空间半参数变系数部分线性回归中的分位数估计

唐庆国

南京理工大学经济管理学院, 南京 210094
E-mail: tangqguo@163.com

收稿日期: 2012-07-11; 接受日期: 2013-02-22
国家自然科学基金 (批准号: 11071120) 资助项目

摘要 本文研究了空间数据变系数部分线性回归中的分位数估计. 模型中的参数估计量通过未知系数函数的分段多项式逼近得到, 而未知系数函数的估计量通过将参数估计量代入模型中并通过局部线性逼近得到. 文中推导了未知参数向量估计量的渐近分布, 并建立了未知系数函数估计量在内点及边界点的渐近分布. 通过 Monte Carlo 模拟研究了估计量的有限样本性质.

关键词 空间数据 变系数部分线性模型 分位数 渐近分布

MSC (2010) 主题分类 62G05, 62G08

1 引言

最近 20 年来, 空间统计已越来越受到人们的重视. 与地球表面位置相关的空间数据频繁出现在包括经济学、传染病学、环境科学、影像分析和海洋学等众多研究领域. 通常我们收集到的数据呈不规则分布, 但随着计算机技术的快速发展和广泛应用, 在密集的规则格点上测量和收集数据变得越来越普遍. 许多学者研究过空间模型的参数估计方法, 如文献 [1, 2]. 然而, 人们常常会碰到特定的参数模型不能较好地拟合数据的情形. 这样一来, 非参数方法作为参数方法的替代日益受到人们的重视, 相关空间数据密度函数估计法和回归模型估计法详见文献 [3–10].

假定有在格点上的空间数据 $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$, 这里 Y_{ij} 和 U_{ij} 取值于 R , X_{ij} 取值于 R^{d_1} , Z_{ij} 取值于 R^{d_2} , 它们定义于某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上. 应用中经常会碰到空间回归问题, 相依变量 Y_{ij} 与自变量 U_{ij} , X_{ij} 与 Z_{ij} 之间存在着复杂的空间相依关系. 对这类问题通常的做法是假定 Y_{ij} 的条件期望存在, 以便定义条件期望函数 $\eta(x, z, u) = E(Y_{ij} | X_{ij} = x, Z_{ij} = z, U_{ij} = u)$ 并对其做相关的统计推断. 正如许多文献中所提到的, 当 $d_1 + d_2 + 1 > 3$ 时, 由于“维数祸根”, 空间回归函数不能较好地估计. 本文考虑空间分位数回归函数, 并且试图用如下形式的变系数部分线性函数

$$\Psi(X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) = X_{ij}^T \alpha_\tau(U_{ij}) + Z_{ij}^T \beta_\tau \quad (1.1)$$

来逼近空间分位数回归函数, 即在以上变系数部分线性函数集 $\{\Psi(X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})\}$ 中选择一函数使 $E\rho_\tau(Y_{ij} - \Psi(X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}))$ 达到最小, 此处, $\rho_\tau(t) = t(\tau - I_{(t < 0)})$, $0 < \tau < 1$ 为 τ 分位数损失函数, $\beta_\tau = (\beta_{\tau 1}, \dots, \beta_{\tau d_2})^T$ 是一个 d_2 维未知参数向量, 而 $\alpha_\tau(u) = (\alpha_{\tau 1}(u), \dots, \alpha_{\tau d_1}(u))^T$ 是 d_1 维未知系数函数向量.

迄今为止, 已有不少人研究过变系数部分线性模型并已开发出不少新的理论成果, 如文献 [11–14], 文献 [13] 研究了纵向数据变系数部分线性模型的分位数估计. 同均值回归相比, 分位数回归具有以下几方面的优势: 第一, 给定一系列分位数并对其中的每一个做分位数回归能让我们对数据比单纯做均值回归有更多的认识和理解; 第二, 分位数拟合可用于构建预测区间; 第三, 中位数回归作为分位数回归的一种特例能提供比均值回归更稳健的估计. 自从文献 [15] 所取得的突破性进展, 分位数回归方法已引起人们的广泛关注并已广泛应用于统计的各个领域, 相关研究详见文献 [16]. 本文首先用逐段多项式逼近模型中的未知系数函数 $\alpha_{\tau r}(u)$, $r = 1, \dots, d_1$ 并通过极小化算法得到 β_τ 的分位数估计量. 这些逐段多项式不能作为系数函数的估计量, 因为它们只是逐段光滑的. 为了估计 $\alpha_{\tau r}(u)$, 模型中我们用 β_τ 的估计量代替 β_τ , 用局部多项式逼近 $\alpha_{\tau r}(u)$, 并通过极小化算法得到 $\alpha_{\tau r}(u)$ 的分位数估计量. 在一般性条件下, 我们推导了未知参数向量 β_τ 的渐近分布, 并建立了未知系数函数 $\alpha_{\tau r}(u)$ 在内点和边界点的渐近分布.

本文的结构如下: 第 2 节提出估计方法; 第 3 节给出估计量的渐近性质; 第 4 节通过 Monte Carlo 模拟研究估计量的有限样本性质; 所有的证明放在第 5 节.

2 估计方法

假定有观测数据 $(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, 总的样本容量为 $N = m \times n$. 不失一般性, 假定 $0 \leq u \leq 1$.

首先估计 β_τ . 我们先构造阶为 s 的逐段多项式. 给定正整数 M_N , 我们将区间 $[0, 1]$ 等分成 M_N 个子区间, 每个子区间的长度为 $2h_0 = 1/M_N$. 令 $I_\nu = [(\nu - 1)/M_N, \nu/M_N]$, $1 \leq \nu \leq M_N - 1$, $I_{M_N} = [1 - 1/M_N, 1]$. 令 t_ν 为区间 I_ν 的中心, 而 χ_ν 表区间 I_ν 的示性函数, 即当 $u \in I_\nu$ 时, $\chi_\nu(u) = 1$, 而 $u \notin I_\nu$ 时, $\chi_\nu(u) = 0$. 令

$$H_\nu(u) = \left(1, \frac{(u - t_\nu)}{h_0}, \dots, \left[\frac{(u - t_\nu)}{h_0}\right]^s\right)^T, \quad \nu = 1, \dots, M_N,$$

$$H(u) = (\chi_1(u)H_1(u)^T, \dots, \chi_{M_N}(u)H_{M_N}(u)^T)^T.$$

令 $b_{r\nu} = (b_{r\nu 0}, \dots, b_{r\nu s})^T$, $b_r = (b_{r1}, \dots, b_{rM_N})^T$. 我们用 $\omega_r(u) = H(u)^T b_r$ 逼近 $\alpha_{\tau r}(u)$, $r = 1, \dots, d_1$. 我们注意到 $\omega_r(u)$ 为阶为 s 的逐段多项式. 令 $B_{ij} = X_{ij} \otimes H(U_{ij})$, $b = (b_1^T, \dots, b_{d_1}^T)^T$. 基于空间观测数据 $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$, 我们解下面的关于 β, b 的极小化问题:

$$\min_{\beta, b} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_\tau(Y_{ij} - B_{ij}^T b - Z_{ij}^T \beta), \quad (2.1)$$

此处, $\rho_\tau(t) = t(\tau - I_{(t < 0)})$, $0 < \tau < 1$ 为 τ 分位数损失函数. 令 $\hat{\beta}_\tau$ 和 $\hat{b}_\tau$ 为 (2.1) 的极小值点, 那么, β_τ 的 τ 分位数估计量为 $\hat{\beta}_\tau$.

得到 β_τ 的估计量后, 对给定点 $u_0 \in [0, 1]$, 在 u_0 邻域内, 我们用局部线性函数 $a_{r0} + a_{r1}(u - u_0)$ 逼近未知的系数函数 $\alpha_{\tau r}(u)$ ($r = 1, \dots, d_1$). 基于空间观测数据 $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$, 我们解下面的极小化问题:

$$\min_{a_{r0}, a_{r1}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_\tau \left(Y_{ij} - Z_{ij}^T \hat{\beta}_\tau - \sum_{r=1}^{d_1} [a_{r0} + a_{r1}(U_{ij} - u_0)] X_{ijr} \right) K \left(\frac{U_{ij} - u_0}{h} \right), \quad (2.2)$$

此处, $K(\cdot)$ 是给定的核函数, $h = h_N$ 为选定的窗宽. 令 $\hat{a}_{\tau 0}$ 和 $\hat{a}_{\tau 1}$ 为 (2.2) 的极小值点, 那么, $\alpha_\tau(u_0) = (\alpha_{\tau 1}(u_0), \dots, \alpha_{\tau d_1}(u_0))^T$ 的 τ 分位数估计量为

$$\hat{\alpha}_\tau(u_0) = (\hat{\alpha}_{\tau 1}(u_0), \dots, \hat{\alpha}_{\tau d_1}(u_0))^T = \hat{a}_0 = (\hat{a}_{10}, \dots, \hat{a}_{d_1 0})^T. \quad (2.3)$$

3 估计量的渐近结果

本节将给出分位数估计量 $\hat{\beta}_\tau$ 和 $\hat{\alpha}_\tau(u_0)$ 的渐近性质. 为了推导渐近性质, 我们先给出空间混合相依性概念. 令 $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})\}, (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ 为严平稳的随机场, 此处, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 点 $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ 称为地址. 令 S 和 S' 为两个地址集, Borel 域 $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}((Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) : (i, j) \in S)$ 和 $\mathcal{B}(S') = \mathcal{B}((Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) : (i, j) \in S')$ 为两个地址 (i, j) 分别属于 S 和 S' 的随机向量 $(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})$ 所生成的 σ 域. 令 $d(S, S')$ 为 S 与 S' 之间的 Euclid 距离, 假定 $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})\}$ 满足以下由文献 [3] 定义的混合条件: 存在函数 $\phi(t)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\phi(t) \downarrow 0$, 并且当 $S, S' \subset \mathbb{Z}^2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{B}(S), \mathcal{B}(S')) &= \sup\{|P(AB) - P(A)P(B)|, A \in \mathcal{B}(S), B \in \mathcal{B}(S')\} \\ &\leq \varphi(\text{Card}(S), \text{Card}(S'))\phi(d(S, S')), \end{aligned} \quad (3.1)$$

此处, $\text{Card}(S)$ 表集合 S 中的元素个数, φ 为关于每一个分量非减的对称正函数. 如果存在某个常数 C 使得 $\varphi(\infty, \infty) \leq C$, $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})\}$ 称为 α 混合 (或强混合). 在混合性条件中, α 混合相依性是为建立估计量的渐近性质所需的较弱的条件.

令 $\mathcal{Y}$ 为所有如下函数组成的函数集合: $\eta(x, u) \in \mathcal{Y}$ 当且仅当 $\eta(x, u) = x^T \eta(u) = \sum_{r=1}^{d_1} x_r \eta_r(u)$ 且 $\|\eta\|$ 有界并且对 $r = 1, \dots, d_1$, 有 $\eta_r(u) \in C^{s+1}[0, 1]$. 为了建立 $\hat{\beta}_\tau$ 的渐近分布, 我们需要调整 Z_{ij} 与 (X_{ij}, U_{ij}) 之间的相依关系, 这也是半参数模型中所共同面临的问题. 记

$$\eta_k(X_{ij}, U_{ij}) = \sum_{r=1}^{d_1} X_{ijr} \eta_{kr}(U_{ij}),$$

令 $\eta_k^*(X_{ij}, U_{ij}) = \sum_{r=1}^{d_1} X_{ijr} \eta_{kr}^*(U_{ij}) = \arg\inf_{\eta_k \in \mathcal{Y}} E\{g_\tau(0 | X_{ij}, U_{ij})[Z_{ijk} - \eta_k(X_{ij}, U_{ij})]^2\}$, 并令

$$\zeta_k(X_{ij}, U_{ij}) = E(Z_{ijk} | X_{ij}, U_{ij}).$$

由于

$$\begin{aligned} &E\{g_\tau(0 | X_{ij}, U_{ij})[Z_{ijk} - \eta_k(X_{ij}, U_{ij})]^2\} \\ &= E\{g_\tau(0 | X_{ij}, U_{ij})[Z_{ijk} - \zeta_k(X_{ij}, U_{ij})]^2\} + E\{g_\tau(0 | X_{ij}, U_{ij})[\zeta_k(X_{ij}, U_{ij}) - \eta_k(X_{ij}, U_{ij})]^2\}, \end{aligned}$$

从而, $\eta_k^*(X_{ij}, U_{ij})$ 是 $\zeta_k(X_{ij}, U_{ij})$ 到变系数函数空间 $\mathcal{Y}$ (在 L_2 范数意义下) 上的投影, 即 $\eta_k^*(X_{ij}, U_{ij})$ 是所有 $\mathcal{Y}$ 中离 $\zeta_k(X_{ij}, U_{ij})$ 最近的一个函数. 记 $\eta^*(X_{ij}, U_{ij}) = (\eta_1^*(X_{ij}, U_{ij}), \dots, \eta_{d_2}^*(X_{ij}, U_{ij}))^T$, $\zeta(X_{ij}, U_{ij}) = (\zeta_1(X_{ij}, U_{ij}), \dots, \zeta_{d_2}(X_{ij}, U_{ij}))^T$.

令 $\psi_\tau(t) = \rho'_\tau(t)$ 为 ρ_τ 的导数, 下面列出推导估计量的渐近性质所需的条件.

(1) 随机场 $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) : (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ 是严平稳的, $\varphi(n_1, n_2) \leq \min(n_1, n_2)$ 且存在常数 $\varrho > 0$ 使得 $\varphi(t) = O(e^{-\varrho t})$. 对于 $\mathbb{Z}^2$ 中的 (i, j) 和 (i', j') , 随机变量 U_{ij} 和 $U_{i'j'}$ 有联合密度 $f_{ij, i'j'}$, 且对所有的 $(i, j), (i', j') \in \mathbb{Z}^2$ 和所有的 $u, v \in [0, 1]$, 有 $|f_{ij, i'j'}(u, v) - f(u)f(v)| \leq C_0$, 此处, C_0 为正常数, f 为关于 U_{ij} 的边缘密度, 且 f 在 $[0, 1]$ 上连续且大于零.

(2) 对 $r = 1, \dots, d_1$, $\alpha_{\tau r}(u) \in C^{s+1}[0, 1]$, 这里 $C^{s+1}[0, 1]$ 表所有 $(s+1)$ 次连续可微函数组成的函数空间.

(3) 存在某个正常数 C_1 使得 $\max_{i,j} \|Z_{ij}\| \leq C_1$, $\max_{i,j} \|X_{ij}\| \leq C_1$. $\Phi(u) = E(X_{ij} X_{ij}^T | U_{ij} = u)$ 的特征值 $\lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_{d_1}(u)$ 在 $[0, 1]$ 上一致有界且大于零, 即存在正常数 λ_0 和 λ^* , 对一切 $u \in [0, 1]$, 有 $\lambda_0 \leq \lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_{d_1}(u) \leq \lambda^*$.

(4) $P\{\varepsilon_{\tau ij} \leq 0 | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}\} = \tau$, 此处, $\varepsilon_{\tau ij} = Y_{ij} - X_{ij}^T \alpha_{\tau}(U_{ij}) - Z_{ij}^T \beta_{\tau}$. 存在正常数 δ 和 C_2 , 使得 $E(|\psi_{\tau}(\varepsilon_{\tau ij})|^{2+\delta} | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) \leq C_2$.

(5) $\varepsilon_{\tau ij}$ 与 $Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})$ 独立. 存在正常数 c_0 和 C_3 , 使得给定 X_{ij}, Z_{ij} 和 U_{ij} 条件下, $\varepsilon_{\tau ij}$ 的条件分布 $g_{\tau}(y | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) = g_{\tau}(y | X_{ij}, U_{ij})$ 满足对所有 $y \in [-c_0, c_0]$, 有 $|g_{\tau}(y | X_{ij}, U_{ij}) - g_{\tau}(0 | X_{ij}, U_{ij})| \leq C_3|y|$.

(6) $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$ 且 M_N 满足 $NM_N^{-(2(s+1)+1)} \rightarrow 0$, $(M_N \log N)^3/m \rightarrow 0$, $(M_N \log N)^3/n \rightarrow 0$.

(7) 窗宽 h 满足存在某个正常数 C_4 使得 $h \leq C_4 N^{-1/5}$, $h^{-1/2}(\log N)^3/m \rightarrow 0$, $h^{-1/2}(\log N)^3/n \rightarrow 0$.

(8) 存在两个正整数值向量序列 $\mathbf{p}_{m,n} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ 和 $\mathbf{q}_{m,n} = (q, q) \in \mathbb{Z}^2$ 满足 $q \rightarrow \infty$, $q/p_1 \rightarrow 0$, $q/p_2 \rightarrow 0$, $m/p_1 \rightarrow \infty$, $n/p_2 \rightarrow \infty$, 并且 $p_N = p_1 p_2 = o((NM_N^{-1})^{1/2})$, $N\phi(q) \rightarrow 0$, 此处, $\phi(\cdot)$ 为 (3.1) 中所定义的函数.

(9) 核函数 $K(\cdot) \geq 0$ 为具有紧支撑 $[-M, M]$ 的有界对称函数.

假设 (1) 在空间数据中的使用是很普遍的, 如假设 (1) 在文献 [3, 6] 出现过. 假设 (3) 中有关 X_{ij} 和 Z_{ij} 的有界性条件可以放宽为 $\max_{i,j} \|X_{ij}\| = O_p(1)$ 和 $\max_{i,j} \|Z_{ij}\| = O_p(1)$, 类似的条件出现在文献 [13] 中. 假设 (8) 用于推导估计量的渐近正态性.

令 $\Lambda_{\tau} = E\{g_{\tau}(0 | X_{ij}, U_{ij})[Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})][Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})]^T\}$, 并令

$$\Delta_{\tau} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} E\{[Z_{00} - \eta^*(X_{00}, U_{00})]\psi_{\tau}(\varepsilon_{\tau 00})[Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})]^T \psi_{\tau}(\varepsilon_{\tau ij})\}.$$

下面的定理 1 给出了估计量 $\hat{\beta}_{\tau}$ 的渐近分布.

定理 1 假定假设 (1)–(6) 和 (8) 成立, 并且 Λ_{τ} 和 Δ_{τ} 有限且可逆. 那么, 当 $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$, 有

$$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{\tau} - \beta_{\tau}) \rightarrow_d N(0, \Lambda_{\tau}^{-1} \Delta_{\tau} \Lambda_{\tau}^{-1}). \quad (3.2)$$

这里 $\rightarrow_d$ 为依分布收敛.

注 1 如果 $\{(Y_{ij}, X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) : (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ 独立同分布, 则有

$$\Delta_{\tau} = E\{[Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})][Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})]^T \psi_{\tau}^2(\varepsilon_{\tau ij})\}.$$

注 2 值得指出的是, 由于 B-样条函数也是逐段多项式函数, 因此, 如果 $\alpha_{\tau r}(u)$, $r = 1, \dots, d_1$, 由 B-样条函数逼近, 定理 1 的结论仍然成立.

令 $\mu_k = \int u^k K(u) du$, $\nu_k = \int u^k K^2(u) du$, $k = 0, 1, \dots$, 并令

$$\Omega_{\tau}(u) = E(g_{\tau}(0 | X_{ij}, U_{ij}) X_{ij} X_{ij}^T | U_{ij} = u).$$

下面的定理 2 给出 $\alpha_{\tau}(u_0)$ 的估计量在内点的渐近分布.

定理 2 假定假设 (1)–(9) 成立, 并且 $\Omega_{\tau}(u)$ 在 u_0 的某个邻域内连续且 $\Omega_{\tau}(u_0)$ 是正定矩阵. 如果 u_0 是区间 $[0, 1]$ 的内点, 则当 $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sqrt{Nh} \left(\hat{\alpha}_{\tau}(u_0) - \alpha_{\tau}(u_0) - \frac{\mu_2 h^2}{2\mu_0} \alpha_{\tau}''(u_0) \right) \rightarrow_d N \left(0, \frac{\tau(1-\tau)\nu_0}{f(u_0)\mu_0^2} \Omega_{\tau}^{-1}(u_0) \Phi(u_0) \Omega_{\tau}^{-1}(u_0) \right), \quad (3.3)$$

此处, $\alpha''_{\tau}(u_0) = (\alpha''_{\tau_1}(u_0), \dots, \alpha''_{\tau_{d_1}}(u_0))^T$.

下面将研究估计量在区间 $[0, 1]$ 的边界点的渐近性质. 不失一般性, 假定 u_0 在边界点 0 附近, 取 $u_h = eh$, 此处, $0 \leq e < M$, 当 h 很小时, u_h 在区间 $[0, 1]$ 的左边界点附近, 令 $\mu_{ke} = \int_{-e}^M u^k K(u) du$, $\nu_{ke} = \int_{-e}^M u^k K^2(u) du$, $k = 0, 1, \dots$, 在此情形下, 我们有下面的定理 3.

定理 3 假定假设 (1)–(9) 成立, 并且 $\Omega_{\tau}(u)$ 在 0 的某个邻域内连续且 $\Omega_{\tau}(0)$ 是正定矩阵, 则当 $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt{Nh} \left(\hat{\alpha}_{\tau}(u_h) - \alpha_{\tau}(u_h) - \frac{\mu^* h^2}{2\tilde{\mu}} \alpha''_{\tau}(0) \right) \rightarrow_d N \left(0, \frac{\tau(1-\tau)\nu^*}{f(0)\tilde{\mu}^2} \Omega_{\tau}^{-1}(0) \Phi(0) \Omega_{\tau}^{-1}(0) \right),$$

成立, 此处, $\tilde{\mu} = \mu_{0e}\mu_{2e} - \mu_{1e}^2$, $\mu^* = \mu_{2e}^2 - \mu_{1e}\mu_{3e}$, $\nu^* = \mu_{2e}^2\nu_{0e} - 2\mu_{1e}\mu_{2e}\nu_{1e} + \mu_{1e}^2\nu_{2e}$.

定理 1–3 的证明放在第 5 节.

定理 3 表明, 边界点附近处局部线性估计量的收敛速度与内点处有相同的收敛速度, 因此, 边界点附近处局部线性估计量不需要边界纠偏.

注 3 如果 (3.1) 中的函数 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 满足存在常数 $C_5 > 0$ 和 $\iota > 1$, 使得 $\varphi(n_1, n_2) \leq C_5(n_1 + n_2 + 1)^{\iota}$, 在假设 (8) 中, 条件 $N\phi(q) \rightarrow 0$ 由条件 $(N^{\iota+1}/p_N)\phi(q) \rightarrow 0$ 取代, 那么, 当 $\min(m, n) \rightarrow \infty$ 时, 定理 1–3 的结论仍然成立.

4 模拟

本节将通过模拟来检验第 2 节中提出的估计法的性能. 令 $\{\varepsilon_{ij}^{(k)} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$, $k = 1, \dots, 4$ 为 4 个相互独立的独立同分布 $t(5)$ 随机过程, 这里 $t(5)$ 表自由度为 5 的 t 分布. $\{\varepsilon_{ij}^{(5)} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ 为独立同分布的分布为 $N(0, 0.5)$ 的白噪声过程, 而 $\{\varepsilon_{ij} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ 为独立同分布的具有共同混合分布 $0.9N(0, 0.5^2) + 0.1N(0, 8^2)$ 的白噪声过程. 令

$$Y_{ij} = X_{ij1}\alpha_1(U_{ij}) + X_{ij2}\alpha_2(U_{ij}) + Z_{ij1}\beta_1 + Z_{ij2}\beta_2 + \varepsilon_{\tau ij}, \quad (4.1)$$

其中 $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\alpha_1(u) = 0.8e^{u/2} + 0.5e^{-u/2}$, $\alpha_2(u) = 2.5\sin(1.2u - 0.4)$,

$$\begin{aligned} X_{ij1} &= (U_{(i-1)j} + U_{(i+1)j})/2 + \varepsilon_{ij}^{(1)}, & X_{ij2} &= (U_{i(j-1)} + U_{i(j+1)})/2 + \varepsilon_{ij}^{(2)}, \\ Z_{ij1} &= (U_{(i+1)j} - U_{(i-1)j})/2 + \varepsilon_{ij}^{(3)}, & Z_{ij2} &= (U_{i(j+1)} - U_{i(j-1)})/2 + \varepsilon_{ij}^{(4)}, \end{aligned}$$

$\{U_{ij} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ 由空间自回归过程 $U_{ij} = \sin(U_{(i-1)j} + U_{i(j-1)} + U_{(i+1)j} + U_{i(j+1)}) + \varepsilon_{ij}^{(5)}$ 产生. 误差 $\varepsilon_{\tau ij} = \varepsilon_{ij} - F^{-1}(\tau)$, 这里 F 表 ε_{ij} 的分布函数. 在这里, 将 ε_{ij} 减去 $F^{-1}(\tau)$ 以便使 $\varepsilon_{\tau ij}$ 的 τ 分位数为 0.

来自以上模型的模拟数据在一个有 $m \times n$ 个地址的长方形区域内产生, 具体地说, 在格点区域 $\{(i, j) : 76 \leq i \leq 75+m, 76 \leq j \leq 75+n\}$ 中产生. 本文取 $m = 10$, $n = 20$. 每个样本按文献 [6] 中提供的方法迭代产生, 300 个空间样本数据独立地被产生. 对每个样本数据, 我们计算了 β_k , $k = 1, 2$ 和 $\alpha_r(u)$, $r = 1, 2$ 的分位数估计量, 计算 β_k , $k = 1, 2$ 的分位数估计量时, 我们使用逐段二次多项式逼近, M_N 由下面定义的 BIC (Bayesian information criterion) 准则来选取, 令

$$\text{BIC}(M_N) = \log \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_{\tau}(Y_{ij} - X_{ij1}\hat{\alpha}_1(U_{ij}) - X_{ij2}\hat{\alpha}_2(U_{ij}) - Z_{ij1}\hat{\beta}_1 - Z_{ij2}\hat{\beta}_2) \right\} + \frac{\log N}{N}(M_N + 1).$$

BIC 越大显示估计越差, M_N 被选择为 $\text{BIC}(M_N)$ 的极小值点. 计算 $\alpha_r(u)$, $r = 1, 2$ 的估计量时, 我们使用 Epanechnikov 核函数, 窗宽 h 由去一“交叉核实”方法选取. 作为比较, 我们还计算了它们的最小平方估计量 (LS).

三种准则, 分别是估计量 $\hat{\beta}_k$, $k = 1, 2$ 的绝对偏差 (AB)、标准差 (SD) 和下面定义的估计量 $\hat{\alpha}_r(u)$, $r = 1, 2$ 的加权均方误差 WASE_r 来评价估计量的性能,

$$\text{WASE}_r = \frac{1}{mn + 1 - 2[0.025mn]} \sum_{i=[0.025mn]}^{mn-[0.025mn]} \frac{[\hat{\alpha}_r(u_{(i)}) - \alpha_r(u_{(i)})]^2}{[\text{range}(\alpha_r)]^2},$$

此处, $u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq \cdots \leq u_{(mn)}$ 是 $\{u_{ij} : 76 \leq i \leq 75 + m, 76 \leq j \leq 75 + n\}$ 的一个排列, 而 $\text{range}(\alpha_r)$ 表函数 $\alpha_r(u)$ 的值的范围. 由于边界处的数据稀少, 边界附近点的估计较差, 因此, 我们并未将这些点放入 WASE_r 中. 表 1 列出了 300 次模拟得到的结果, 从表 1 中可以看到, 在各个分位数点得到的估计表现得都较好, 而中位数得到的估计是所有中最好的. 表 1 还显示, 中位数估计比最小平方估计要稳健, 由于 (4.1) 中的误差 ε_{ij} 为混合分布, 其中 $N(0, 8^2)$ 可看作外来分布, 大约 10% 的外来数据影响了最小平方估计的精度, 但对中位数估计的影响却不大.

表 2 报告了 M_N 取不同值时的模拟结果, 而表 3 报告了逐段多项式取不同阶时的模拟结果. 从表 2 和 3 看到, β_1 和 β_2 的估计量对 M_N 的变化以及阶的变化并不是很敏感. 这些表明, 上面的 BIC 准则通常能给出令人满意的结果. 此外, 我们还做了取不同核函数诸如 Gauss 核函数和均匀核函数时的模拟, 模拟结果显示取不同核函数对估计量的影响并不大, 为减少篇幅, 这方面的结果在此并没有给出.

表 1 300 次模拟得到的有关 AB, SD 和 WASE_r 的模拟结果

		$\tau = 0.10$	$\tau = 0.25$	$\tau = 0.50$	$\tau = 0.75$	$\tau = 0.90$	LS
$\hat{\beta}_1$	AB	0.0408	0.0363	0.0304	0.0544	0.0899	0.1004
	SD	0.0525	0.0452	0.0394	0.0687	0.1082	0.1295
$\hat{\beta}_2$	AB	0.0379	0.0375	0.0304	0.0550	0.0866	0.0973
	SD	0.0489	0.0474	0.0392	0.0695	0.1085	0.1233
$\hat{\alpha}_1(u)$	WASE_1	0.0180	0.0102	0.0020	0.0034	0.0037	0.0477
$\hat{\alpha}_2(u)$	WASE_2	0.0160	0.0095	0.0015	0.0028	0.0032	0.0389

表 2 估计量 $\hat{\beta}_k$, $k = 1, 2$ 的 AB (SD) 随子区间个数 M_N 变化情况分析

	M_N	2	4	6	8
$\hat{\beta}_1$	$\tau = 0.10$	0.0492 (0.0638)	0.0485 (0.0602)	0.0403 (0.0503)	0.0420 (0.0527)
	$\tau = 0.25$	0.0448 (0.0575)	0.0417 (0.0528)	0.0342 (0.0439)	0.0327 (0.0418)
	$\tau = 0.50$	0.0353 (0.0444)	0.0298 (0.0388)	0.0310 (0.0393)	0.0306 (0.0377)
	$\tau = 0.75$	0.0628 (0.0795)	0.0567 (0.0707)	0.0584 (0.0733)	0.0555 (0.0705)
	$\tau = 0.90$	0.0914 (0.1127)	0.0862 (0.1067)	0.0925 (0.1157)	0.0855 (0.1070)
$\hat{\beta}_2$	$\tau = 0.10$	0.0480 (0.0609)	0.0454 (0.0579)	0.0422 (0.0538)	0.0425 (0.0407)
	$\tau = 0.25$	0.0440 (0.0551)	0.0369 (0.0469)	0.0344 (0.0444)	0.0373 (0.0451)
	$\tau = 0.50$	0.0376 (0.0483)	0.0306 (0.0381)	0.0300 (0.0382)	0.0319 (0.0407)
	$\tau = 0.75$	0.0617 (0.0799)	0.0575 (0.0726)	0.0536 (0.0688)	0.0514 (0.0659)
	$\tau = 0.90$	0.0904 (0.1134)	0.0861 (0.1056)	0.0825 (0.1042)	0.0754 (0.0950)

表 3 估计量 $\hat{\beta}_k, k = 1, 2, 3$ 的 AB (SD) 随逐段多项式阶的变化情况

	阶	1	2	3
$\hat{\beta}_1$	$\tau = 0.10$	0.0477 (0.0551)	0.0408 (0.0525)	0.0411 (0.0508)
	$\tau = 0.25$	0.0326 (0.0420)	0.0363 (0.0452)	0.0307 (0.0382)
	$\tau = 0.50$	0.0288 (0.0370)	0.0304 (0.0394)	0.0296 (0.0369)
	$\tau = 0.75$	0.0507 (0.0691)	0.0544 (0.0687)	0.0514 (0.0680)
	$\tau = 0.90$	0.0899 (0.0965)	0.0802 (0.0974)	0.0881 (0.0970)
$\hat{\beta}_2$	$\tau = 0.10$	0.0380 (0.0486)	0.0379 (0.0489)	0.0405 (0.0518)
	$\tau = 0.25$	0.0301 (0.0379)	0.0375 (0.0474)	0.0342 (0.0426)
	$\tau = 0.50$	0.0286 (0.0364)	0.0304 (0.0392)	0.0305 (0.0380)
	$\tau = 0.75$	0.0318 (0.0395)	0.0550 (0.0695)	0.0516 (0.0692)
	$\tau = 0.90$	0.0904 (0.0969)	0.0866 (0.0956)	0.0891 (0.0904)

5 定理的证明

本节中, 令 C 表某个并不依赖于 m 和 n 但在不同地方可取不同值的正常数. 令

$$b_{0r} = \left(\alpha_{\tau r}(t_1), \dots, \frac{h_0^s \alpha_{\tau r}^{(s)}(t_1)}{s!}, \dots, \alpha_{\tau r}(t_{M_N}), \dots, \frac{h_0^s \alpha_{\tau r}^{(s)}(t_{M_N})}{s!} \right)^T,$$

$$\tilde{G}_{kr} = \left(\eta_{kr}^*(t_1), \dots, \frac{h_0^s \eta_{kr}^{*(s)}(t_1)}{s!}, \dots, \eta_{kr}^*(t_{M_N}), \dots, \frac{h_0^s \eta_{kr}^{*(s)}(t_{M_N})}{s!} \right)^T$$

以及 $b_0 = (b_{01}^T, \dots, b_{0d_1}^T)^T$, $\tilde{G}_k = (\tilde{G}_{k1}^T, \dots, \tilde{G}_{kd_1}^T)^T$, $\tilde{G} = (\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_{d_2})$. 记 $\tilde{\eta}(X_{ij}, U_{ij})^T = B_{ij}^T \tilde{G}$, $\tilde{Z}_{ij} = N^{-1/2}[Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})]$, $\theta_1 = N^{1/2}(\beta - \beta_\tau)$, $\tilde{B}_{ij} = (Nh_0)^{-1/2}B_{ij}$, $\theta_2 = (Nh_0)^{1/2}[(b - b_0) + \tilde{G}(\beta - \beta_\tau)]$, $\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T$, $V_{ij} = (\tilde{Z}_{ij}^T, \tilde{B}_{ij}^T)^T$, $e_{ij} = X_{ij}^T \alpha_\tau(U_{ij}) - B_{ij}^T b_0 + [\eta^*(X_{ij}, U_{ij}) - \tilde{\eta}(X_{ij}, U_{ij})]^T(\beta - \beta_\tau)$. 我们转而考虑下面的最优化问题:

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) - \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij})].$$

显然, $\hat{\theta}_1 = N^{1/2}(\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau)$. 令 $S_N(\theta)$ 表上面的目标函数, 并令

$$\Gamma_N(\theta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E([\rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) - \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij})] | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}),$$

$$R_N(\theta) = S_N(\theta) - \Gamma_N(\theta) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij}^T \theta \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}),$$

则有

$$S_N(\theta) = \Gamma_N(\theta) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij}^T \theta \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) + R_N(\theta). \quad (5.1)$$

在证明定理前, 先给出几个引理.

引理 4 令 $(R_{ij} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2)$ 为零均值实值随机域, 满足 $\sup_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |R_{ij}| \leq V_0 < \infty$, 此处, V_0 为某个正常数. 那么, 对任意满足 $\tilde{q}_1 \in [1, m/2]$, $\tilde{q}_2 \in [1, n/2]$ 的整数对 $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{ij}\right| > N\varepsilon\right) \leq 4\left\{2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 q^*}{8v^2(\tilde{q})}\right) + \frac{4V_0}{\varepsilon} \varphi(\min(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2))\right\},$$

这里 $q^* = \tilde{q}_1 \tilde{q}_2$, $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, $\tilde{p}_1 = m/(2\tilde{q}_1)$, $\tilde{p}_2 = n/(2\tilde{q}_2)$, $v^2(\tilde{q}) = 8\sigma^2(\tilde{q})/p^{*2} + V_0\varepsilon$, 其中 $p^* = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$, $\sigma^2(\tilde{q}) = \min_{i,j} E(\sum_{(i,j) \in A_{ij}} R_{ij})^2$, $A_{ij} = \prod_{k=1}^2 [(i_k + 2j_k)\tilde{p}_k, (i_k + 2j_k + 1)\tilde{p}_k]$. $\sigma^2(\tilde{q})$ 定义中的极小化指的是在所有二元指标对 $i = (i_1, i_2)$ 和 $j = (j_1, j_2)$ 中取极小值, 其中 $i_k = 0, 1, j_k = 0, 1, \dots, \tilde{q}_k - 1$.

证明 引理 4 的证明参见文献 [9]. $\square$

引理 5 在定理 1 的假设下, 对充分大的 L , $\sup_{\|\theta\| \leq L} |M_N^{-1} R_N(M_N^{1/2} \theta)| = o_p(1)$ 成立.

证明 令 $T_{ij}(\theta) = \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) - \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}) + V_{ij}^T \theta \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})$, $R_{ij}(\theta) = T_{ij}(\theta) - E(T_{ij}(\theta) | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})$, 则有 $R_N(\theta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{ij}(\theta)$. 依据凸函数 $\rho_\tau(\cdot)$ 的性质, 有

$$\begin{aligned} & |\rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) - \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}) + V_{ij}^T \theta \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij})| \\ & \leq |V_{ij}^T \theta| \cdot |\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij})|. \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} |T_{ij}(\theta)| & \leq |V_{ij}^T \theta| (|\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij})| + |\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})|) \\ & \leq |V_{ij}^T \theta| (|\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})| + 2|\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})|). \end{aligned}$$

进而, 对满足 $\|\theta\| \leq L$ 的 θ ,

$$\max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |R_{ij}(M_N^{1/2} \theta)| = CM_N^{1/2} \max_{i,j} (|\tilde{Z}_{ij}^T \theta_1| + |\tilde{B}_{ij}^T \theta_2|) \leq \frac{CLM_N}{N^{1/2}} \quad (5.2)$$

成立. 由假设 (1), 有

$$\sigma^2(\tilde{q}) = \sum_{(i,j) \in A_{00}} ER_{ij}^2(M_N^{1/2} \theta) + \sum_{(i,j) \in A_{00}} \sum_{(i',j') \neq (i,j) \in A_{00}} ER_{ij}(M_N^{1/2} \theta) R_{i',j'}(M_N^{1/2} \theta), \quad (5.3)$$

这里 $A_{00} = (0, \tilde{p}_1] \times (0, \tilde{p}_2]$. 利用假设 (1) 和 (5), 可得

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A_{00}} ER_{ij}^2(M_N^{1/2} \theta) & \leq \sum_{(i,j) \in A_{00}} CM_N E((V_{ij}^T \theta)^2 \{E([\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - M_N^{1/2} V_{ij}^T \theta) \\ & \quad - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})]^2 | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) + E([\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})]^2 | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})\}) \\ & \leq \sum_{(i,j) \in A_{00}} CM_N E((V_{ij}^T \theta)^2 (M_N^{1/2} |V_{ij}^T \theta| + |e_{ij}|)) = O\left(\frac{M_N^2 p^*}{N^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

令 $c_{Nk} = [M_N^{\delta/(2+\delta)a}]$, $k = 1, 2$, 而 $a > 2(4 + \delta)/(2 + \delta)$ 是正常数. 我们将集合 $\{(i, j) \neq (i', j') \in A_{00}\}$ 划分成如下两部分:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 & = \{(i, j) \neq (i', j') \in A_{00} : |i - i'| \leq c_{N1}, |j - j'| \leq c_{N2}\}, \\ \mathbf{S}_2 & = \{(i, j) \neq (i', j') \in A_{00} : |i - i'| > c_{N1} \text{ 或 } |j - j'| > c_{N2}\}. \end{aligned}$$

由 (5.4), 可得

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_1} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_1} |ER_{ij}(M_N^{1/2}\theta)R_{i'j'}(M_N^{1/2}\theta)| = O\left(\frac{M_N^{2+2\delta/(2+\delta)a}p^*}{N^{3/2}}\right). \quad (5.5)$$

利用文献 [6, 引理 5.1] 和假设 (1), (3), (5), 可推导出

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_2} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_2} |ER_{ij}(M_N^{1/2}\theta)R_{i'j'}(M_N^{1/2}\theta)| \\ & \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_2} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_2} C(E(|R_{ij}(M_N^{1/2}\theta)|^{2+\delta}))^{2/(2+\delta)} (\phi(\|(i',j') - (i,j)\|))^{\delta/(2+\delta)} \\ & \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_2} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_2} C(E(|T_{ij}(M_N^{1/2}\theta)|^{2+\delta}))^{2/(2+\delta)} (\phi(\|(i',j') - (i,j)\|))^{\delta/(2+\delta)} \\ & \leq CM_N \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_2} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_2} \left(E\left[\max_{ij} |V_{ij}^T \theta|^\delta (|V_{ij}^T M_N^{1/2} \theta| + |e_{ij}|)\right] |V_{ij}^T \theta|^2\right)^{2/(2+\delta)} \\ & \quad \times (\phi(\|(i',j') - (i,j)\|))^{\delta/(2+\delta)} \\ & \leq CM_N^2 N^{-(3+\delta)/(2+\delta)} \|\theta\|^{2+2/(2+\delta)} \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_2} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_2} (\phi(\|(i',j') - (i,j)\|))^{\delta/(2+\delta)}. \end{aligned}$$

类似文献 [6, 引理 5.2] 的证明, 并注意到 $\phi(t) = O(e^{-\varrho t})$ 和 $c_{Nk} = [M_N^{\delta/(2+\delta)a}]$, 可推导出

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_2} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_2} (\phi(\|(i',j') - (i,j)\|))^{\delta/(2+\delta)} \\ & \leq Cp^* \sum_{k=1}^2 \sum_{t=c_{Nk}}^{\|\bar{p}\|} t(\phi(t))^{\delta/(2+\delta)} \leq Cp^* \exp\left(\frac{-\varrho_1 [M_N^{\delta/(2+\delta)a}] \delta}{2+\delta}\right), \end{aligned}$$

这里 $0 < \varrho_1 < \varrho$ 为某个常数. 从而,

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{S}_2} \sum_{(i',j') \in \mathcal{S}_2} |ER_{ij}(M_N^{1/2}\theta)R_{i'j'}(M_N^{1/2}\theta)| = o\left(\frac{M_N^{2+2\delta/(2+\delta)a}p^*}{N^{3/2}}\right). \quad (5.6)$$

结合 (5.3)–(5.6), 可得

$$\sigma^2(\tilde{q}) = O\left(\frac{M_N^{2+2\delta/(2+\delta)a}p^*}{N^{3/2}}\right). \quad (5.7)$$

记 $\Theta = \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{K_N}) : \|\theta\| \leq L\}$, 并记 $|\theta| = \max_{1 \leq i \leq K_N} |\theta_i|$, 此处, $K_N = d_2 + d_1 M_N(s+1)$. 将 Θ 划分成 J_N 个互不相交的区域 $\Theta_1, \dots, \Theta_{J_N}$, 使得对任意 $\pi_k \in \Theta_k, 1 \leq k \leq J_N$ 和任意小的 $\varepsilon > 0$, 满足

$$\sup_{\theta \in \Theta_k} |R_N(M_N^{1/2}\theta) - R_N(M_N^{1/2}\pi_k)| \leq CM_N N^{1/2} \sup_{\theta \in \Theta_k} |\theta - \pi_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

在上面的第一个不等式中, 我们利用了如下的推导

$$\begin{aligned} |T_{ij}(M_N^{1/2}\theta) - T_{ij}(M_N^{1/2}\pi_k)| & \leq (|\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T M_N^{1/2}\theta) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T M_N^{1/2}\pi_k)| \\ & \quad + |\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T M_N^{1/2}\pi_k) - \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})|) \cdot |V_{ij}^T M_N^{1/2}(\theta - \pi_k)|. \end{aligned}$$

这可以通过取 $J_n \leq ((4CM_N N^{1/2}L)/\varepsilon)^{K_N}$ 使上述不等式成立. 取 $\varepsilon_{N1} = (M_N \log N)^3/m$, 并取 $\varepsilon_{N2} = (M_N \log N)^3/n$, 由假设 (6), 有 $\varepsilon_{N1} \rightarrow 0$, $\varepsilon_{N2} \rightarrow 0$. 取

$$\tilde{q}_1 = [(mM_N \log N)^{1/2}/\varepsilon_{N1}^{1/4}], \quad \tilde{q}_2 = [(nM_N \log N)^{1/2}/\varepsilon_{N2}^{1/4}],$$

则有 $\tilde{p}_1 = O(M_N \log N/\varepsilon_{N1}^{1/4})$, $\tilde{p}_2 = O(M_N \log N/\varepsilon_{N2}^{1/4})$. 从而, 利用引理 4, (5.2) 和 (5.7), 可得

$$\begin{aligned} & P\left\{\sup_{\|\theta\| \leq L} |M_N^{-1} R_N(M_N^{1/2} \theta)| > \varepsilon\right\} \\ & \leq \sum_{k=1}^{J_N} P\left\{\left|\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{ij}(M_N^{1/2} \pi_k)\right| > \frac{\varepsilon M_N}{2}\right\} \\ & \leq \left(\frac{4CM_N N^{1/2}L}{\varepsilon}\right)^{K_N} \cdot 4\left\{2 \exp\left(-\frac{M_N^2 \varepsilon^2 q^*}{16(16N^2 \sigma^2(\tilde{q})/p^{*2} + V_0 N M_N \varepsilon)}\right) + \frac{8NV_0}{M_N \varepsilon} \varphi(\min(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2))\right\} \\ & \leq 8\left\{\exp\left(2sd_1 M_N \log N \left[1 - \frac{M_N \varepsilon^2 q^*}{32sd_1 \log N (16N^2 \sigma^2(\tilde{q})/p^{*2} + V_0 N M_N \varepsilon)}\right]\right)\right. \\ & \quad \left. + \exp\left(2sd_1 M_N \log N \left[1 - \frac{\varpi \min(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)}{2sd_1 M_N \log N}\right]\right)\right\} \\ & = o(1). \end{aligned}$$

此处, $V_0 = CLM_N/N^{1/2}$, 这就完成了引理 5 的证明. $\square$

引理 6 在假设 (1) 和 (3) 下, 如果 $M_N \rightarrow \infty$ 且 $M_N^2/N \rightarrow 0$, 那么, 存在正常数 $\tilde{C}_1$ 和 $\tilde{C}_2$, 使得除一概率趋于零的事件外, 矩阵 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{ij}^T$ 的所有特征值落在 $\tilde{C}_1$ 与 $\tilde{C}_2$ 之间.

证明 令 $T_{rr'\nu k} = X_{ijr} X_{ijr'} ((U_{ij} - t_\nu)/h_0)^k \chi_\nu(U_{ij}) - E(X_{ijr} X_{ijr'} ((U_{ij} - t_\nu)/h_0)^k \chi_\nu(U_{ij}))$, 并令 $T_N^* = \frac{M_N}{N} \max_{1 \leq r, r' \leq d_1, 1 \leq \nu \leq M_N, 0 \leq k \leq 2s} |T_{rr'\nu k}|$, 在引理 6 的条件下, 类似文献 [17, 引理 3] 的证明, 有 $T_N^* = O_p(1)$. 利用假设 (1) 和 (3), 可得

$$E\left(\theta_2^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{ij}^T \theta_2\right) = M_N \int_0^1 Q(u)^T E(X_{ij} X_{ij}^T | U_{ij} = u) Q(u) f(u) du \geq \lambda_0 M_N \int_0^1 \left[\sum_{r=1}^{d_1} Q_r^2(u)\right] du,$$

此处, $Q(u) = (Q_1(u), \dots, Q_{d_1}(u))^T$, $Q_r(u) = \sum_{\nu=1}^{M_N} \chi_\nu(u) \sum_{k=0}^s \theta_{r\nu k} ((u - t_\nu)/h_0)^k$. 由于

$$\int_0^1 Q_r^2(u) du = \sum_{\nu=1}^{M_N} \theta_{r\nu}^T \int_{I_\nu} \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\nu^T du \theta_{r\nu},$$

这里 $\theta_{r\nu} = (\theta_{r\nu 0}, \dots, \theta_{r\nu s})^T$, $\mathcal{A}_\nu = (1, (u - t_\nu)/h_0, \dots, ((u - t_\nu)/h_0)^s)^T$. 类似文献的证明, 存在正常数 $\tilde{\lambda}_0$, 使得矩阵 $\int_{I_\nu} \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\nu^T / (2h_0)$ 的最小特征值大于 $\tilde{\lambda}_0$. 注意到 $2h_0 = 1/M_N$, 可推导出

$$E\left(\theta_2^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ij} \tilde{B}_{ij}^T \theta_2\right) \geq \lambda_0 \tilde{\lambda}_0 \|\theta_2\|^2.$$

引理 6 余下部分的证明类似文献 [17, 引理 3] 的证明, 余下部分的证明省略. $\square$

引理 7 假定假设 (1)–(6) 成立, 则有 $\|\hat{\theta}\| = O_p(M_N^{1/2})$.

证明 依据假设 (2) 和 (3) 得 $\max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} (|e_{ij}| + |M_N^{1/2} V_{ij}^T \theta|) = o(1)$. 从而, 依据假设 (5) 得

$$M_N^{-1} \Gamma_N(M_N^{1/2} \theta) = M_N^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{e_{ij}}^{e_{ij} - M_N^{1/2} V_{ij}^T \theta} E(\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + t) | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) dt$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) [(\tilde{Z}_{ij}^T \theta_1)^2 + (\tilde{B}_{ij}^T \theta_2)^2 + 2\tilde{Z}_{ij}^T \theta_1 \tilde{B}_{ij}^T \theta_2] \\ &\quad - \tilde{c}_1 N M_N^{-[2(s+1)+1]} + o_p(1), \end{aligned} \quad (5.8)$$

此处, $\tilde{c}_1$ 为某个正常数. 由于 $\tilde{Z}_{ij}^T \theta_1 \tilde{B}_{ij}^T \theta_2 = \frac{1}{N h_0^{1/2}} \theta_1^T [Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})] B_{ij}^T \theta_2$, $Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij}) = Z_{ij} - E(Z_{ij} | X_{ij}, U_{ij}) + E(Z_{ij} | X_{ij}, U_{ij}) - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})$, 而 $\eta^*(x, u)$ 为 $E(Z_{ij} | X_{ij} = x, U_{ij} = u)$ 到变系数函数空间 $\mathcal{Y}$ 上的投影, 且 $B_{ij}^T \theta_2 \in \mathcal{Y}$, 因而, $Eg(0 | X_{ij}, U_{ij}) [Z_{ij} - \eta^*(X_{ij}, U_{ij})] B_{ij}^T \theta_2 = 0$. 令 $Q_N = \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, 并令

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1^* &= \{(i, j) \neq (i', j') \in Q_N : |i - i'| \leq c_{N1}, |j - j'| \leq c_{N2}\}, \\ \mathbf{S}_2^* &= \{(i, j) \neq (i', j') \in Q_N : |i - i'| > c_{N1} \text{ 或 } |j - j'| > c_{N2}\}. \end{aligned}$$

类似 (5.7) 的证明, 可得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) \tilde{Z}_{ij}^T \theta_1 \tilde{B}_{ij}^T \theta_2 = o_p(1). \quad (5.9)$$

因而, 由假设 (6) 和引理 6, 可得

$$M_N^{-1} \Gamma_N (M_N^{1/2} \theta) \geq \tilde{c}_2 \|\theta\|^2 + o_p(1), \quad (5.10)$$

这里 $\tilde{c}_2$ 为某个正常数. 令 $\Pi_{ij} = \psi_\tau^2(\varepsilon_{\tau ij}) V_{ij}^T V_{ij}$, 并令 $\Pi_{ij i' j'} = \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) \psi_\tau(\varepsilon_{\tau i' j'}) V_{ij}^T V_{i' j'}$, 显然有

$$\begin{aligned} &E \left\{ \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) V_{ij} \right]^T \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) V_{ij} \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E \Pi_{ij} + \sum_{(i,j) \in \mathbf{S}_1^*} \sum_{(i',j') \in \mathbf{S}_1^*} E \Pi_{ij i' j'} + \sum_{(i,j) \in \mathbf{S}_2^*} \sum_{(i',j') \in \mathbf{S}_2^*} E \Pi_{ij i' j'}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

由假设 (4), 可得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E \Pi_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(E(\psi_\tau^2(\varepsilon_{\tau ij}) | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) V_{ij}^T V_{ij}) \leq C. \quad (5.12)$$

令 $L_N = M_N^{2/(4+\delta)}$. 记 $\Phi_{ij1} = V_{ij} \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) I_{\{|\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})| \leq L_N\}}$, $\Phi_{ij2} = V_{ij} \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) I_{\{|\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij})| > L_N\}}$, 类似文献 [17, 定理 1] 的证明, 有

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{S}_1^*} \sum_{(i',j') \in \mathbf{S}_1^*} |E \Pi_{ij i' j'}| \leq C M_N (L_N^{-\delta/2} + L_N^2 M_N^{-1}) c_{N1} c_{N2} = o(M_N). \quad (5.13)$$

类似 (5.6) 的证明, 可得

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{S}_2^*} \sum_{(i',j') \in \mathbf{S}_2^*} |E \Pi_{ij i' j'}| \leq C \frac{M_N^{1+\delta/(2+\delta)}}{N} \sum_{(i,j) \in \mathbf{S}_2^*} \sum_{(i',j') \in \mathbf{S}_2^*} (\varphi(\|(i', j') - (i, j)\|))^{\delta/(2+\delta)} = o(M_N). \quad (5.14)$$

结合 (5.11)–(5.14), 得到 $E \|\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) V_{ij}\| = o(M_N^{1/2})$. 随之而来, 有

$$M_N^{-1/2} E \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij}^T \theta \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) \right\| \leq C M_N^{-1/2} \|\theta\| E \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) V_{ij} \right\| = o(1). \quad (5.15)$$

结合 (5.1), (5.10), (5.15) 和引理 5, 对充分大的 L , 可得 $P(\inf_{\|\theta\|=L} M_N^{-1} S_N(M_N^{1/2}\theta) > 0) \rightarrow 1$, 依据 ρ_τ 的凸性, 这意味着

$$P\left(\inf_{\|\theta\| \geq LM_N^{1/2}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - V_{ij}^T \theta) > \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij})\right) \rightarrow 1.$$

从而, 有 $\|\hat{\theta}\| = O_p(M_N^{1/2})$. 这就完成了引理 7 的证明. $\square$

定理 1 的证明 令 $\eta = \Lambda_\tau^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) \tilde{Z}_{ij}$, 类似文献 [17, 引理 6] 的证明, 有

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) \tilde{Z}_{ij} \rightarrow_d N(0, \Delta_\tau).$$

从而, 为证明定理 1, 只需证明对任意 $\epsilon > 0$, 成立 $P\{\|\hat{\theta}_1 - \eta\| < \epsilon\} \rightarrow 1$. 记 $\tilde{S}_{ij}(\theta_1, \theta_2) = \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - \tilde{Z}_{ij}^T \theta_1 - \tilde{B}_{ij}^T \theta_2) - \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij} - \tilde{B}_{ij}^T \theta_2)$, $\tilde{S}_N(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{S}_{ij}(\theta_1, \theta_2)$, 并记

$$\tilde{\Gamma}_N(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(\tilde{S}_{ij}(\theta_1, \theta_2) | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}).$$

依据假设 (1) 和 (5), 可得

$$\tilde{\Gamma}_N(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) \left[\frac{1}{2} (\tilde{Z}_{ij}^T \theta_1)^2 - \tilde{Z}_{ij}^T \theta_1 e_{ij} + \tilde{Z}_{ij}^T \theta_1 \tilde{B}_{ij}^T \theta_2 \right] [1 + o_p(1)].$$

类似引理 7 的证明, 有 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) (\tilde{Z}_{ij}^T \theta_1)^2 = \theta_1^T \Lambda_\tau \theta_1 + o_p(1)$. 类似 (5.9) 的证明, 得到 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) \tilde{Z}_{ij}^T \theta_1 e_{ij} = o_p(1)$. 因而, 由 (5.9), 可得

$$\tilde{\Gamma}_N(\theta_1, \theta_2) = \theta_1^T \Lambda \theta_1 + o_p(1). \quad (5.16)$$

定理 1 其余部分的证明类似文献 [18, 定理 1] 的证明, 在此省略其后的证明. $\square$

定理 2 的证明 在假设 (2) 下, 依据 Taylor 展开式, 有

$$\alpha_{\tau r}(U_{ij}) = \alpha_{\tau r}(u_0) + \alpha'_{\tau r}(u_0)(U_{ij} - u_0) + \frac{1}{2} \alpha''_{\tau r}(\xi_{ijr})(U_{ij} - u_0)^2,$$

此处, $|U_{ij} - u_0| \leq Mh$, $|\xi_{ijr} - u_0| < |U_{ij} - u_0|$. 令 $a_0 = (a_{10}, \dots, a_{d_1 0})^T$, $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{d_1 1})^T$, $\alpha''_\tau(\xi_{ij}) = (\alpha''_{\tau 1}(\xi_{ij1}), \dots, \alpha''_{\tau d_1}(\xi_{ij d_1}))^T$, 并记 $e_{ij}^* = \frac{1}{2}(U_{ij} - u_0)^2 \alpha''_\tau(\xi_{ij})^T X_{ij}$, $D_{ij} = (Nh)^{-1/2}(1, h^{-1}(U_{ij} - u_0))^T \otimes X_{ij}$, $\vartheta = (Nh)^{1/2}((a_0 - \alpha_\tau(u_0))^T, h(a_1 - \alpha'_\tau(u_0))^T)^T$, $\tilde{Z}_{ij} = N^{-1/2} Z_{ij}$, 这里 $\otimes$ 表 Kronecker 积. 我们转而研究下面新的最优化问题:

$$\hat{\vartheta} = \text{Argmin}_{\vartheta} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}^* - D_{ij}^T \vartheta - \tilde{Z}_{ij}^T \hat{\theta}_1) - \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}^* - \tilde{Z}_{ij}^T \hat{\theta}_1)] K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right).$$

显然, 有 $\hat{\vartheta} = (Nh)^{1/2}((\hat{a}_0 - \alpha_\tau(u_0))^T, h(\hat{a}_1 - \alpha'_\tau(u_0))^T)^T$. 令 $\vartheta^* = \frac{1}{2} N^{1/2} h^{5/2} \kappa \otimes \alpha''_\tau(u_0)$, 并记

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta^* + \frac{1}{f(u_0)} (P^{-1} \otimes \Omega^{-1}(u_0)) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij} \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right),$$

这里 $\kappa = (\mu_0^{-1} \mu_2, 0)^T$, $P = \text{diag}(\mu_0, \mu_2)$. 在定理 2 的假设下, 类似文献 [6, 引理 3.1] 的证明, 可推导出

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij} \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right) \rightarrow_d N(0, f(u_0) \tilde{P} \otimes \Sigma(u_0)),$$

这里 $\tilde{P} = \text{diag}(\nu_0, \nu_2)$. 从而, 为完成定理 2 的证明, 只需证明对任意 $\epsilon > 0$, 成立 $P\{\|\hat{\vartheta} - \tilde{\vartheta}\| < \epsilon\} \rightarrow 1$. 记

$$S_{ij}^*(\vartheta, \theta_1) = [\rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}^* - D_{ij}^T \vartheta - \bar{Z}_{ij}^T \theta_1) - \rho_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + e_{ij}^* - \bar{Z}_{ij}^T \theta_1)] K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right),$$

并记 $S_N^*(\vartheta, \theta_1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij}^*(\vartheta, \theta_1)$. 由定理 1, 有 $\hat{\theta}_1 = O_p(1)$, 利用凸函数 ρ_τ 的性质, 只需证明对充分大的 $L > 0$, $L^* > 0$, 成立

$$P\left(\left\{\inf_{\|\vartheta - \tilde{\vartheta}\| = \epsilon, \|\theta_1\| \leq L} (S_N^*(\vartheta, \theta_1) - S_N^*(\tilde{\vartheta}, \theta_1)) > 0\right\} \cap \{\|\tilde{\vartheta}\| \leq L^*\}\right) \rightarrow 1. \quad (5.17)$$

记 $\Gamma_N^*(\vartheta, \theta_1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(S_{ij}^*(\vartheta, \theta_1) | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij})$, 并记

$$R_N^*(\vartheta, \theta_1) = S_N^*(\vartheta, \theta_1) - \Gamma_N^*(\vartheta, \theta_1) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) D_{ij}^T \vartheta K\left(\frac{t_{ij} - t_0}{h}\right).$$

由假设 (3), (5) 和 (7), 可得

$$\begin{aligned} \Gamma_N^*(\vartheta, \theta_1) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{e_{ij}^* - \bar{Z}_{ij}^T \theta_1}^{e_{ij}^* - D_{ij}^T \vartheta - \bar{Z}_{ij}^T \theta_1} E(\psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij} + t) | X_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}) dt \cdot K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) \left[\frac{1}{2} (D_{ij}^T \vartheta)^2 - e_{ij}^* D_{ij}^T \vartheta + D_{ij}^T \vartheta \bar{Z}_{ij}^T \theta_1 \right] K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right) + o_p(1). \end{aligned}$$

类似文献 [6, 引理 2.1] 的证明, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) (D_{ij}^T \vartheta)^2 K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right) &= f(u_0) \vartheta^T (P \otimes \Omega_\tau(u_0)) \vartheta + o_p(1), \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(0 | X_{ij}, U_{ij}) e_{ij}^* D_{ij}^T \vartheta &= \frac{1}{2} (Nh)^{1/2} h^2 f(u_0) \vartheta^T [\tilde{\kappa} \otimes (\Omega_\tau(u_0) \alpha_\tau''(u_0))] + o_p(1), \end{aligned}$$

此处, $\tilde{\kappa} = (\mu_2, 0)^T$. 由于 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E[g(0 | X_{ij}, U_{ij}) D_{ij}^T \vartheta \bar{Z}_{ij}^T \theta_1] K\left(\frac{U_{ij} - u_0}{h}\right) = O(h^{1/2}) = o(1)$, 从而,

$$S_N^*(\vartheta, \theta_1) = \frac{1}{2} f(u_0) \vartheta^T (P \otimes \Omega_\tau(u_0)) \vartheta - f(u_0) \vartheta^T (P \otimes \Omega_\tau(u_0)) \tilde{\vartheta} + R_N^*(\vartheta, \theta_1) + o_p(1).$$

利用关系式 $\vartheta^T (P \otimes \Omega_\tau(u_0)) \tilde{\vartheta} = \frac{1}{2} [\vartheta^T (P \otimes \Omega_\tau(u_0)) \vartheta + \tilde{\vartheta}^T (P \otimes \Omega_\tau(u_0)) \tilde{\vartheta} - (\vartheta - \tilde{\vartheta})^T (P \otimes \Omega_\tau(u_0)) (\vartheta - \tilde{\vartheta})]$. 并注意到 $\|\vartheta - \tilde{\vartheta}\| = \epsilon$, 可推导出

$$S_N^*(\vartheta, \theta_1) - S_N^*(\tilde{\vartheta}, \theta_1) \geq \frac{1}{2} f(u_0) \min(\mu_0, \mu_2) \lambda_{\min}(u_0) \epsilon^2 - 2 \sup_{\|\theta_1\| \leq L, \|\vartheta\| \leq L^* + \epsilon} |R_N^*(\vartheta, \theta_1)| + o_p(1),$$

这里 $\lambda_{\min}(u_0)$ 为 $\Omega_\tau(u_0)$ 的最小特征值. 在定理 2 的假设下, 类似引理 5 的证明并取 $c_{Nk} = [h^{-\delta/(2+\delta)a}]$, $k = 1, 2$, $\varepsilon_{N1} = h^{-1/2}(\log N)^3/m$, $\varepsilon_{N2} = h^{-1/2}(\log N)^3/n$, $\tilde{q}_1 = [h^{-1/4}(m \log N)^{1/2}/\varepsilon_{N1}^{1/4}]$, 以及 $\tilde{q}_2 = [h^{-1/4}(n \log N)^{1/2}/\varepsilon_{N2}^{1/4}]$, 可得 $\sup_{\|\theta_1\| \leq L, \|\vartheta\| \leq L^* + \epsilon} |R_N^*(\vartheta, \theta_1)| = o_p(1)$. 因而 (5.17) 成立. 这就完成了定理 2 的证明. $\square$

定理 3 的证明 令

$$P_e = \begin{pmatrix} \mu_{0e} & \mu_{1e} \\ \mu_{1e} & \mu_{2e} \end{pmatrix}, \quad \kappa_e = \begin{pmatrix} \mu_{2e} \\ \mu_{3e} \end{pmatrix},$$

并令 $\vartheta^* = \frac{1}{2} N^{1/2} h^{5/2} P_e^{-1} \kappa_e \otimes \alpha''(0)$, $\tilde{\vartheta} = \vartheta^* + \frac{1}{f(0)} (P_e^{-1} \otimes \Omega_\tau^{-1}(0)) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij} \psi_\tau(\varepsilon_{\tau ij}) K\left(\frac{U_{ij} - eh}{h}\right)$. 类似于定理 2 的证明, 我们可证明定理 3. $\square$

参考文献

- 1 Ripley B. Spatial Statistics. New York: Wiley, 1981
- 2 Cressie N A C. Statistics for Spatial Data. New York: Wiley, 1991
- 3 Tran L T. Kernel density estimation on random field. *J Multivariate Anal*, 1990, 34: 37–53
- 4 Hallin M, Lu Z, Tran L T. Density estimation for spatial linear processes. *Bernoulli*, 2001, 7: 657–668
- 5 Hallin M, Lu Z, Tran L T. Density estimation for spatial processes: the L1 theory. *J Multivariate Anal*, 2004, 88: 61–75
- 6 Hallin M, Lu Z, Tran L T. Local linear spatial regression. *Ann Statist*, 2004, 32: 2469–2500
- 7 Hallin M, Lu Z, Yu K. Local linear spatial quantile regression. *Bernoulli*, 2009, 15: 659–686
- 8 Gao J, Lu Z, Tjøstheim D. Estimation in semiparametric spatial regression. *Ann Statist*, 2006, 34: 1395–1435
- 9 Lee Y K, Choi H, Park B U, et al. Local likelihood density estimation on random fields. *Statist Probab Lett*, 2004, 68: 347–357
- 10 Lin Z, Li D, Gao J. Local linear M-estimation in nonparametric spatial regression. *J Time Ser Anal*, 2009, 30: 286–314
- 11 Zhang W, Lee S, Song X. Local polynomial fitting in semivarying coefficient model. *J Multivariate Anal*, 2002, 82: 166–188
- 12 Fan J, Huang T. Profile likelihood inferences on semiparametric varyingcoefficient partially linear models. *Bernoulli*, 2005, 11: 1031–1057
- 13 Wang H, Zhu Z, Zhou J. Quantile regression in partially linear varing coefficient models. *Ann Statist*, 2009, 37: 3841–3866
- 14 Kai B, Li R, Zou H. New efficient estimation and variable selection methods for semiparametric varying-coefficient partially linear models. *Ann Statist*, 2011, 39: 305–332
- 15 Koenker R, Basset G. Regression quantiles. *Econometrica*, 1978, 46: 33–50
- 16 Koenker R. Quantile Regression. Cambridge: Cambridge University Press, 2005
- 17 Tang Q, Cheng L. B-spline estimation for varying coefficient regression with spatial data. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 2321–2340
- 18 Tang Q. L_1 -estimation in a semiparametric model with longitudinal data. *J Statist Plann Inference*, 2010, 140: 393–405

Quantile estimation for spatial semiparametric varying coefficient partially linear regression

TANG QingGuo

Abstract This paper considers a varying coefficient partially linear regression with spatial data. The parametric estimators of the model are obtained through piecewise local polynomial approximation of the nonparametric coefficient functions. The local estimators of unknown coefficient functions are obtained by replacing the parameters in model with their estimators and using local linear approximations. The asymptotic distribution of the estimator of the unknown parameter vector is established. The asymptotic distributions of the estimators of the unknown coefficient functions at both interior and boundary points are also derived. Finite sample properties of our procedures are studied through Monte Carlo simulations.

Keywords spatial data, varying coefficient partially linear regression, quantile, asymptotic distribution

MSC(2010) 62G05, 62G08

doi: 10.1360/012013-169