一类随机环境中随机游动的值域问题

王华明

安徽师范大学统计系, 芜湖 241003

E-mail: hmking@ahnu.edu.cn

收稿日期: 2016-09-09; 接受日期: 2017-01-03; 网络出版日期: 2017-04-10

国家自然科学基金 (批准号: 11501008)、安徽省自然科学基金 (批准号: 1508085QA12) 和安徽省教育厅自然科学基金 (批准号: KJ2014A085) 资助项目

摘要 考虑一类随机环境中的随机游动, 记为 $\{X_n\}_{n \geq 0}$. 若某时刻粒子在位置 n , 则下一时刻, 粒子往左只可能跳到 $n-1$, 往右可能跳到 $n+1$, 也可能跳到 $n+2$. 对于向右暂留的情形, 用 $N(x) := \#\{i \in [0, x] : \exists n \geq 0, X_n = i\}$ 表示粒子轨道访问过的位于 $[0, x]$ 中的点的个数. 通过研究“更新结构”, 可证明存在常数 $0 < \theta < 1$ 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = \theta$. 该结论表明, 粒子轨道只访问了整数轴一定比例的点. 对紧邻随机游动而言, 这种现象在任何情形下都是不可能发生的.

关键词 随机游动 随机环境 值域 更新结构**MSC (2010) 主题分类** 60K37, 60K05

1 引言

1.1 背景和动机

与简单随机游动相比, 随机环境中随机游动 (简记为 RWRE) 拥有很多奇特的现象. 本文考虑一类随机环境中有界跳幅随机游动, 即 (L, R) RWRE. 设某时刻游动在位置 n , 则下一时刻, 游动往左最多能跳到 $n-L$, 往右最多能跳到 $n+R$, 其中 L 和 R 为正整数. (L, R) RWRE 的极限行为和紧邻 RWRE 大致相同. 例如, 两者都具有慢速度性质. 事实上, 如果用 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 表示 RWRE, 则可能会发生如下的情形: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0$, 即游动以次线性的速度趋于无穷大. 相关细节参见文献 [1, 2]. 这两类 RWRE 也同时遵从所谓的“ $\log^2$ 律”, 即对常返情形, 在一定条件下可证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{X_n}{\log^2 n} \xrightarrow{d} X$, 其中 X 是某个非退化的随机变量 (参见文献 [3, 4]).

本文欲揭示由“有界跳幅”引起的新现象. 由于游动是非紧邻的, 对暂留情形, 在趋向无穷大的过程中, 它可能跃过某一些点. 本文通过研究 $L=1$ 和 $R=2$ 这种特殊情形来揭示这种新现象. 结果表明, 暂留的 $(1, 2)$ RWRE 在趋向无穷大的过程中, 跃过了正整数轴 $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ 一定比例点.

在现有文献中, 不论是对 RWRE 还是经典随机游动, 通常学者们考虑的是时刻 n 之前游动的值域, 即 $\#\{i \in \mathbb{Z} : \exists 0 \leq k \leq n, X_k = i\}$. 记号“ $\#\{\}$ ”表示集合“ $\{\}$ ”中不同元素的个数. 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \in \mathbb{Z} : \exists 0 \leq k \leq n, X_k = i\}}{n}$$

英文引用格式: Wang H M. Range of a random walk in random environment (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 841–852, doi: 10.1360/SCM-2016-0566

通常是学者们关心的问题.

本文从一个新的角度去研究 (1, 2) RWRE $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 的值域问题. 对 $x > 0$, 考虑

$$N(x) = \#\{i \in [0, x] : \exists n \geq 0, X_n = i\},$$

它表示游动整个轨道曾经访问过的位于 $[0, x]$ 中的点. 对于向右暂留的情形, 我们证明几乎必然地有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = \theta,$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ 为一个常数. 该结果表明, 虽然游动趋于无穷大, 但 $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ 中一定比例的点从未被游动访问过. 具体模型和主要结论将在下一小节中将给出.

1.2 模型和主要结论

对 $i \in \mathbb{Z}$, 设 $\omega_i = (\omega_i(-1), \omega_i(1), \omega_i(2))$ 为 $\{i-1, i+1, i+2\}$ 上的一个概率测度. 设 Ω 是由所有的 $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 组成的集合. 设 τ 是 Ω 上的弱拓扑, 并设 $\mathcal{F}$ 为 τ 上的 Borel σ -代数. 设 $\mathbb{P}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个概率测度, 使得 $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{P}$ 之下为一列独立同分布的随机序列.

对 ω 的一个实现, 考虑初值为 x_0 的 Markov 链 $\{X_n\}_{n \geq 0}$, 其转移概率为

$$\begin{cases} \mathbb{P}_\omega(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = \omega_i(-1), \\ \mathbb{P}_\omega(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = \omega_i(1), \\ \mathbb{P}_\omega(X_{n+1} = i+2 \mid X_n = i) = \omega_i(2), \\ \mathbb{P}_\omega(X_0 = x_0) = 1. \end{cases}$$

由该 Markov 链诱导出的测度 $\mathbb{P}_\omega^{x_0}$ 通常称为 Quenched 概率. 定义如下一个新的概率测度:

$$\mathbb{P}^{x_0}(\cdot) := \int \mathbb{P}_\omega^{x_0}(\cdot) \mathbb{P}(d\omega).$$

该测度通常称为 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 的 Annealed 概率. 本文分别用 $\mathbb{E}_\omega^{x_0}$ 、 $\mathbb{E}^{x_0}$ 和 $\mathbb{E}$ 表示 $\mathbb{P}_\omega^{x_0}$ 、 $\mathbb{P}^{x_0}$ 和 $\mathbb{P}$ 对应的数学期望算子. 当上标 $x_0 = 0$ 时, 通常将之省略.

对 $i \in \mathbb{Z}$, 记 $a_i(1) = \frac{\omega_i(1) + \omega_i(2)}{\omega_i(-1)}$, $a_i(2) = \frac{\omega_i(2)}{\omega_i(-1)}$, 并定义矩阵

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i(1) & a_i(2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 在概率 $\mathbb{P}$ 之下形成一系列独立同分布的随机矩阵. 如果条件

$$\mathbb{E}(\log \omega_0(-1)) > -\infty, \quad \mathbb{E}(\log \omega_0(2)) > -\infty \quad (1.1)$$

成立, 则 $\mathbb{E}|\ln \|A_0^{-1}\|| + \mathbb{E}|\ln \|A_0\|| < \infty$. 由 Oseledec 遍历定理^[5] 可计算随机矩阵序列 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{P}$ 之下的 Lyapunov 指数. 将之从小到大排列如下:

$$-\infty < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty.$$

再者, 对 $i \in \mathbb{Z}$, 矩阵 $A_i A_{i+1}$ 所有元素都是严格正的, 所以, 最大的 Lyapunov 指数 γ_2 满足

$$\gamma_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_0 A_1 \cdots A_{n-1}\|, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

在文献 [6] 中可找到如下关于 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 常返性的判定.

常返性判定 设条件 (1.1) 成立, 则

- (1) $\gamma_2 > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$;
- (2) $\gamma_2 = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(-\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$;
- (3) $\gamma_2 < 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) = 1$.

注意到在文献 [6] 中, 常返性判定准则是用随机矩阵序列 $\{\bar{A}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 的 Lyapunov 指数给出的, 其中

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_i(2) & a_i(1) \end{pmatrix}.$$

由于 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{\bar{A}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 的 Lyapunov 指数完全相同, 所以, 此处用 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 的 Lyapunov 指数来给出常返性判定准则并无问题. 如下定理是本文的主要结论.

定理 1 设条件 (1.1) 成立, 并假定 $\gamma_2 > 0$, 则存在常数 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \in [0, x] : \exists n \geq 0, X_n = i\}}{x} = \theta, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

本文将给出 θ 的具体表达, 见下文中 (2.1)、(2.2) 和 (2.12). θ 的表达式与游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 一个正游程所能达到的最大值有关. 定义 $D = \inf\{n \geq 0 : X_n < X_0\}$, 并在 $D < \infty$ 时定义

$$M = \sup\{X_n : 0 \leq n \leq D\},$$

则 M 表示游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 一个正游程所能达到的最大值. 本文约定 $\inf \emptyset = \infty$, $\sup \emptyset = 0$. 如下定理给出了 M 的尾概率估计.

定理 2 设条件 (1.1) 成立, 并假设 $\gamma_2 > 0$, 则存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得对任意 $n > 0$, 有 $\mathbb{P}(M > n, D < \infty) < c_1 e^{-c_2 n}$.

作为引言结尾, 我们给出定理 1 和 2 的证明思路. 定理 1 的证明依赖于游动的更新结构. 设 $0 = \iota_0 < \iota_1 < \iota_2 < \cdots$ 是游动一系列的再生时. 在每一个再生时 ι_n , 游动突破之前所访问过的最大高度, 到达一个新高度. 并且这个新高度与之前最大高度的差值为 2. 在此之后, 游动永远不再访问该新高度之下的任何点. 从而, 位于新高度与之前最大高度之间的一个点从未被游动访问到. 若进一步能证明在 $\mathbb{P}(\cdot | D = \infty)$ 之下, $\{X_{\iota_i} - X_{\iota_{i-1}}\}_{i \geq 2}$ 是一列相互独立并与 X_{ι_1} 同分布的随机变量, 且 $\mathbb{E}(X_{\iota_1} | D = \infty) < \infty$, 则可断言 $\mathbb{Z}_+$ 一定比例的点从未被游动访问到, 从而完成定理 1 的证明. 另一方面, 为证明定理 2, 本文用随机矩阵乘积的大偏差为工具去估计游动的逃逸概率, 以得到 M 的尾概率估计.

2 (1, 2) RWRE 的更新结构

本节将介绍游动的更新结构. 该更新结构是证明定理 1 的关键. 就我们所了解的文献而言, 这种方法在文献 [7] 中首次被用来证明紧邻 RWRE 的更新定理. 该更新定理后来在文献 [8] 中被推广到了

$(L, 1)$ RWRE. 值得一提的是, 更新结构被成功用于研究高维 RWRE 的极限定理 (参见文献 [9–11]). 本文借鉴了文献 [10] 中的一些手法.

定义 $D = \inf\{n \geq 0 : X_n < X_0\}$. 用 $(\theta_n)_{n \geq 0}$ 表示 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 上的推移算子. 令 $S_0 = 0, M_0 = X_0$. 定义

$$\begin{aligned} S_1 &= \inf\{n : X_n > M_0\}, \\ R_1 &= D \circ \theta_{S_1} + S_1, \\ M_1 &= \sup\{X_n : 0 \leq n \leq R_1\}. \end{aligned}$$

对 $k \geq 1$, 依次定义

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \inf\{n : X_n > M_k\}, \\ R_{k+1} &= D \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1}, \\ M_{k+1} &= \sup\{X_n : 0 \leq n \leq R_{k+1}\}. \end{aligned}$$

易知

$$0 < S_1 \leq R_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_k \leq R_k \leq \infty.$$

令

$$K = \inf\{k \geq 1 : S_k < \infty, \text{ 但 } R_k = \infty\}.$$

设 $\tau_0 = 0$. 当 $K < \infty$ 时, 令 $\tau_1 = S_K$. 定义

$$\tau_2 = [\tau_1](X.) + [\tau_1](X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}).$$

进一步对 $k \geq 2$ 依次定义

$$\tau_{k+1} = [\tau_k](X.) + [\tau_k](X_{\tau_k+} - X_{\tau_k}).$$

在此处及下文中, 记号 $[Y](Z.)$ 表示由过程 $Z.$ 定义的随机变量 Y . 若 Y 是由 $X.$ 定义的, 有时也将 $[Y](X.)$ 简写为 Y .

引理 1 如果 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$, 则 $P(D = \infty) > 0$.

证明 用反证法. 设 $P(D = \infty) = 0$, 则 $P(D < \infty) = 1$. 由此可知, $P_\omega(D < \infty) = 1, \mathbb{P}\text{-a.s.}$ 因而,

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \leq 0\right) = 1.$$

这与 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$ 相矛盾. □

引理 2 如果 $P(D = \infty) > 0$, 则 $P(K < \infty) = 1$, 进而有 $P(\tau_1 < \infty) = 1$.

证明 对 $k \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} P(R_k < \infty) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}_\omega(S_k < \infty, P_\omega^{X_{S_k}}(D < \infty))) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(P_\omega(S_k < \infty, X_{S_k} = x) P_\omega^x(D < \infty)) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(S_k < \infty, X_{S_k} = x) P(D < \infty) \\ &= P(S_k < \infty) P(D < \infty) \\ &\leq P(R_{k-1} < \infty) P(D < \infty), \end{aligned}$$

其中第三个等号成立是因为 ω 在 $\mathbb{P}$ 之下独立同分布, 且 $P_\omega(S_k < \infty, X_{S_k} = x)$ 是 $\sigma(\omega_i, i < x)$ -可测的, $P_\omega^x(D < \infty)$ 是 $\sigma(\omega_i, i \geq x)$ -可测的. 由数学归纳法, 对 $k \geq 1$, 有 $P(R_k < \infty) \leq P(D < \infty)^k$. 再利用 Borel-Cantelli 引理可得 $P(\exists k, \text{使得 } R_k = \infty) = 1$. 从而, $P(K < \infty) = 1$. $\square$

注意到, 若 $\gamma_2 > 0$, 则有 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$. 于是由引理 1 和 2 可知, $P(D = \infty) > 0$. 从而, $P(K < \infty) = P(\tau_1 < \infty) = 1$. 对 $k \geq 1$, 记

$$\mathcal{G}_k = \sigma(\tau_1, \dots, \tau_k; (X_{\tau_k \wedge n})_{n \geq 0}, (\omega_y)_{y < X_{\tau_k}}).$$

用类似于文献 [7, 11] 中的手法, 可以证明如下引理.

引理 3 假设条件 (1.1) 成立, 并假定 $\gamma_2 > 0$, 则对 $k \geq 1$, 有

$$P[(X_{\tau_k+n} - X_{\tau_k})_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq X_{\tau_k}} \in \cdot \mid \mathcal{G}_k] = P[(X_n)_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq 0} \in \cdot \mid D = \infty].$$

对 $n \geq 0$, 定义 $T_n := \inf\{k : X_k > n\}$.

引理 4 设条件 (1.1) 成立, 并假定 $\gamma_2 > 0$, 则有

$$E(X_{\tau_1}) = E(X_{S_1}) + \frac{E(M + \xi; D < \infty)}{P(D = \infty)} < \infty, \quad (2.1)$$

其中 $\xi := X_{T_M} - M$.

证明 注意到

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_1}) &= \sum_{k \geq 1} E(X_{\tau_1}; K = k) = E(X_{S_k}; S_k < \infty, D \circ \theta_{S_k} = \infty) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[E_\omega(X_{S_k}; S_k < \infty, X_{S_k} = x, D \circ \theta_{S_k} = \infty)] \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[x P_\omega^x(D = \infty) P_\omega(S_k < \infty, X_{S_k} = x)], \end{aligned}$$

其中第三个等号由强 Markov 性可证. 因为 $P_\omega(S_k < \infty, X_{S_k} = x)$ 是 $\sigma(\omega_i, i < x)$ -可测的, $P_\omega^x(D = \infty)$ 是 $\sigma(\omega_i, i \geq x)$ -可测的, 所以, 由环境的平稳性和独立性可知,

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_1}) &= \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in \mathbb{Z}} x P(D = \infty) P(S_k < \infty, X_{S_k} = x) \\ &= \sum_{k \geq 1} P(D = \infty) E(X_{S_k}; S_k < \infty). \end{aligned}$$

对 $k \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} E(X_{S_k}; S_k < \infty) &= E(X_{S_k}; S_{k-1} < \infty, D \circ \theta_{S_{k-1}} < \infty) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[E_\omega^x(x + M + \xi; D < \infty) P_\omega(S_{k-1} < \infty, X_{S_{k-1}} = x)] \\ &\quad (\text{由环境的平稳性和独立性}) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} E(x + M + \xi; D < \infty) P(S_{k-1} < \infty, X_{S_{k-1}} = x) \\ &= E(X_{S_{k-1}}; S_{k-1} < \infty) P(D < \infty) + E(M + \xi; D < \infty) P(S_{k-1} < \infty). \end{aligned}$$

由于 $P(S_1 < \infty) = 1$, 因此由数学归纳法可知,

$$\begin{aligned} P(S_k < \infty) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[\mathbb{E}_\omega^x(D < \infty) P_\omega(S_{k-1} < \infty, X_{S_{k-1}} = x)] \\ &= P(S_{k-1} < \infty) P(D < \infty) = P(D < \infty)^{k-1}. \end{aligned}$$

进一步利用数学归纳法可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{S_k}; S_k < \infty) &= \mathbb{E}(X_{S_{k-1}}; S_{k-1} < \infty) P(D < \infty) + \mathbb{E}(M + \xi; D < \infty) P(D < \infty)^{k-2} \\ &= \mathbb{E}(X_{S_{k-2}}; S_{k-2} < \infty) P(D < \infty)^2 + 2\mathbb{E}(M + \xi; D < \infty) P(D < \infty)^{k-2} \\ &= \mathbb{E}(X_{S_1}) P(D < \infty)^{k-1} + (k-1) \mathbb{E}(M + \xi; D < \infty) P(D < \infty)^{k-2}. \end{aligned}$$

由定理 2 可知 $\mathbb{E}(M) < \infty$. 又因为 $P(D = \infty) > 0$, $P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 1$, 所以,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tau_1}) &= \sum_{k \geq 1} P(D = \infty) \mathbb{E}(X_{S_k}; S_k < \infty) \\ &= \mathbb{E}(X_{S_1}) + \frac{\mathbb{E}(M + \xi; D < \infty)}{P(D = \infty)} < \infty. \end{aligned}$$

引理证毕. □

注 1 从证明过程可看出, 引理 4 的结论可进一步加强. 事实上, 存在常数 $c_3 > 0$, 使得

$$\mathbb{E}(e^{c_3 X_{\tau_1}}) < \infty.$$

由定义知, $K = \inf\{k > 0 : S_k < \infty, D \circ \theta_{S_k} = \infty\}$, $\tau_1 = S_K$. 定义

$$\nu_1 = \inf\{k \geq 1 : [X_{\tau_1} - M_{K-1}](X_{\tau_{k-1}+} - X_{\tau_{k-1}}) = 2\}.$$

对 $k \geq 1$, 依次定义

$$\nu_{k+1} = [\nu_1](X.) + [\nu_k](X_{\nu_1+} - X_{\nu_1}).$$

引理 5 设条件 (1.1) 成立, 并假定 $\gamma_2 > 0$, 则对 $k \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} P \left[\begin{array}{l} (X_{\tau_{\nu_k}+n} - X_{\tau_{\nu_k}})_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq X_{\tau_{\nu_k}}} \in \cdot, \\ (X_n)_{n \leq \tau_{\nu_k}} \in \cdot, (\omega_y)_{y < X_{\tau_{\nu_k}}} \in \cdot \end{array} \right] \\ = P[(X_n)_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq 0} \in \cdot | D = \infty] P[(X_n)_{n \leq \tau_{\nu_k}} \in \cdot, (\omega_y)_{y < X_{\tau_{\nu_k}}} \in \cdot]. \end{aligned}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned} P \left[\begin{array}{l} (X_{\tau_{\nu_k}+n} - X_{\tau_{\nu_k}})_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq X_{\tau_{\nu_k}}} \in \cdot, \\ (X_n)_{n \leq \tau_{\nu_k}} \in \cdot, (\omega_y)_{y < X_{\tau_{\nu_k}}} \in \cdot \end{array} \right] \\ = \sum_{j=1}^{\infty} P \left[\begin{array}{l} (X_{\tau_j+n} - X_{\tau_j})_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq X_{\tau_j}} \in \cdot, \\ (X_n)_{n \leq \tau_j} \in \cdot, (\omega_y)_{y < X_{\tau_j}} \in \cdot, \nu_k = j \end{array} \right]. \end{aligned}$$

由于事件 $\{\nu_k = j\}$ 是 $\mathcal{G}_j$ -可测的, 由引理 3 可知, 上面等式的右端等于

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[(X_n)_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq 0} \in \cdot \mid D = \infty] \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[(X_n)_{n \leq \tau_{\nu_k}} \in \cdot, (\omega_y)_{y < X_{\tau_{\nu_k}}} \in \cdot, \nu_k = j] \\ &= \mathbb{P}[(X_n)_{n \geq 0} \in \cdot, (\omega_y)_{y \geq 0} \in \cdot \mid D = \infty] \mathbb{P}[(X_n)_{n \leq \tau_{\nu_k}} \in \cdot, (\omega_y)_{y < X_{\tau_{\nu_k}}} \in \cdot]. \end{aligned}$$

引理证毕. □

为方便书写, 记 $\nu = \nu_1$.

引理 6 设条件 (1.1) 成立, 并假定 $\gamma_2 > 0$, 则

$$\mathbb{E}(X_{\tau_\nu}) = \mathbb{E}(X_{\tau_1}) + \frac{\mathbb{P}(X_{\tau_1} - M_{K-1} = 1) \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mid D = \infty)}{\mathbb{P}(X_{\tau_1} - M_{K-1} = 2 \mid D = \infty)} < \infty. \quad (2.2)$$

证明 注意到

$$\{\nu = 1\} = \{[X_{\tau_1} - M_{K-1}](X_\cdot) = 2\},$$

且对 $l \geq 2$, 有

$$\{\nu = l\} = \left\{ \begin{array}{l} [X_{\tau_1} - M_{K-1}](X_{\tau_j+} - X_{\tau_j}) = 1, j = 0, \dots, l-2, \\ \text{但 } [X_{\tau_1} - M_{K-1}](X_{\tau_{l-1}+} - X_{\tau_{l-1}}) = 2 \end{array} \right\}.$$

对 $j = 0, \dots, l-1$, 为方便书写, 记 $Y_j = [X_{\tau_1} - M_{K-1}](X_{\tau_j+} - X_{\tau_j})$, 则 Y_j 是 $\mathcal{G}_{j+1}$ -可测的, 并且由引理 3 知, $Y_1, \dots, Y_{l-1}$ 拥有共同的分布

$$\mathbb{P}([X_{\tau_1} - M_{K-1}](X_\cdot) \in \cdot \mid D = \infty).$$

为方便书写, 暂时令

$$p = \mathbb{P}(Y_0 = 2 \mid D = \infty).$$

易知

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tau_\nu}) &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_{\tau_l}; \nu = l) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^l X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}; \nu = l\right) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^l (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}) \mathbf{1}_{Y_{l-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

此处约定空乘积等于 1.

固定 $l \geq 3$. 因为 $\prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}$ 是 $\mathcal{G}_{l-1}$ -可测的, 由引理 3 可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left((X_{\tau_l} - X_{\tau_{l-1}}) \mathbf{1}_{Y_{l-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[(X_{\tau_l} - X_{\tau_{l-1}}) \mathbf{1}_{Y_{l-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1} \mid \mathcal{G}_{l-1}\right]\right) \\ &= \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=2} \mid D = \infty) \mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right]. \end{aligned}$$

同样的技巧用 $l-1$ 次, 可得

$$\mathbb{E}\left((X_{\tau_l} - X_{\tau_{l-1}})\mathbf{1}_{Y_{l-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right) = \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=2} \mid D = \infty) \mathbb{P}(Y_0 = 1)(1-p)^{l-2}. \quad (2.4)$$

类似地, 对 $2 \leq i \leq l-1$, 有

$$\mathbb{E}\left((X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})\mathbf{1}_{Y_{i-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right) = \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=1} \mid D = \infty) \mathbb{P}(Y_0 = 1)(1-p)^{l-3}p, \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E}\left((X_{\tau_1} - X_{\tau_0})\mathbf{1}_{Y_{l-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right) = \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=1})(1-p)^{l-2}p. \quad (2.6)$$

另外, 对 $l=1$, 有

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^l (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})\mathbf{1}_{Y_{i-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right) = \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=2}); \quad (2.7)$$

对 $l=2$ 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^l (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})\mathbf{1}_{Y_{i-1}=2} \prod_{j=0}^{l-2} \mathbf{1}_{Y_j=1}\right) \\ &= p\mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=1}) + \mathbb{P}(Y_0 = 1)\mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=2} \mid D = \infty). \end{aligned} \quad (2.8)$$

将 (2.4)–(2.8) 代入 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{\tau_\nu}) &= \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=2}) + p\mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=1}) + \mathbb{P}(Y_0 = 1)\mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=2} \mid D = \infty) \\ &+ \sum_{l=3}^{\infty} (l-2)\mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=1} \mid D = \infty) \mathbb{P}(Y_0 = 1)(1-p)^{l-3}p \\ &+ \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=1})(1-p)^{l-2}p + \mathbb{E}(X_{\tau_1} \mathbf{1}_{Y_0=2} \mid D = \infty) \mathbb{P}(Y_0 = 1)(1-p)^{l-2}. \end{aligned}$$

于是,

$$\mathbb{E}(X_{\tau_\nu}) = \mathbb{E}(X_{\tau_1}) + \frac{\mathbb{P}(X_{\tau_1} - M_{K-1} = 1)\mathbb{E}(X_{\tau_1} \mid D = \infty)}{\mathbb{P}(X_{\tau_1} - M_{K-1} = 2 \mid D = \infty)}.$$

下面证明 $\mathbb{E}(X_{\tau_\nu}) < \infty$. 因为 $\omega_0(2)$ 关于 $\sigma(\omega_i, i \leq 0)$ -可测, $\mathbb{P}_\omega^2(D = \infty)$ 关于 $\sigma(\omega_i, i \geq 2)$ -可测, 所以,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{\tau_1} - M_{K-1} = 2, D = \infty) \\ & \geq \mathbb{P}(X_{S_1} - M_0 = 2, K = 1, D = \infty) \\ & = \mathbb{E}(\omega_0(2)\mathbb{P}_\omega^2(D = \infty)) = \mathbb{E}(\omega_0(2))\mathbb{P}(D = \infty) > 0. \end{aligned}$$

又由引理 4 可知 $\mathbb{E}(X_{\tau_1})$ 是有限的. 引理证毕. $\square$

定理 1 的证明 回忆一下, τ_k ($k \geq 1$) 是一系列再生时. 特别地, 在再生时 τ_{ν_k} ($k \geq 1$) 处, $X_{\tau_{\nu_k}}$ 与 τ_{ν_k} 前游动所访问过的最大高度的差值为 2. 注意到在再生时 τ_{ν_k} 之后, 游动永远不再访问位于 $X_{\tau_{\nu_k}}$ 左边的任何点, 所以, 游动从未访问过位置 $X_{\tau_{\nu_k}} - 1$ (见图 1). 但由于游动往左是紧邻的, 所以, 每个位于区间 $[X_{\tau_{\nu_{k-1}}}, X_{\tau_{\nu_k}-1}]$ 之间的点至少被游动访问过一次. 因此, 在区间 $[0, X_{\tau_{\nu_k}}]$ 中, 正好有 k 个位置 (即 $X_{\tau_{\nu_i}} - 1$ ($i = 1, \dots, k$)) 从未被游动访问到.

图 1 位置 $X_{\tau_{\nu_k}} - 1$ 从未被游动访问到

记

$$N(x) = \#\{i \in [0, x] : \exists n \geq 0, X_n = i\}.$$

注意到, 对于 $x \in \mathbb{Z}_+$, 存在唯一的随机数 $k(x)$ 使得

$$X_{\tau_{\nu_k}} \leq x < X_{\tau_{\nu_{k+1}}}.$$

于是有

$$\frac{N(X_{\tau_{\nu_k}})}{X_{\tau_{\nu_{k+1}}}} \leq \frac{N(x)}{x} \leq \frac{N(X_{\tau_{\nu_{k+1}}})}{X_{\tau_{\nu_k}}}. \quad (2.9)$$

由引理 5 可知,

$$(X_{\tau_{\nu_1}}, \tau_{\nu_1}), (X_{\tau_{\nu_2}} - X_{\tau_{\nu_1}}, \tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1}), \dots, (X_{\tau_{\nu_k}} - X_{\tau_{\nu_{k-1}}}, \tau_{\nu_k} - \tau_{\nu_{k-1}}), \dots$$

是相互独立的. 此外, 在概率 $P(\cdot | D = \infty)$ 下,

$$(X_{\tau_{\nu_2}} - X_{\tau_{\nu_1}}, \tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1}), \dots, (X_{\tau_{\nu_k}} - X_{\tau_{\nu_{k-1}}}, \tau_{\nu_k} - \tau_{\nu_{k-1}}), \dots$$

与 $(X_{\tau_{\nu_1}}, \tau_{\nu_1})$ 同分布. 因而, 由强大数定律可知, P-a.s.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(X_{\tau_{\nu_k}})}{X_{\tau_{\nu_{k+1}}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\tau_{\nu_k}} - k}{X_{\tau_{\nu_{k+1}}}} = \frac{E(X_{\tau_{\nu}} | D = \infty) - 1}{E(X_{\tau_{\nu}} | D = \infty)}. \quad (2.10)$$

由类似方法可得 P-a.s.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(X_{\tau_{\nu_{k+1}}})}{X_{\tau_{\nu_k}}} = \frac{E(X_{\tau_{\nu}} | D = \infty) - 1}{E(X_{\tau_{\nu}} | D = \infty)}. \quad (2.11)$$

注意到, 由引理 6 可知, $E(X_{\tau_{\nu}} | D = \infty) < \infty$. 于是由 (2.9)–(2.11) 可证明 P-a.s.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = \frac{E(X_{\tau_{\nu}} | D = \infty) - 1}{E(X_{\tau_{\nu}} | D = \infty)} < 1. \quad (2.12)$$

定理 1 证毕. □

3 定理 2 的证明

对 $n \geq 0$, 定义 $\tilde{T}_n = \inf\{k \geq 0 : X_k = n\}$. 易知

$$\begin{aligned} P(M = n, D < \infty) &= \mathbb{E}(P_\omega(M = n, D < \infty)) \\ &= \mathbb{E}(P_\omega(M = n, \tilde{T}_n < \infty, D < \infty)) \\ &\leq \mathbb{E}(P_\omega^n(\text{游动在击中 } [n+1, \infty) \text{ 之前先击中 } (-\infty, 0))) \\ &= \mathbb{E}(P_\omega(\text{游动在击中 } [1, \infty) \text{ 之前先击中 } (-\infty, -n))). \end{aligned}$$

由一系列精细的计算可得

$$\begin{aligned} P_\omega[\text{游动在击中 } [1, \infty) \text{ 之前先击中 } (-\infty, -n)] \\ = \frac{1}{1 + \sum_{j=-n}^0 e_1 A_j A_{j+1} \cdots A_0 e_1^t}, \end{aligned}$$

具体细节参见文献 [12]. 因而有

$$\begin{aligned} P(M = n, D < \infty) &= \mathbb{E}(P_\omega(M = n, D < \infty)) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 + \sum_{j=-n+1}^0 e_1 A_j A_{j+1} \cdots A_0 e_1^t}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 + e_1 A_{-n+1} \cdots A_0 e_1^t}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 + (a_{-n+1}(1)e_1 + a_{-n+1}(2)e_2)A_{-n+2} \cdots A_{-1}(a_0(1)e_1 + e_2)^t}\right). \end{aligned}$$

由环境的平稳性可得

$$\begin{aligned} P(M = n, D < \infty) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 + \min\{a_0(1), a_0(2)\} \min\{a_{n-1}(1), 1\} \mathbf{1} A_1 \cdots A_{n-2} \mathbf{1}^t}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 + \min\{a_0(1), a_0(2)\} \min\{a_{n-1}(1), 1\} \|A_1 \cdots A_{n-2}\|}\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{1} = e_1 + e_2$.

注意到在条件 (1.1) 之下, 矩阵 A_i ($i \in \mathbb{Z}$) 的所有元素非负且

$$A_i A_{i+1} \gg 0,$$

其中 $A \gg 0$ 表示矩阵 A 的所有元素严格正. 所以, 由 Fibonacci 定理, 对每个 A_i , 存在一个非负特征根 λ 满足两个条件: (1) λ 是矩阵 A_i 的特征方程的一个单根; (2) λ 是 A_i 的最大特征根 (模最大). 因此, A_i 在 $\mathbb{P}$ 之下的支撑是压缩的. 此外, 根据矩阵 A_i ($i \in \mathbb{Z}$) 特定的内部结构可知, 由 A_i 在 $\mathbb{P}$ 之下的支撑生成的群是强不可约的. 从而利用随机矩阵乘积的大偏差原理 (参见文献 [13]) 可知, 固定某充分小的 $\delta > 0$, 对于 $\eta \in (\gamma_2 - \delta, \gamma_2)$, 存在常数 $c_\eta > 0$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_{n-2}\| < \eta\right) = -c_\eta.$$

为方便书写, 暂时记 $B_0(\omega) := \min\{a_0(1), a_0(2)\}$, $B_{n-1}(\omega) := \min\{a_{n-1}(1), 1\}$.

由 (1.1) 知,

$$\mathbb{E}(|\log B_0(\omega)| + |\log B_{n-1}(\omega)|) < \infty.$$

进而, 存在常数 $0 < \rho < \gamma_2$, $c_4 > 0$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \left[\frac{1}{n} \log \{B_0(\omega) B_{n-1}(\omega) \|A_1 \cdots A_{n-2}\|\} < \rho \right] = -c_4.$$

固定 $0 < c_5 < c_4$. 存在 $N > 0$ 使得对任意 $n > N$, 有

$$\mathbb{P} \left[\frac{1}{n} \log \{B_0(\omega) B_{n-1}(\omega) \|A_1 \cdots A_{n-2}\|\} < \rho \right] < e^{-c_5 n}.$$

将上式代入 (3.1) 可知, 存在常数 $c_6, c_7 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = n, D < \infty) &\leq e^{-\rho n} + \mathbb{P}(B_0(\omega) B_{n-1}(\omega) \|A_1 \cdots A_{n-2}\| < e^{\rho n}) \\ &\leq c_6 e^{-c_7 n}. \end{aligned}$$

所以, 存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得

$$\mathbb{P}(M > n, D < \infty) < c_1 e^{-c_2 n}.$$

定理 2 证毕.

致谢 感谢审稿人仔细阅读本文并提出重要的修改建议; 感谢洪文明教授的启发与讨论.

参考文献

- 1 Key E S. Recurrence and transience criteria for random walk in a random environment. *Ann Probab*, 1984, 12: 529–560
- 2 Solomon F. Random walks in a random environment. *Ann Probab*, 1975, 3: 1–31
- 3 Letchikov A V. Localization of one-dimensional random walks in random environments. *Sov Sci Rev C Math Phys*, 1989, 8: 173–220
- 4 Sinai Y G. The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium. *Theory Probab Appl*, 1982, 27: 256–268
- 5 Oseledec V I. Multiplicative ergodic theorem: Characteristic Lyapunov exponents of dynamic systems. *Tr Mosk Mat Obs*, 1968, 19: 179–210
- 6 Letchikov A V. A criterion for linear drift and the central limit theorem for one-dimensional random walks in a random environment. *Russian Acad Sci Sb Math*, 1994, 79: 73–92
- 7 Kesten H. A renewal theorem for random walk in a random environment. *Proc Sympos Pure Math*, 1977, 31: 67–77
- 8 Hong W M, Sun H Y. Renewal theorem for $(L, 1)$ -random walk in random environment. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2013, 33: 1736–1748
- 9 Drewitz A, Ramirez A F. *Selected Topics in Random Walks in Random Environments. Topics in Percolative and Disordered Systems*. New York: Springer, 2014
- 10 Sznitman A S. Topics in random walks in random environment. *ICTP Lect Notes*, 2004, 17: 203–266
- 11 Sznitman A S, Zerner M A. Law of large number for random walk in random environment. *Ann Probab*, 1999, 27: 1851–1867
- 12 Bremont J. On some random walks on $\mathbb{Z}$ in random medium. *Ann Probab*, 2002, 30: 1266–1312
- 13 Bougerol P, Lacroix J. *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*. Boston: Birkhäuser, 1985

Range of a random walk in random environment

WANG HuaMing

Abstract Consider a random walk in random environment $\{X_n\}_{n \geq 0}$. In each step, the walk jumps at most a distance 2 to the right or a distance 1 to the left. For the walk transient to the right, let $N(x) = \#\{i \in [0, x] :$

$\exists n \geq 0, X_n = i\}$ be the number of sites in $[0, x]$ ever being visited by the walk. It is proved that almost surely $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = \theta$ for some $0 < \theta < 1$. The result shows that the range of the walk covers only a linear proportion of the lattice of the positive half line. For the nearest neighbor random walk in random or non-random environment, this phenomenon could not appear in any circumstance.

Keywords random walk, random environment, range, renewal structure

MSC(2010) 60K37, 60K05

doi: 10.1360/SCM-2016-0566