不含 4 圈的平面图的全色数*

上官敏乐

王应前**

(浙江树人大学基础部, 杭州 310015) (浙江师范大学数理与信息工程学院, 金华 321004)

李 乔

(上海交通大学应用数学系, 上海 200030)

摘要 用 $\Delta(G)$, $\chi_{ve}(G)$ 分别表示图 G 的顶点最大度和全色数. Vizing 猜想: 对任何简单图 G , $\Delta(G) + 1 \leq \chi_{ve}(G) \leq \Delta(G) + 2$. 即使对于平面图, 这一猜想仍未获得完整的证明, 唯一待完成的困难情形是 $\Delta(G) = 6$. 本文证明: 若 $\Delta(G) = 6$ 的平面图 G 不含有 4 圈, 则 $\chi_{ve}(G) \leq 8$. 这一结果和以前在该问题上的已知结果表明: 对于不含有 4 圈的平面图, Vizing 猜想是正确的.

关键词 全色数 平面图 F_5 子图

1 引言

文中未加定义的术语和记号请参阅文献 [1]. 用 V , E , F , δ 和 Δ 分别表示平面图 G 的顶点集, 边集, 面集, 最小度和最大度. 若 $V \cup E$ 中的元素能用 k 种颜色进行染色, 使得任意两个相邻或相关联的元素接受不同的颜色, 则称 G 是 k 全可染的, G 的全色数 $\chi_{ve}(G) = \min\{k \mid G \text{ 是 } k \text{ 全可染的}\}$. Vizing^[2] 猜想: 对简单图 G , $\Delta + 1 \leq \chi_{ve}(G) \leq \Delta + 2$. 这一猜想被后人称为全色数猜想, 简记为 TCC. 对一般图, Rosenfeld^[3], Kostochka^[4,5], 分别证明了 $\Delta = 3, \Delta = 4, 5$ 时, TCC 成立. 对平面图 G , Borodin^[6] 和 Yap^[7] 及 Sanders 和 Zhao^[8] 分别证明了 $\Delta \geq 9, \Delta = 8, \Delta = 7$ 时, TCC 成立. 这样, 对平面图而言, 仅当 $\Delta = 6$ 时 TCC 尚未证实. 本文证明了

收稿日期: 2005-01-11; 接受日期: 2006-07-10

* 国家自然科学基金(批准号:10471131)资助项目

** E-mail: yqwang@zjnu.cn

定理 1 若 $\Delta = 6$ 的平面图 G 不含有 4 圈, 则 $\chi_{ve}(G) \leq 8$.

注意到 TCC 中的下界是平凡的, 这一结果和以前的结果表明: 对于不含有 4 圈的平面图, TCC 是正确的.

2 引理

给图 G 的每个顶点或边 x 分配一个色列表 $L(x)$, 若对每个 $x \in V \cup E$, 都可从其对应的列表 $L(x)$ 中选择一个颜色染给 x , 使得任意两个相邻或相关联的元素接受不同的颜色, 则称 G 是 L 全可染的. 若对 G 的每一个全色列表 $L = \{L(x) \mid |L(x)| \geq k, x \in V \cup E\}$, G 都是 L 全可染的, 则称 G 是 k 全可选择的. 用 C_n 表示长度为 $n (\geq 3)$ 的圈, 则不难证明

引理 1 C_n 是 4 全可选择的.

G 中的顶点或面 x 的度定义为 G 中与 x 相关联的边数, 记为 $d(x)$. 称一个度为 k 的点或面, 为 k 点或 k 面. 令 F_5 表示一个 5 面. G 的一个子图 H 称为 F_5 子图, 若 H 同构于 F_5 且对所有的 $v \in V(H)$, 有 $d(v) = 4$. 令 F_5^3 表示恰有一条公共边的一个 5 面与一个 3 面的并. G 的一个子图 H 称为 F_5^3 子图, 若 H 同构于 F_5^3 且对所有的 $v \in V(H)$, 有 $d(v) = 4$.

引理 2^[9] 设 G 是一个 $\delta \geq 4$ 的平面图. 若 G 不含有 4 圈, 则 G 含有 F_5^3 子图. 从而含有 F_5 子图.

引理 3 设 G 是一个 $\delta = 3, \Delta = 6$ 且不含 4 圈的平面图. 若 G 的每个 3 点的 3 个邻点都是 6 点, 则 G 含有 F_5 子图.

证明 首先, 由平面图 Euler 公式可得

$$\sum_{v \in V} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (d(f) - 6) = -12.$$

现在给图的顶点 x 分配权 $w(x) = 2d(x) - 6$, 给图的面 x 分配权 $w(x) = d(x) - 6$, 则有

$$\sum_{x \in V \cup F} w(x) = -12.$$

假如 G 不含有 F_5 子图, 我们将根据下述规则 R1-R3.2, (必要时, 在保持 R1-R3.2 的条件下, 做适当调整), 重新分配顶点和面的权, 使得对每一个元素 $x \in V \cup F$ 都有 $w'(x) \geq 0$, 这里 $w'(x)$ 为重新分配权以后顶点或面 x 的新权, 从而有

$$\sum_{x \in V \cup F} w'(x) \geq 0.$$

因为分配前的权和与分配后的权和应相等, 以上两式显然矛盾, 这个矛盾给出了引理 3 的证明. 下面是我们所使用的重新分配顶点和面的权的主要规则:

R1. 对 $k = 4, 5, 6$, 从每个 k 点转移权 1 给每个与此点相关联的 3 面.

R2. 从每个5点转移权 $\frac{2}{3}$ 给每个与此点相关联的5面; 从每个6点转移权1给每个与此点相关联的5面.

R3.1. 若一个6点仅关联了一个度数不小于6的面, 从这个6点转移权 $\frac{1}{3}$ 给每个相关联的3面上的3点;

R3.2. 若一个6点至少关联了两个度数不小于6的面, 从这个6点转移权 $\frac{1}{3}$ 给每个相邻的3点.

先来考察顶点的新权:

3点的新权 $w'(x) = w(x) = 0$, 这是因为根据R1和R2, 3点上的权保持不变.

4点的新权 $w'(x) \geq w(x) - 2 = 2 - 2 = 0$, 这是因为 G 不含有4圈, 4点至多与两个3面相关联.

5点的新权 $w'(x) \geq w(x) - (3 \times \frac{2}{3} + 2) = 4 - (3 \times \frac{2}{3} + 2) = 0$, 这是因为5点至多与两个3面相关联 (否则 G 含有4圈).

下证6点的新权 $w'(x) \geq 0$.

设这个6点为 a , 若 a 关联的每个面都是3面或5面. 由R1和R2, a 至多转移了权6, 则 $w'(a) \geq w(a) - 6 = 0$.

若 a 恰关联了一个度数不小于6的面. 由R1和R2, a 至多转移了权5给与它相关联的面. 因为 G 不含有4圈, 每个6点至多关联3个3面, 且每个3面至多关联一个3点, 因此由R3.1, a 至多转移了权1给相关联的3面上的3点, 从而 $w'(a) \geq 0$.

若 a 至少关联了两个度数不小于6的面. 由R1和R2, a 至多转移了权4给与它相关联的面. 由R3.2, a 至多转移了权2给与它关联的3点, 因此, $w'(a) \geq 0$.

其次考察面的新权:

注意到 G 没有4面, $d(f) \geq 6$ 的面的权没有变化且它们原来的权值均不小于0, 所以下面只需考虑3面和5面的新权.

首先考察3面的新权. 设 f 是 G 的一个3面, 分两种情形讨论如下:

(1) f 不与3点相关联.

这时 f 由规则R1可从它的3个顶点各获得权1, 从而 $w'(f) = 0$.

(2) f 与3点相关联.

设 $f = abc$, a 是一个3点, 且与 f 相邻的3个面分别为 f_1, f_2, f_3 , 如图1所示. 据题设, a 的3个邻点 b, c, d 都是6点. 因为 G 不含有4圈, 与 f 相邻的3个面既不是3面, 也不是4面.

(2.1) f_1 和 f_2 中有一个是5面.

不妨设 f_1 是5面, 则 f_1 至多关联两个3点.

当 f_1 只关联了一个3点 a 时, 顶点 c 和 d 由规则R1和R2, 各向 f_1 和 f 转移了权1, 因此 $w'(f_1) \geq 1$. 现在可转移 f_1 的权1给相关联的3点, 可得 $w'(a) = 1$. 由于3点至多关联一个3面, 因此又可转移 a 的权1给它相关联的3面 f , 从而, 在保持R1和R2的条件下, 通过权的调整可使 f 的新权 $w'(f) = 0$.

图 1

图 2

当 f_1 关联了两个 3 点时, f_1 关联的其他 3 个点都是 6 点, 由规则 R2 可得 $w'(f_1) = 2$, 现在可转移 f_1 的权 1 给每个相关联的 3 点, 则 $w'(a) = 1$, 因此又可转移 a 的权 1 给它相关联的 3 面 f , 从而 f 的新权 $w'(f) = 0$.

(2.2) f_1 和 f_2 都是度数不小于 6 的面.

由规则 R1, f 可从顶点 b 和 c 处共获得权 2, 由规则 R3.1 和 R3.2, 点 a 可从点 b, c, d 处共获得权 1, 因此可转移 a 的权 1 给它相关联的 3 面 f , 从而 f 的新权 $w'(f) = 0$.

其次, 考察 5 面的新权.

设 f 是 G 的一个 5 面, 有 3 种情形需要讨论.

(1) f 至少关联了一个 6 点.

由规则 R2, f 可从这个 6 点处获得权 1, 因此它的新权 $w'(f) \geq 0$.

(2) f 至少关联了一个 3 点. 据题设, f 至少关联了两个 6 点, 从而可转化为情形 1.

(3) f 既不与 3 点, 也不与 6 点相关联. 这时有 3 种子情形会发生:

(3.1) f 关联了 5 个 4 点. 即 f 是 F_5 子图, 已为反设所排除.

(3.2) f 至少关联了两个 5 点.

由规则 R2, f 至少可从这两个 5 点处共获得权 $\frac{4}{3}$, 因此 $w'(f) \geq 0$.

(3.3) f 恰关联了一个 5 点 a .

(3.3.1) f 关联的 4 点中, 至少有一个 4 点至多关联一个 3 面.

由规则 R2, f 可从点 a 处获得权 $\frac{2}{3}$. 在保持 R1 的条件下, 再分配这个 4 点的权 $\frac{1}{3}$ 给每个相关联的 5 面, 因此, f 的新权 $w'(f) = 0$.

(3.3.2) f 关联的所有 4 点都关联了两个 3 面, 如图 2 所示.

考察点 a 所关联的 5 个面: 一个为 f , 与 f 相邻的两个面都是 3 面, 剩下的两个相邻的面都是度数不小于 5 的面, 分别记作 f_1, f_2 . 设 f_1 与 f_2 的公共边为 ab .

若 f_1 和 f_2 中有一个面的度不小于 6, 则重新分配 a 的权 1 给每个与此点相

关联的3面或5面, 从而 $w'(f) = 0$.

若 f_1 和 f_2 都是5面. 因为 $d(a) = 5$, 据题设 $d(b) \neq 3$, 从而 $d(b) \geq 4$.

当 $d(b) = 6$ 时, 由 R2, f_1 和 f_2 从点 b 处分别获得权1, 因此可重新分配点 a 的权1给每个相关联的异于 f_1 和 f_2 的3面或5面, 则 $w'(f) = 0$.

当 $d(b) = 4$ 时, b 至多关联一个3面(否则出现4圈).

若 b 关联一个3面, 不妨设这个3面与 f_2 相邻, 这时点 c 也至多关联一个3面. 仿 (3.3.1), 可再分配 b 和 c 的权 $\frac{1}{3}$ 给 f_1 , 这时 f_1 可从点 b 和 c 处共获得权 $\frac{2}{3}$, 因此重新分配点 a 的权 $\frac{1}{3}$ 给 f_1 , $\frac{2}{3}$ 给 f_2 , 1 给其他每个与 a 相关联的3面或5面. 则 $w'(f) = 0$.

若 b 不关联3面, 同样进行上述权的重新分配, 也可使得 f 的新权 $w'(f) = 0$.

当 $d(b) = 5$ 时, 重新分配点 a 的权 $\frac{1}{3}$ 给 f_1 , $\frac{2}{3}$ 给 f_2 , 1 给其他每个相关联的3面或5面; 同时, 重新分配点 b 的权 $\frac{2}{3}$ 给 f_1 , $\frac{1}{3}$ 给 f_2 , 1 给其他每个相关联的3面或5面. 这样, $w'(f) = 0$ (注意: 上述对5面关联的5点的权的重新分配, 能保证其他每个与 a 相关联的面的新权不小于零).

因此, 若图 G 中不含有 F_5 子图, 则对 G 中的顶点和面经过权的适当重新分配之后可得

$$\sum_{x \in V \cup F} w'(x) \geq 0.$$

引理证毕.

3 定理1的证明

假若定理1不成立. 选取一个满足定理1条件, 但 $\chi_{ve}(G) > 8$ 的边数尽可能少的图, 记为 G .

(1) 当 $\delta \leq 2$ 时, 利用 G 的边数最小性, 不难证明 G 是8正常全可染的.

(2) 当 $\delta \geq 3$ 时, 若 G 中有一个3点与一个度不大于5的点相邻, 易见 G 也是8正常全可染的. 否则, $\delta \geq 4$, 或 $\delta = 3$ 且 G 的每个3点的3个邻点都是6点. 据引理2和3可知, G 含有 F_5 子图.

设 H 是 G 的一个 F_5 子图, 如图3所示.

由 G 的边数的最小性, $G - E(H)$ 是8全可染的. 设 $\varphi: V(G) \cup E(G) - E(H) \rightarrow \{1, 2, \dots, 8\}$ 是 $G - E(H)$ 的一个8全染色. 现在抹去 $V(H)$ 上各点的颜色. $\forall x \in V(H) \cup E(H)$. 令

$$L(x) = \{1, 2, \dots, 8\} \setminus \{\varphi(y) \mid y \in G - V(H) \cup E(H),$$

$$y \text{ 与 } x \text{ 相邻或相关联}\},$$

则 $|L(x)| \geq 4$. 据引理1可知 H 是4全可选择的, 从而 G 是8正常全可染的. 这与 $\chi_{ve}(G) > 8$ 相矛盾. 定理证毕.

图 3 F_5 子图

致谢 感谢审稿人对原稿的耐心而细致的审查.

参 考 文 献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications. New York: American Elsevier Publishing, 1976
- 2 Vizing V G. Some unsolved problems in graph theory (in Russian). Uspekhi Mat Nauk, 1968, 23: 117–134
- 3 Rosenfeld M. On the total coloring of certain graphs. Israel J Math, 1971, 9: 396–402
- 4 Kostochka A V. The total coloring of a multigraph with maximal degree 4. Discrete Math, 1977, 17: 161–163
- 5 Kostochka A V. The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven. Discrete Math, 1996, 162: 199–214
- 6 Borodin O V. On the total coloring of planar graphs. J Reine Angew Math, 1989, 394: 180–185
- 7 Yap H P. Total coloring of graphs. In: Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1623. Berlin: Springer, 1996
- 8 Sanders D P, Zhao Y. On total 9-coloring planar graphs of maximum degree seven. J Graph Theory, 1999, 31: 67–73
- 9 Lam P C B, Xu B, Liu J. The 4-Choosability of plane graphs without 4-Cycles. J Combin Theory B, 1999, 76: 117–126