S , $\ell(x, S)$ 也存在. 关于向量场的局部时和自相交局部时的相关文献可参见文献 [21–25].

设 $T = \prod_{i=1}^N [a_i, a_i + h_i] \subset \mathbb{R}^N$ 是一个固定矩形, $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}_+^N$. 若局部时存在一个正则修正, 使得它关于变量 $(x, t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^d \times \prod_{i=1}^N [0, h_i]$ 是连续的, 则称 Z 在 T 上具有联合连续的局部时, 仍记为 $\ell(x, \prod_{i=1}^N [a_i, a_i + t_i])$. 当局部时联合连续时, 它将是随机场水平集上的一个自然测度. 这使得局部时成为一个十分有用的研究工具, 可以用来研究与随机场的水平集和逆向集相关的各类分形

性质. 因此, 关于局部时存在性和联合连续性的研究, 以及用它们来研究随机场的分形性质, 已有大量的结果, 详细内容可参见文献 [26–30].

为了本文研究方便, 下面给出局部时的几个性质.

(i) 局部时存在一个可测的修正, 且满足下面的逗留时密度公式, 即对每个 Borel 集 $T \subseteq \mathbb{R}^N$, 每个可测函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\int_T f(Z(t))dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ell(x, T)dx. \quad (4.2)$$

(ii) 局部时有下面的 n 阶矩公式 (参见文献 [21, (25.5) 和 (25.7)]), 即对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^d$, $T \subset I$, $n \geq 1$, 有

$$\mathbb{E}[\ell(x, T)^n] = \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int_{T^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^n \langle u^j, x \rangle \right\} \times \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \langle u^j, Z(t^j) \rangle \right\} d\bar{u} d\bar{t}, \quad (4.3)$$

且对任意的偶数 $n \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ell(x, T) - \ell(y, T))^n] &= \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int_{T^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{j=1}^n \left(\exp \left\{ -i \sum_{j=1}^n \langle u^j, x \rangle \right\} - \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^n \langle u^j, y \rangle \right\} \right) \\ &\quad \times \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \langle u^j, Z(t^j) \rangle \right\} d\bar{u} d\bar{t}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $\bar{u} = (u^1, \dots, u^n)$, $\bar{t} = (t^1, \dots, t^n)$, 且分量分别为 $u^j = (u_1^j, \dots, u_d^j) \in \mathbb{R}^d$, $t^j = (t_1^j, \dots, t_N^j) \in T$.

下面给出了随机场局部时存在的充分条件.

定理 4.1 设 $Z = \{Z(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是一个由 (4.1) 所定义的可调和算子尺度稳定随机场, I 是 $\mathbb{R}^N$ 上的闭矩形. 若 $q > dH$, 则对任意的闭矩形 $T \subseteq I$, 随机场 Z 在 T 上存在局部时 $\ell(x, T) \in L^2(\lambda_d \times \mathbb{P})$, 且 $\ell(x, T)$ 有如下的 L^2 表示:

$$\ell(x, T) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_T \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y, x \rangle} \cdot e^{i\langle y, Z(t) \rangle} dx dt, \quad (4.5)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

证明 由文献 [21, (21.9)] (也可参见文献 [31, 定理 8.6.2]) 可知, 对任意的闭矩形 $T \subseteq I$, 随机场 Z 在 T 存在满足 (4.5) 的局部时 $\ell(x, T)$ 的充分必要条件是

$$\mathcal{I} = \int_{T^2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} e^{i\langle \xi, Z(t) - Z(s) \rangle} d\xi ds dt < \infty. \quad (4.6)$$

从而只需要证明, 当 $q > dH$ 时, (4.6) 成立即可. 事实上, 利用 $Z_1, \dots, Z_d$ 的独立性和 (2.4)–(2.6), 有

$$\mathbb{E} e^{i\langle \xi, Z(t) - Z(s) \rangle} = \prod_{j=1}^d \mathbb{E} e^{i\xi_j(Z_j(t) - Z_j(s))} = \prod_{j=1}^d e^{-|\xi_j|^\alpha \|Z_j(t) - Z_j(s)\|_\alpha^\alpha}. \quad (4.7)$$

由 $\int_{\mathbb{R}} e^{-|u|^\alpha} du < \infty$, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} e^{i\langle \xi, Z(t) - Z(s) \rangle} d\xi \leq c \prod_{j=1}^d \frac{1}{\|Z_j(t) - Z_j(s)\|_\alpha} = \frac{c}{\|X(t) - X(s)\|_\alpha^d}. \quad (4.8)$$

由引理 3.1 可推得 (4.6) 中的积分 $\mathcal{I}$ 小于

$$\int_{T^2} \frac{c}{\|X(t) - X(s)\|_\alpha^d} ds dt \leq \int_{T^2} \frac{c}{\tau_E(s-t)^{dH}} ds dt \leq c \int_0^{r_0} \frac{1}{r^{dH-q+1}} dr, \quad (4.9)$$

其中 $r_0 = \sup\{\tau_E(s-t) : s, t \in T\}$, 而最后一个不等式由引理 2.3 和 r_0 的定义可得. 显然, 当 $q > dH$ 时, $\int_0^{r_0} r^{q-dH-1} dr < \infty$. 由此及 (4.8) 和 (4.9) 可得 (4.6) 成立. 故定理 4.1 得证. $\square$

注 4.1 本文仅给出局部时存在的充分条件, 其实我们也可给出局部时存在的必要条件, 即若随机场 Z 的局部时存在, 则 $dH < N(a_p + \delta)$, 这里 δ 由引理 2.1 所定义. 但是这个必要条件并不是最优的, 我们猜测局部时存在的必要条件可能是 $dH < q$, 然而目前我们还无法给出证明.

下面给出局部时具有联合连续性的充分条件, 其证明方法基于 Nolan^[17] 关于稳定随机场局部时的联合连续性的证明思想.

定理 4.2 设 $Z = \{Z(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ 是一个由 (4.1) 所定义的可调和算子尺度稳定随机场, I 是 $\mathbb{R}^N$ 上的闭矩形. 若 $q > dH$, 则对任意的闭矩形 $T \subseteq I$, 随机场 Z 在 T 上具有几乎处处联合连续的局部时.

为了证明定理 4.2, 需要下面的两个引理, 这两个引理给出了局部时 n 阶矩的上界. 为了符号上的简洁, 令 $D = \bar{B}_\tau(a, r) \subset T$ 表示在拟度量 τ 下中心在 a 、半径为 r 的闭球.

引理 4.1 在定理 4.2 的条件下, 若 $q > dH$, 则对任意的闭矩形 $T \subseteq I$ 和任意的整数 $n > 1$, 存在一个仅依赖于 N, d, n, H 和 T 的常数 $c_{4,1} := c_{4,1}(n)$, 使得对任意半径小于 1 的闭球 $D \subseteq T$, 有

$$\mathbb{E}[(\ell(x, D))^n] \leq c_{4,1} r^{n(q-Hd)}. \quad (4.10)$$

证明 由于 $\ell(x, D)$ 是非负的且满足 (4.3), 所以,

$$\mathbb{E}[(\ell(x, D))^n] \leq \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int_{D^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \langle u^j, Z(t^j) \rangle \right\} \right| d\bar{u} d\bar{t}. \quad (4.11)$$

下面将利用随机场 X 的局部不确定性来证明 (4.11) 中的积分是有限的. 由于局部不确定性仅在满足 (2.9), 且该式中的点充分靠近的条件下才成立. 因此, 先作简化: 固定一个整数 $n > 1$, D^n 能够用更小的集合

$$T = \{(t^1, \dots, t^n) \in D^n : t^1 \preceq t^2 \preceq \dots \preceq t^n \text{ 且 } |t^n - t^1| < \delta\}$$

来替代, 这里 δ 是充分小的正常数 (见定理 3.1). 这一简化是充分的, 因为 D^n 是有限个诸如 T 的集合的并 (仅仅 $t^1, \dots, t^n$ 的排列顺序不同), 所以只要能够证明 (4.11) 中的积分在这些小区域上的积分是有限的, 其在 D^n 上也是有限的. 因此, 不妨假设 X 在 D^n 上是具有局部不确定性的, 因为 D^n 总是可以划分为更小的区域, 而在这小区域上局部不确定性是成立的.

由于 X 具有局部不确定性, 且在 D^n 上有 $t^1 \preceq t^2 \preceq \dots \preceq t^n$, 因此, 利用变量替换 $u^n = v^n$, $u^j = v^j - v^{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ell(x, T))^n] &\leq c(n) \int_{D^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \langle v^n, Z(t^n) \rangle + i \sum_{j=1}^{n-1} \langle v^j - v^{j+1}, Z(t^j) \rangle \right\} \right| d\bar{v} d\bar{t} \\ &= c(n) \int_{D^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \langle v^1, Z(t^1) \rangle + i \sum_{j=2}^n \langle v^j, Z(t^j) - Z(t^{j-1}) \rangle \right\} \right| d\bar{v} d\bar{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= c(n) \int_{D^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{l=1}^d \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i v_l^1 Z_l(t^1) + i \sum_{j=2}^n (v_l^j Z_l(t^j) - Z_l(t^{j-1})) \right\} \right| d\bar{v} d\bar{t} \\
 &= c(n) \int_{D^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{l=1}^d \exp \left\{ - \left\| v_l^1 Z_l(t^1) + \sum_{j=2}^n v_l^j (Z_l(t^j) - Z_l(t^{j-1})) \right\|_\alpha^\alpha \right\} d\bar{v} d\bar{t}, \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由 $Z_1, \dots, Z_d$ 的独立性可得, 最后一个等式由 (2.3)–(2.5) 可得.

由 X 的局部不确定性和 (3.1) 可得 (4.12) 中的最后一个积分小于

$$\begin{aligned}
 &\int_{D^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{l=1}^d \left\{ e^{-c \|v_l^1 Z_l(t^1)\|_\alpha^\alpha} \cdot \prod_{j=2}^n e^{-c \|v_l^j (Z_l(t^j) - Z_l(t^{j-1}))\|_\alpha^\alpha} \right\} d\bar{v} d\bar{t} \\
 &= \int_{D^n} \prod_{l=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-c \|v_l^1 Z_l(t^1)\|_\alpha^\alpha} dv_l^1 \cdot \prod_{j=2}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-c \|v_l^j (Z_l(t^j) - Z_l(t^{j-1}))\|_\alpha^\alpha} dv_l^j \right\} d\bar{t}, \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

由引理 3.1 可推得上式 (4.13) 小于

$$\int_{D^n} \prod_{l=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-c |v_l^1|^\alpha \tau_E(t^1)^{\alpha H}} dv_l^1 \cdot \prod_{j=2}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-c |v_l^j|^\alpha \tau_E(t^j - t^{j-1})^{\alpha H}} dv_l^j \right\} d\bar{t}. \quad (4.14)$$

再作一次变量替换 $u_l^1 = v_l^1 \tau_E(t^1)^H$, $u_l^j = v_l^j \tau_E(t^j - t^{j-1})^H$, $j = 2, \dots, n$, (4.14) 等于

$$\begin{aligned}
 &\int_{D^n} \left(\tau_E(t^1) \prod_{j=2}^n \tau_E(t^j - t^{j-1}) \right)^{-Hd} \prod_{l=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-c |u_l^1|^\alpha} du_l^1 \cdot \prod_{j=2}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-c |u_l^j|^\alpha} du_l^j \right\} d\bar{t} \\
 &\leq c(n) \int_{D^n} \left(\tau_E(t^1) \prod_{j=2}^n \tau_E(t^j - t^{j-1}) \right)^{-Hd} d\bar{t}, \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

因为对所有的 $j = 1, \dots, n$, 有 $\int_{\mathbb{R}} e^{-c |u_l^j|^\alpha} du_l^j \leq c$, 所以, 联合 (4.12)–(4.15), 可得

$$\mathbb{E}[|\ell(x, D)|^n] \leq c(n) \int_{D^n} \left(\tau_E(t^1) \prod_{j=2}^n \tau_E(t^j - t^{j-1}) \right)^{-Hd} d\bar{t}. \quad (4.16)$$

由于 D 是凸集, $\tau_E(t)$ 是对称 (即 $\tau_E(-t) = \tau_E(t)$) 且连续的, 且当 $|t| \rightarrow 0$ 时, $\tau_E(t) \rightarrow 0$; 当 $|t| \rightarrow \infty$ 时, $\tau_E(t) \rightarrow \infty$, 所以,

$$\int_D \tau_E(t^n - t^{n-1})^{-Hd} dt^n \leq \int_{B_\tau(0, r)} \tau_E(t^n)^{-Hd} dt^n. \quad (4.17)$$

由引理 2.3, 可得

$$\int_D \tau_E(t^n - t^{n-1})^{-Hd} dt^n \leq \int_{B_\tau(0, r)} \tau_E(t^n)^{-Hd} dt^n \leq c r^{q-Hd}. \quad (4.18)$$

利用 (4.16) 和 (4.18), 并依次按 $dt^n, \dots, dt^1$ 的顺序进行积分, 可得

$$\mathbb{E}[|\ell(x, D)|^n] \leq c(n) r^{n(q-Hd)}. \quad (4.19)$$

故引理 4.1 得证. $\square$

引理 4.2 在定理 4.2 的条件下, 若 $q > dH$, 则对每个闭矩形 $T \subseteq I$ 和所有偶数 $n > 1$, 存在一个仅依赖于 N, d, n, H 和 T 的常数 $c_{4,2} := c_{4,2}(n)$, 使得对任意半径充分小的闭球 $D := \bar{B}_\tau(a, r) \subseteq T$, 所有满足 $|x - y| \leq 1$ 的 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 以及所有充分小的 $\gamma \in (0, \min\{1, (q - Hd)/2H\})$, 有

$$\mathbb{E}[(\ell(x, D) - \ell(y, D))^n] \leq c_{4,2} |x - y|^{n\gamma} r^{n(q - H(2\gamma + d))}. \quad (4.20)$$

证明 由 (4.4) 知,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ell(x, D) - \ell(y, D))^n] &\leq \int_{T^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{j=1}^n \left| \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^n \langle u^j, x - y \rangle \right\} - 1 \right| \\ &\quad \times \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \langle u^j, Z(t^j) \rangle \right\} \right| d\bar{u} d\bar{t}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

利用基本不等式 $|e^{iu} - 1| \leq 2^{1-\gamma} |u|^\gamma$ ($u \in \mathbb{R}$), 可得

$$\prod_{j=1}^n \left| \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^n \langle u^j, x - y \rangle \right\} - 1 \right| \leq 2^{n(1-\gamma)} |x - y|^{n\gamma} \prod_{j=1}^n |u^j|^\gamma. \quad (4.22)$$

由 (4.21) 和 (4.22), 有

$$\mathbb{E}[(\ell(x, D) - \ell(y, D))^n] \leq c 2^{n(1-\gamma)} |x - y|^{n\gamma} \int_{T^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left(\prod_{j=1}^n |u^j|^\gamma \right) \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n \langle u^j, Z(t^j) \rangle \right\} \right| d\bar{u} d\bar{t}. \quad (4.23)$$

类似于引理 4.1 中有关随机场局部不确定性的讨论, 可以假设 X 在 D^n 上也具有局部不确定性, 且 $t^1 \preceq t^2 \preceq \dots \preceq t^n$. 设 $\mathcal{J}$ 表示 (4.23) 中关于 $\bar{u}$ 的内积分, 通过变量替换 $u^n = v^n$, $u^j = v^j - v^{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= c(n) \int_{\mathbb{R}^{nd}} |v^n|^\gamma \left(\prod_{j=1}^{n-1} |v^j|^\gamma \right) \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \langle v^j, Z(t^n) \rangle + i \sum_{j=1}^{n-1} \langle v^j - v^{j+1}, Z(t^j) \rangle \right\} \right| d\bar{v} \\ &= c(n) \int_{\mathbb{R}^{nd}} |v^n|^\gamma \left(\prod_{j=1}^{n-1} |v^j - v^{j+1}|^\gamma \right) \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \langle v^j, Z(t^n) \rangle + i \sum_{j=1}^{n-1} \langle v^j - v^{j+1}, Z(t^j) \rangle \right\} \right| d\bar{v} \\ &= c(n) \int_{\mathbb{R}^{nd}} |v^n|^\gamma \left(\prod_{j=1}^{n-1} |v^j - v^{j+1}|^\gamma \right) \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \langle v^1, Z(t^1) \rangle + i \sum_{j=2}^n \langle v^j, Z(t^j) - Z(t^{j-1}) \rangle \right\} \right| d\bar{v}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

由于对任意的 j 和 $\gamma \in (0, 1)$, 有 $|v^j - v^{j+1}|^\gamma \leq |v^j|^\gamma + |v^{j+1}|^\gamma$, 所以,

$$|v^n|^\gamma \left(\prod_{j=1}^{n-1} |v^j - v^{j+1}|^\gamma \right) \leq \sum' \prod_{j=1}^n |v^j|^{\phi_n \gamma}, \quad (4.25)$$

其中 $\phi_n \in \{0, 1, 2\}$, 求和符号 $\sum'$ 是对所有序列 $(k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, d\}$ 进行的. 由此及 (4.25), 有

$$\mathcal{J} \leq c(n) \sum' \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{j=1}^n |v^j|^{\phi_n \gamma} \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i \langle v^1, Z(t^1) \rangle + i \sum_{j=2}^n \langle v^j, Z(t^j) - Z(t^{j-1}) \rangle \right\} \right| d\bar{v}. \quad (4.26)$$

为方便起见, 将 (4.26) 中的积分记为 $\mathcal{J}_1$. 由 $Z_1, \dots, Z_d$ 的独立性, 可得

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left(\prod_{j=1}^n |v^j|^{\phi_n \gamma} \right) \prod_{l=1}^d \left| \mathbb{E} \exp \left\{ i v_l^1 Z_l(t^1) + i \sum_{j=2}^n v_l^j (Z_l(t^j) - Z_l(t^{j-1})) \right\} \right| d\bar{v}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left(\prod_{j=1}^n |v^j|^{\phi_n \gamma} \right) \prod_{l=1}^d \exp \left\{ - \|v_l^1 Z_l(t^1) + \sum_{j=2}^n v_l^j (Z_l(t^j) - Z_l(t^{j-1}))\|_\alpha^\alpha \right\} d\bar{v}, \quad (4.27)$$

其中最后一个等式由 (2.3)–(2.5) 可得.

类似于引理 4.1 中有关随机场局部不确定性的讨论, 可以假设 Z_j 在 D^n 上也具有局部不确定性, 从而, 由 Z_j 的局部不确定性 (见定理 3.1), 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left(\prod_{j=1}^n |v^j|^{\phi_n \gamma} \right) \prod_{l=1}^d \left(\exp\{-c\|v_l^1 Z_l(t^1)\|_\alpha^\alpha\} \prod_{j=2}^n \exp\{-c\|v_l^j (Z_l(t^j) - Z_l(t^{j-1}))\|_\alpha^\alpha\} \right) d\bar{v} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{nd}} \left(\prod_{j=1}^n |v^j|^{\phi_n \gamma} \right) \prod_{l=1}^d \left(\exp\{-c|v_l^1|^\alpha \tau_E(t^1)^{\alpha H}\} \prod_{j=2}^n \exp\{-c|v_l^j|^\alpha \tau_E(t^j - t^{j-1})^{\alpha H}\} \right) d\bar{v} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |v^1|^{\phi_n \gamma} \prod_{l=1}^d \exp\{-c|v_l^1|^\alpha \tau_E(t^1)^{\alpha H}\} dv^1 \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^d} |v^j|^{\phi_n \gamma} \prod_{l=1}^d \left(\prod_{j=2}^n \exp\{-c|v_l^j|^\alpha \tau_E(t^j - t^{j-1})^{\alpha H}\} \right) dv^j \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |v^1|^{\phi_n \gamma} \prod_{l=1}^d \exp\{-c|v_l^1|^\alpha \tau_E(t^1)^{\alpha H}\} dv^1 \\ &\quad \times \prod_{j=2}^n \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v^j|^{\phi_n \gamma} \prod_{l=1}^d \exp\{-c|v_l^j|^\alpha \tau_E(t^j - t^{j-1})^{\alpha H}\} dv^j \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

其中第二个不等式由引理 3.1 可得.

现在通过另一个变量替换 $u_l^1 = v_l^1 \tau_E(t^1)^H$, $u_l^j = v_l^j \tau_E(t^j - t^{j-1})^H$, $j = 2, \dots, n$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \tau_E(t^1)^{-H\phi_n \gamma - Hd} |u^1|^{\phi_n \gamma} \prod_{l=1}^d \exp\{-c|u_l^1|^\alpha\} du^1 \\ &\quad \times \prod_{j=2}^n \int_{\mathbb{R}^d} \tau_E(t^j - t^{j-1})^{-H\phi_n \gamma - Hd} |u^j|^{\phi_n \gamma} \exp\{-c|u_l^j|^\alpha\} du^j \\ &= c(n) \left(\tau_E(t^1) \prod_{j=2}^n \tau_E(t^j - t^{j-1}) \right)^{-H\phi_n \gamma - Hd}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

因为对任意的 $j = 1, \dots, d$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u^j|^{\phi_n \gamma} \prod_{j=2}^n \exp\{-c|u_l^j|^\alpha\} du^j < \infty,$$

所以, 联合 (4.23)–(4.29), 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ell(x, D) - \ell(y, D))^n] &\leq c(n) |x - y|^{n\gamma} \int_{D^n} \left(\tau_E(t^1) \prod_{j=2}^n \tau_E(t^j - t^{j-1}) \right)^{-H\phi_n \gamma - Hd} d\bar{t} \\ &\leq c^n |x - y|^{n\gamma} r^{n(q - H\phi_n \gamma - Hd)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

其中最后一个不等式类似于 (4.17)–(4.19) 估计可得. 由于 $r < 1$, $\phi_n \leq 2$, 则

$$\mathbb{E}[(\ell(x, D) - \ell(y, D))^n] \leq c(n) |x - y|^{n\gamma} r^{n(q - 2H\gamma - Hd)}. \quad (4.31)$$

因此引理 4.2 得证. $\square$

定理 4.2 的证明 在引理 4.1 和 4.2 中, 虽然局部时高阶矩的估计是针对时间变量在开球 $B_\tau(a, r)$ 内进行的, 但是当时间变量在矩形内时, 引理中局部时高阶矩的估计也可以获得. 事实上, 由引理 2.1 可推得, 若 $s \in S := [a, a + \langle r \rangle]$, 则 $\tau_E(s - a) \leq r^{\frac{1-\epsilon}{ap}}$, 其中 ϵ 是给定充分小的正数. 从而,

$$S = [a, a + \langle r \rangle] \subseteq B_\tau(a, r^{\frac{1-\epsilon}{ap}}).$$

由引理 4.1 和 4.2, 当时间变量落入矩形区域内时, 可得局部时高阶矩的估计为

$$\mathbb{E}[(\ell(x, S))^n] \leq c(n)r^{\frac{n(q-Hd)(1-\epsilon)}{ap}}, \quad (4.32)$$

$$\mathbb{E}[(\ell(x, S) - \ell(y, T))^n] \leq c(n)|x - y|^{n\gamma}r^{\frac{(q-2H\gamma-Hd)(1-\epsilon)}{ap}}. \quad (4.33)$$

综合 (4.32) 和 (4.33), 以及 Kolmogorov 连续性定理的多参数版本 (参见文献 [32]), 类似于文献 [33, 定理 8.2] 的证明, 可证明定理 4.2 成立. 故定理证毕. $\square$

致谢 作者感谢审稿人对本文初稿提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Benson D A, Meerschaert M M, Baeumer B, et al. Aquifer operator scaling and the effect on solute mixing and dispersion. *Water Resour Res*, 2006, 42: W01415
- 2 Bonami A, Estrade A. Anisotropic analysis of some Gaussian models. *J Fourier Anal Appl*, 2003, 9: 215–236
- 3 Davies S, Hall P. Fractal analysis of surface roughness by using spatial data. *J R Stat Soc Ser B Stat Methodol*, 1999, 61: 3–37
- 4 Robinson P M. Multiple local Whittle estimation in stationary systems. *Ann Statist*, 2008, 36: 2508–2530
- 5 Li Y, Xiao Y. Multivariate operator-self-similar random fields. *Stochastic Process Appl*, 2011, 121: 1178–1200
- 6 Didier G, Pipiras V. Integral representations and properties of operator fractional Brownian motions. *Bernoulli*, 2011, 17: 1–33
- 7 Chilès J P, Delfiner P. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. New York: John Wiley & Sons, 1999
- 8 Wackernagel H. *Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications*. New York: Springer-Verlag, 1998
- 9 Biermé H, Meerschaert M M, Scheffler H P. Operator scaling stable random fields. *Stochastic Process Appl*, 2007, 117: 312–332
- 10 Samorodnitsky G, Taqqu M S. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York: Chapman and Hall, 1994
- 11 Biermé H, Lacaux C. Hölder regularity for operator scaling stable random fields. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119: 2222–2248
- 12 Stein M L. On a class of space-time intrinsic random functions. *Bernoulli*, 2013, 19: 387–408
- 13 Biermé H, Durieu O, Wang Y. Invariance principles for operator-scaling Gaussian random fields. *Ann Appl Probab*, 2017, 27: 1190–1234
- 14 Ayache A, Xiao Y. Harmonizable fractional stable fields: Local nondeterminism and joint continuity of the local times. *Stochastic Process Appl*, 2016, 126: 171–185
- 15 Berman S M. Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. *Indiana Univ Math J*, 1973, 23: 69–94
- 16 Pitt L D. Local times for Gaussian vector fields. *Indiana Univ Math J*, 1978, 27: 309–330
- 17 Nolan J P. Local nondeterminism and local times for stable processes. *Probab Theory Related Fields*, 1989, 82: 387–410
- 18 Xiao Y. Properties of local-nondeterminism of Gaussian and stable random fields and their applications. *Ann Fac Sci Toulouse Math (6)*, 2006, 15: 157–193
- 19 Xiao Y. Properties of strong local nondeterminism and local times of stable random fields. In: *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications*, vol. VI. Basel: Birkhäuser, 2011, 279–310
- 20 Meerschaert M M, Scheffler H P. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors*. New York: John Wiley & Sons, 2001
- 21 Geman D, Horowitz J. Occupation densities. *Ann Probab*, 1980, 8: 1–67

- 22 Geman D, Horowitz J, Rosen J. A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann Probab*, 1984, 12: 86–107
- 23 Hu Y, Nualart D. Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion. *Ann Probab*, 2005, 33: 948–983
- 24 Rosen J. The intersection local time of fractional Brownian motion in the plane. *J Multivariate Anal*, 1987, 23: 37–46
- 25 Wu D, Xiao Y. Regularity of intersection local times of fractional Brownian motions. *J Theoret Probab*, 2010, 23: 972–1001
- 26 Ehm W. Sample function properties of multi-parameter stable processes. *Z Wahrsch Verw Gebiete*, 1981, 56: 195–228
- 27 Xiao Y. Hölder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields. *Probab Theory Related Fields*, 1997, 109: 129–157
- 28 Xiao Y, Zhang T. Local times of fractional Brownian sheets. *Probab Theory Related Fields*, 2002, 124: 204–226
- 29 Ayache A, Wu D, Xiao Y. Joint continuity of the local times of fractional Brownian sheets. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 2008, 44: 727–748
- 30 Wu D, Xiao Y. On local times of anisotropic Gaussian random fields. *Commun Stoch Anal*, 2011, 5: 15–39
- 31 Adler R J. *The Geometry of Random Fields*. New York: John Wiley & Sons, 1981
- 32 Khoshnevisan D. *Multiparameter Processes*. New York: Springer-Verlag, 2002
- 33 Xiao Y. Sample path properties of anisotropic Gaussian random fields. In: *A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2009, 145–212

Local nondeterminism and joint continuity of the local times for operator-scaling stable random fields

Wenqing Ni & Zhenlong Chen

Abstract Let $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}^N\}$ be a real-valued harmonizable operator-scaling stable random field with stationary increments. Local nondeterminism for X is derived by using a Fourier analytic argument. We use it to obtain the sufficient conditions for the existence and joint continuity of the local times of X .

Keywords harmonizable operator-scaling, stable random fields, local nondeterminism, local times, joint continuity

MSC(2010) 60G17, 60G18, 60G52, 60G60

doi: 10.1360/SCM-2018-0367