极小曲面 Gauss 像的值分布

献给胡和生教授 90 华诞

忻元龙

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: ylxin@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-08-15; 接受日期: 2017-09-20; 网络出版日期: 2017-11-24

国家自然科学基金 (批准号: 11531012) 资助项目

摘要 本文概述了欧氏空间中极小子流形 Gauss 像值分布问题的最新研究进展, 包括高维极小超曲面 Gauss 像分布的丘成桐问题, 以及高余维极小子流形的 Lawson-Osserman 问题; 介绍了作者及其合作者近年来在这两方面的研究结果和研究方法, 并提出了进一步的相关研究问题.

关键词 极小子流形 Gauss 映照 Bernstein 定理

MSC (2010) 主题分类 49Q05, 53A07, 58E20

1 Bernstein 定理和 Nirenberg 猜想

极小曲面有悠久的历史, 250 多年来, 很多大数学家研究过极小曲面, 并做出重要的贡献.

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是平面上的区域, f 是 D 上的光滑函数, 并满足下列偏微分方程:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0, \quad (1.1)$$

则 $(x, y, f(x, y))$ 定义了 $\mathbb{R}^3$ 中的极小图. 这就是非常有名的极小曲面方程. Lagrange^[1] 是一个分析学家, 他研究变分法得到了上述方程.

极小曲面方程的几何解释是曲面的平均曲率为零.

显然, 任何仿射线性函数都是极小曲面方程的解. 有没有非线性解呢? 当然是有的. 最简单的是悬链面和正螺面. 还有很多有趣的极小曲面.

1915 年, Bernstein^[2] 证明了极小曲面方程 (1.1) 在全平面的解一定是仿射线性函数, 它的图就一定是一个平面.

Bernstein 定理告诉我们, 在无穷远加了条件以后, 对方程的解 f 是很强的约束, 它一定是仿射线性函数, 它的图是一个平面. 这就是著名的 Bernstein 定理. 这个定理在各方面的推广, 构成 Bernstein 问题. 极小曲面研究中最主要的是 Plateau 问题和 Bernstein 问题, 而且两者也是密切相关的.

英文引用格式: Xin Y L. The value distribution under the Gauss map for a minimal submanifold (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 843–848, doi: 10.1360/N012017-00186

对曲面可定义 Gauss 映照, 曲面上的每一点有单位法向量, 把它平行移到坐标原点, 这就定义了曲面到单位球面的 Gauss 映照 γ . 注意到极小图的 Gauss 像落在开半球内. 据此有下列猜想:

猜想 1.1 (Nirenberg 猜想) $\mathbb{R}^3$ 中完备的非平坦的极小曲面, 它的 Gauss 像在球面 S^2 中是处处稠密的.

2 参数极小曲面

Osserman^[3] 于 1959 证明了 Nirenberg 的猜想:

定理 2.1 对 $\mathbb{R}^3$ 中的非平坦完备极小曲面, 它的 Gauss 像在 S^2 中是稠密的.

很多年后, 在 1981 年 Xavier^[4] 证明了下面的定理:

定理 2.2 对 $\mathbb{R}^3$ 中的非平坦完备极小曲面, 它的 Gauss 像在 S^2 中最多缺 6 个点.

另一方面, 我们有下面的定理:

定理 2.3^[5] 设 E 是 S^2 中 k ($k \leq 4$) 点的集合, 则在 $\mathbb{R}^3$ 中存在一个完备的极小曲面, 它的 Gauss 像恰好缺少 E 中的点.

考察具体的极小曲面, 我们有 (1) Riemann-Schwarz 曲面, 它的 Gauss 像取满球面上所有的点; (2) Enneper 曲面, 它的 Gauss 像缺少球面上一个点; (3) 悬链面和正螺面, 它的 Gauss 像缺少球面上两个点; (4) Scherk 曲面, 它的 Gauss 像缺少球面上四个点.

最后, 日本数学家 Fujimoto^[6] 证明了如下最佳结果:

定理 2.4^[6] 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中完备的非平坦的极小曲面, 则它的 Gauss 像至多缺少球面 S^2 中的 4 个点.

定理 2.4 证明的主要方法是 (1) $\mathbb{R}^3$ 中的极小曲面的 Weierstrass 表示; (2) 亚纯函数的值分布论.

关于极小曲面的基本方法和技巧, 参见文献 [7].

3 高维极小超曲面图

极小曲面的概念很容易推广到高维. 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中, 极小超曲面图的定义函数满足方程

$$(1 + |\nabla f|^2) \sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} - \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (3.1)$$

其中 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中一个区域中的函数.

方程 (3.1) 在全空间的解是否为仿射线性函数呢? 这就是 Bernstein 定理的高维推广. 经过 Federer、Fleming、De Giorgi、Almgren、Simons^[8] 和 Bombieri 等^[9] 大数学家的努力, 运用几何测度论, 这个问题在 20 世纪 60 年代已解决. 结论是: 当维数 $n \leq 7$ 时, 方程的解只有仿射线性函数; 当 $n > 7$ 时, 存在非线性解的反例.

Heinz^[10] 首先做出了极小曲面的局部曲率估计, 而将 Bernstein 定理作为他的曲率估计的推论. 后来, Schoen 等^[11] 对一类广泛的稳定极小超曲面, 做出了新的曲率估计, 从而, 给出了 $n \leq 5$ 时 Bernstein 定理的直接证明.

Moser^[12] 建立了一致椭圆算子的 Harnack 不等式, 作为其中一个应用, 得到了下列弱的 Bernstein 型定理:

定理 3.1^[12] 设 $z = f(x^1, \dots, x^n)$ 定义了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中极小超曲面. 如果 $|\nabla f| \leq \beta < \infty$, 那么, f 是仿射线性函数, 它的图是超平面.

4 极小超曲面

问题 4.1 (丘成桐问题) Yau^[13] 叙述了 $\mathbb{R}^3$ 中极小曲面 Gauss 像的值分布问题的一系列结果后 (如第 2 节所述), 提出 “Can one generalize these assertions to three-dimensional minimal hypersurfaces?”

前面的结果都是 2 维的, 而对欧氏空间中高维的极小超曲面, 行之有效的复变函数论的方法和技巧就不适用了.

应用几何测度论的方法, 有下列结果:

定理 4.1^[14] 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中整体体积极小的超曲面. 如果 $H^1(M) = 0$, 并且它的 Gauss 像缺少 S^{n-2} 在 S^n 中的管状邻域, 那么, M 是超平面.

丘成桐在 1988 年重申了上一问题, 并引用了 Solomon 的结果^[15]. 长期以来, 这是这个方向的唯一结果.

1992 年, 在 “几何中的开问题” 中, Yau^[16] 说: “The work of Osserman-Xavier-Fujimoto has settled the question of the value of the Gauss map for complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ (it is still not known where the Gauss map of a complete minimal surface with finite total curvature can miss three points). There is basically no generalization to higher dimension except the beautiful work of Solomon for all minimizing hypersurfaces with zero first Betti number. Can one find a suitable generalization of Solomon’s theorem by weakening the last two assumptions?...”

5 我们解决丘成桐问题的方法

由于我们所考虑超曲面的 Gauss 映照是到球面的调和映照, 据此, 我们可应用球面上的凸几何和椭圆型偏微分方程的正则性理论. 我们得到下面的定理:

定理 5.1^[17] 设 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是完备嵌入体积整体极小的超曲面, 如果它的 Gauss 像缺少 $\bar{S}_+^{n-1}$ 在 S^n 中的邻域, 那么, M 一定是仿射线性子空间, 其中 $\bar{S}_+^{n-1}$ 表示 S^n 中 $n-1$ 维的上闭半球.

事实上, 这是下列更一般结果的推论.

定理 5.2^[17] 设 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是完备嵌入的极小超曲面. 如果 M 欧氏体积增长, 并且, 存在常数 $C > 0$, 对任意 $y \in M$ 和 $R > 0$, Neumann-Poincaré 不等式对 $v \in C^\infty(B_R(y))$ 成立:

$$\int_{B_R(y)} |v - \bar{v}_{B_R(y)}|^2 * 1 \leq CR^2 \int_{B_R(y)} |\nabla v|^2 * 1,$$

其中 $B_R(y) = \{z \in M : |z - y| < R\}$. 并且还假定它的 Gauss 像缺少 $\bar{S}_+^{n-1}$ 在球面 S^n 中的邻域, 那么, M 一定是仿射线性子空间.

与 Solomon 的结果相比较, 我们的定理去掉了 Solomon 的定理中第一实系数同调群消没的拓扑条件, 因此很好地回答了丘成桐的问题. 由于我们没用几何测度论, 因此也不一定要整体体积极小的条件. 在美国数学会出版的 *Mathematical Reviews* 有如下的点评: “This interesting paper features a surprising new result for a classical problem ...”

证明要点 (1) 凸支撑集;

- (2) 证明球面 S^n 上的极大凸支撑集是 $S^n \setminus \bar{S}_+^{n-1}$;
 (3) 对任一紧子集 $K \in S^n \setminus \bar{S}_+^{n-1}$ 构造 K 上的严格凸函数, 并且在任一预先给定的点取最小值.
 有了那一系列凸函数, 就可应用 Giaquinta-Hildebrandt 方法, 但具体论证过程仍然是很困难的.
 (1) 要用磨光 Green 函数及其估计;
 (2) Gauss 像的收缩迭代法;
 (3) Moser 的 Harnack 不等式及 Giaquinta-Hildebrandt “望远镜” 技巧 ...
 具体细节可参见文献 [17]. □

6 高余维数极小子流形及 Lawson-Osserman 问题

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开区域, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是光滑映照. 如果它满足方程组

$$\begin{cases} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij}) = 0, \\ \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

其中 $g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_s \frac{\partial f^s}{\partial x^i} \frac{\partial f^s}{\partial x^j}$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $g = \det(g_{ij})$, 那么, 它的图 M 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的极小子流形.

Lawson 和 Osserman^[18] 揭示了高余维数的极小子流形与极小超曲面不同的方方面面, 并提出了很多有价值的问题, 其中之一是 Moser 的弱 Bernstein 定理 (见前述定理 3.1) 的高余维推广. 除了这个问题, 其他问题迄今稀有研究. 关于 Moser 定理的高余维数推广有如下结果:

- (1) Chern 和 Osserman (1967) 证明 2 维是对的, 即 Moser 结果可推广到高余维的 2 维极小曲面;
 (2) Barbosa (1979) 说明了 3 维时也是对的;
 (3) 在 4 维时, Lawson 和 Osserman 发现了反例: 在 $\mathbb{R}^7$ 中有 4 维的极小锥, 它是 $\mathbb{R}^7$ 中 4 维极小子流形的无穷远锥. 他们在文中提出 “定量” 推广 Moser 结果问题.

对一般情形, Hildebrandt 等^[19] 给出了下列结果:

定理 6.1^[19] 设 $z^\alpha = f^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, m$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ 是极小曲面方程组 (6.1) 的 C^2 解. 如果存在 β , 满足

$$\beta < \cos^{-s} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{sK}} \right), \quad K = \begin{cases} 1, & \text{若 } s = 1, \\ 2, & \text{若 } s \geq 2, \end{cases} \quad s = \min(m, n)$$

对任何 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\Delta_f(x) = \{\det(\delta_{ij} + f_{x^i}^\alpha(x) f_{x^j}^\alpha(x))\}^{\frac{1}{2}} \leq \beta$ 成立, 那么, $f^1, \dots, f^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射线性函数, 它的图是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的 n -平面.

定理 6.1 中 $\Delta_f(x)$ 是 Moser 定理中 $|\nabla f|$ 在高余维数时的自然推广. 它的上界按 Lawson 和 Osserman 的反例不能任意大. 后来, 上述结果被改进为如下定理:

定理 6.2^[20] 设 $z^\alpha = f^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, m$, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中定义极小子流形的光滑函数. 如果存在 β , 满足

$$\beta < \begin{cases} 2, & m \geq 2, \\ \infty, & m = 1 \end{cases}$$

对任何 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\Delta_f(x) = \{\det(\delta_{ij} + f_{x^i}^\alpha(x) f_{x^j}^\alpha(x))\}^{\frac{1}{2}} \leq \beta$ 成立, 那么, $f^1, \dots, f^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射线性函数, 它的图是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的 n -平面.

最近, 我们在进一步研究 Grassmann 流形几何性质的基础上, 对这个问题的研究又有很大的发展, 将结果作了本质的改进.

定理 6.3^[21] 设 $z^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) 是定义在 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3, m \geq 2$) 上的光滑函数, 使它的图 $M = (x, f(x))$ 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的极小子流形. 如果存在 $\beta < 3$, 且满足 $\Delta_f := [\det(\delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j})]^\frac{1}{2} \leq \beta$, 那么, $f^1, \dots, f^m$ 是仿射线性的.

定理 6.4^[22] 设 $z^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) 是定义在 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3, m \geq 2$) 上的函数, 使它的图 $M = (x, f(x))$ 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的极小子流形. 如果存在 $\beta_0 < +\infty$ 并且 $\beta_1 < 3$, 满足

$$\Delta_f := \left[\det \left(\delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \right) \right]^\frac{1}{2} \leq \beta_0,$$

对某 α 以及 i 满足 $\Delta_f \leq \beta_1(1 + (\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i})^2)^\frac{1}{2}$, 那么, $f^1, \dots, f^m$ 是仿射线性的.

前面说了, Lawson 和 Osserman 有例子, 它是 7 维欧氏空间中的 4 维锥, 由 3 维球面到 2 维球面著名的 Hopf 映照生成. 也就是说, 存在 7 维欧氏空间中的 4 维光滑极小子流形, 它的无穷远锥为 Lawson-Osserman 锥. 它的 Δ_f 恰为 9. 前述定理 6.3 和 6.4 的结果与此数还有差距.

7 其他相关问题

Calabi^[23] 提出了 Minkowski 空间中类空极值超曲面的 Bernstein 问题, 并给出了维数不超过 5 时的肯定回答, Cheng 和 Yau^[24] 完全解决了问题. 对 Minkowski 的常平均曲率类空超曲面情形, Palmer^[25] 做了第一个结果; Xin^[26] 和 Aiyama^[27] 大大改进了 Palmer 的结果. 后来, Xin 和 Ye^[28] 将结果做到了最佳, 类似的结果随后也由 Cao 等^[29] 得到.

对高余维数情形有 Jost 和 Xin^[30] 的结果. 对双曲空间 $\mathbb{H}^3$ 中常平均曲率曲面, Yu^[31] 巧妙地运用了 Bryant^[32] 的 $\mathbb{H}^3$ 中常平均曲率曲面的表示, 得到了 Fujimoto 定理的双曲版本. 对高维双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 中的常平均曲率的超曲面的相应问题还尚未有结果, 这是值得探讨的问题.

参考文献

- 1 Lagrange J. L. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima, et les minima des formules intégrales indéfinies. *Miscellanea Taurinensia* 2, 1760, 325: 173–199
- 2 Bernstein S. Sur un théorème de géométrie et ses application aux equations aux derives partielles du type elliptique. *Comm Soc Math Kharkov*, 1917, 15: 38–45
- 3 Osserman R. Proof of a conjecture of Nirenberg. *Comm Pure Appl Math*, 1959, 12: 229–232
- 4 Xavier F. The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Ann of Math* (2), 1981, 113: 211–214
- 5 Voss K. Über vollstandige minimal flachen. *Enseign Math* (2), 1964, 10: 316–317
- 6 Fujimoto H. On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces. *J Math Soc Japan*, 1988, 40: 235–247
- 7 Xin Y. L. *Minimal Submanifolds and Related Topics*. Singapore: World Scientific Publishing, 2003
- 8 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann of Math* (2), 1968, 88: 62–105
- 9 Bombieri E, De Giorgi E, Giusti E. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent Math*, 1969, 7: 243–268
- 10 Heinz E. Sur les solutions de l'équation de surface minimum. In: *Géométrie Différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg*. Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1953, 61–65
- 11 Schoen R, Simon L, Yau S. T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. *Acta Math*, 1975, 134: 275–288

- 12 Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm Pure Appl Math*, 1961, 14: 577–591
- 13 Yau S T. *Open Problems, Seminar on Differential Geometry*. Princeton: Princeton University Press, 1982
- 14 Solomon B. On the Gauss map of an area-minimizing hypersurface. *J Differential Geom*, 1984, 19: 221–232
- 15 丘成桐, 孙理察. 附录二: 问题集. 见: 微分几何. 北京: 科学出版社, 1988, 358–403
- 16 Yau S T. Open problems in geometry. In: *Chern—A Great Geometer of the Twentieth Century*. Hong Kong: International Press, 1992, 275–319
- 17 Jost J, Xin Y, Yang L. The regularity of harmonic maps into spheres and applications to Bernstein problems. *J Differential Geom*, 2012, 90: 131–176
- 18 Lawson H B, Osserman R. Non-existence, non-uniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system. *Acta Math*, 1977, 139: 1–17
- 19 Hildebrandt S, Jost J, Widman K O. Harmonic mappings and minimal submanifolds. *Invent Math*, 1980, 62: 269–298
- 20 Jost J, Xin Y L. Bernstein type theorems for higher codimension. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1999, 9: 277–296
- 21 Jost J, Xin Y L, Yang L. The Gauss image of entire graphs of higher codimension and Bernstein type theorems. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2013, 47: 711–737
- 22 Jost J, Xin Y L, Yang L. The geometry of Grassmannian manifolds and Bernstein-type theorems for higher codimension. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 2016, 16: 1–39
- 23 Calabi E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. *Proc Sympos Pure Math*, 1970, 15: 223–230
- 24 Cheng S Y, Yau S T. Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces. *Ann of Math* (2), 1976, 104: 407–419
- 25 Palmer B. The Gauss map of a spacelike constant mean curvature hypersurface of Minkowski space. *Comment Math Helv*, 1990, 65: 52–57
- 26 Xin Y L. On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space. *Comment Math Helv*, 1991, 66: 590–598
- 27 Aiyama R. The generalized Gauss map of a space-like submanifold with parallel mean curvature vector in a pseudo-Euclidean space. *Jpn J Math*, 1994, 20: 93–114
- 28 Xin Y L, Ye R G. Bernstein-type theorems for space-like surfaces with parallel mean curvature. *J Reine Angew Math*, 1997, 489: 189–198
- 29 Cao H D, Shen Y, Zhu S H. A Bernstein theorem for complete spacelike constant mean curvature hypersurfaces in Minkowski space. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1998, 7: 141–157
- 30 Jost J, Xin Y L. Some aspects of the global geometry of entire space-like submanifolds. *Results Math*, 2001, 40: 233–245
- 31 Yu Z H. The value distribution of the hyperbolic Gauss map. *Proc Amer Math Soc*, 1997, 125: 2997–3002
- 32 Bryant R. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. *Astérisque*, 1987, 154–155: 321–347

The value distribution under the Gauss map for a minimal submanifold

Yuanlong Xin

Abstract In this paper, some new aspects for the value distribution of the image under the Gauss map for a minimal submanifold in Euclidean space are reviewed, including Yau's problem for minimal hypersurfaces and Lawson-Osserman's problem for higher codimension. Among them the author's joint work with his collaborators in recent years is described.

Keywords minimal submanifold, Gauss map, Bernstein theorem

MSC(2010) 49Q05, 53A07, 58E20

doi: 10.1360/N012017-00186