重调和 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子

刘元^①, 丁宣浩^{②*}

① 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 桂林 541004;

② 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400067

E-mail: liuyuan2526@126.com, xuanhaod@qq.com

收稿日期: 2012-05-22; 接受日期: 2013-02-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271388 和 11201094) 资助项目

摘要 与调和 Bergman 空间相对应, 本文研究重调和 Hardy 空间 $h^2(D^2)$ 上的 Toeplitz 算子. 本文发现, $h^2(D^2)$ 上的 Toeplitz 算子与经典的 Hardy 空间、Bergman 空间及调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质都有很大的差异. 例如解析 Toeplitz 算子可以不是半可换及可交换的. 即使半可换, 其中任何一个符号可以不为常数; 即使可交换, 两个符号的非平凡线性组合也不一定是常数. 本文得到了 $h^2(D^2)$ 上两个解析 Toeplitz 算子半可换和可换的充分必要条件.

关键词 重调和 Hardy 空间 Toeplitz 算子 换位子 双圆盘

MSC (2010) 主题分类 47B35, 31B05

1 引言

本文中, D 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘, 它的边界为单位圆周 T , 多圆盘 D^n 和多圆环 T^n 分别是 $\mathbb{C}^n$ 上 n 个 D 和 n 个 T 的 Descartes 乘积. 设 $d\sigma(z)$ 是 T^n 上的标准 Haar 测度. Hardy 空间 $H^2(D^n)$ 是 $L^2(T^n, d\sigma)$ 或 $(L^2(T^n))$ 中解析多项式的闭包. Hardy 空间 $H^\infty(T^n)$ 是 $L^\infty(T^n, d\sigma)$ 中解析的复值函数构成的闭子代数. Bergman 空间 L_a^2 是由 $L^2(D, dA)$ 中所有在 D 上解析的复值函数构成的闭子空间, 调和 Bergman 空间 b^2 是由 $L^2(D, dA)$ 中所有在 D 上调和的复值函数构成的闭子空间, 显然, Bergman 空间 L_a^2 是调和 Bergman 空间 b^2 的闭子空间. Hardy 空间 $H^2(D)$ 在点 $z_1 \in D$ 处的再生核 K_{z_1} 和规范再生核 k_{z_1} 分别为

$$K_{z_1}(w_1) = \frac{1}{1 - \bar{z}_1 w_1}, \quad k_{z_1}(w_1) = \frac{(1 - |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{z}_1 w_1}.$$

易知, 多圆盘 Hardy 空间 $H^2(D^n)$ 在点 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D^n$ 处的再生核为 $K_z(w) = \prod_{i=1}^n K_{z_i}(w_i)$, 则 $H^2(D^n)$ 在点 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D^n$ 处的规范再生核为 $k_z(w) = \prod_{i=1}^n k_{z_i}(w_i)$. 我们知道, 调和 Bergman 空间 b^2 与解析 Bergman 空间 $L_a^2(D)$ 有着这样的关系: $b^2 = L_a^2 + \overline{L_a^2}$. 然而对于 Hardy 空间, 我们受调和 Bergman 空间的启发, 为什么不可以有调和 Hardy 空间呢? 考虑一维情形, $H^2(T) + \overline{H^2(T)} = L^2(T)$, 从 $L^2(T)$ 到 $H^2(T) + \overline{H^2(T)}$ 的投影为恒等算子, 此时, Toeplitz 算子成了乘法算子. 但是在高维情形 ($n \geq 2$), $H^2(T^n) + \overline{H^2(T^n)} \subsetneq L^2(T^n)$, 类似于调和 Bergman 空间与重调和 Bergman 空间, Axler 等人^[1] 给出了球上的重调和 Hardy 空间的概念. 如果复值函数 $f \in \mathbb{C}^2(D^n)$ 满足

$$\partial_j \bar{\partial}_k f = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial z_j}$ 表示对 f 的第 j 个变量求复偏导, 则称 f 是多重调和函数. 多重调和函数可以表示为一个解析函数和一个余解析函数的和. 本文研究多圆盘上重调和 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子.

定义 1.1 重调和 Hardy 空间 $h^2(T^n)$ 就是由 $L^2(T^n)$ 中所有的重调和函数构成的闭子空间, 是一个 Hilbert 空间, 有下面的等式:

$$h^2(T^n) = H^2(T^n) + \overline{H^2(T^n)}.$$

易知, 当 $n = 2$ 时, $\{w_1^i w_2^j, i, j \geq 0\} \cup \{\bar{w}_1^i \bar{w}_2^j, i, j \geq 1\}$ 是 $h^2(T^2)$ 的正交基, 并且 $z_1^i z_2^j \perp h^2$, $\bar{z}_1^i \bar{z}_2^j \perp h^2$, 其中 $i, j \geq 1$.

易知, D^n 中每一点的计值泛函都是 $h^2(T^n)$ 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表示定理, 对任意的 $z \in D^n$, 都存在唯一的函数即核函数 $R_z \in h^2(T^n)$, 使得

$$f(z) = \langle f, R_z \rangle = \int_{T^n} f(\zeta) \overline{R_z(\zeta)} d\sigma(\zeta), \quad \zeta \in T^n,$$

其中函数 $f \in h^2(T^n)$. 容易证明, $R_z = K_z + \overline{K_z} - 1$.

设 P 是从 $L^2(T^n)$ 到 $H^2(T^n)$ 上的正交投影, P_- 是从 $L^2(T^n)$ 到 $h^2(T^n) \ominus H^2(D^n)$ 上的正交投影, Q 是从 $L^2(T^n)$ 到 $h^2(T^n)$ 上的正交投影, 则 $Q = P + P_-$, 即对任意的 $f \in h^2(T^n)$, 就有 $f = f_+ + f_-$, 其中 $f_+ = Pf$, $f_- = P_-f$. 显然, $f_+ \in H^2(T^n)$, $f_- \in h^2(T^n) \ominus H^2(D^n)$, 并且 $f_-(0) = 0$, $f_+ \perp f_-$. 对任意的 $f \in h^2(T^n)$, 我们有

$$Q(f) = P(f) + \overline{P(f)} - P(f)(0),$$

其中 $P_-(f) = \overline{P(f)} - P(f)(0)$.

定义 1.2 设 Q 是从 $L^2(T^n)$ 到 $h^2(T^n)$ 上的正交投影, 对于任意的 $f \in L^\infty(T^n)$, 以 f 为符号的 Toeplitz 算子 T_f 定义为

$$T_f h = Q(fh) = \int_{T^n} f(\zeta) h(\zeta) \overline{R_z(\zeta)} d\sigma(\zeta), \quad \zeta \in T^n,$$

其中 $h \in h^2(T^n)$, $z \in D^n$.

为了更清楚地讨论问题, 本文将重调和 Hardy 空间 $h^2(T^n)$ 限定在双圆盘上. 我们用 ζ 表示在圆周 T 上的变量, 用 z 表示在圆盘 D 中的变量. 对于一个 $h^2(T^2)$ 中的函数 $f(\zeta_1, \zeta_2)$ 通过 Poisson 积分变换可以将其延拓到双圆盘内, $f(z_1, z_2)$ 在双圆盘上是多重调和的, 并且 $\lim_{r \rightarrow 1} f(r\zeta) = f(\zeta)$ 对几乎所有的 $\zeta \in T^2$ 成立. 为了叙述简便, 我们不加区分 f 及其在 D^2 内的调和延拓.

我们发现, 一般情况下, 重调和 Hardy 空间 $h^2(T^2)$ 上的两个解析 Toeplitz 算子的乘积不再是一个解析 Toeplitz 算子. 例如 $T_{\zeta_1} T_{\zeta_2} \bar{\zeta}_1 = 0$, $T_{\zeta_1 \zeta_2} \bar{\zeta}_1 = \zeta_2$, 所以, $T_{\zeta_1} T_{\zeta_2} \neq T_{\zeta_1 \zeta_2}$. 这说明 h^2 上的 Toeplitz 算子与解析 Hardy 空间和解析 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质很不一样, 参见文献 [2-4]. 通过直接计算容易知道, $T_{\zeta_1} T_{\zeta_1^2} = T_{\zeta_1 \zeta_1^2} = T_{\zeta_1^3}$, 但 ζ_1 和 ζ_1^2 都不是常数, 这又与调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质不一样, 参见文献 [5-14]. 自然地, 我们有下面的问题.

问题 1 在什么条件下, $h^2(T^2)$ 上的两个解析 Toeplitz 算子的半交换子为零?

容易看到 $T_{\zeta_1} T_{\zeta_2} \neq T_{\zeta_2} T_{\zeta_1}$, 说明解析 Toeplitz 算子不一定可交换, 这与解析 Hardy 空间和解析 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质有很大的差异. 又容易计算得出 $T_{\zeta_1} T_{\zeta_1^2} = T_{\zeta_1^2} T_{\zeta_1}$, 但是 ζ_1 和 ζ_1^2

的非平凡线性组合并不是常数, 这又与调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质不同, 参见文献 [5, 7, 8, 13]. 于是很自然的又有下面的问题.

问题 2 $h^2(T^2)$ 上的两个解析 Toeplitz 算子可交换的充分必要条件是什么?

在解析 Hardy 空间和解析 Bergman 空间上, 设 f 和 g 都是解析函数, 那么一定有 $T_{\bar{f}}T_g = T_{\bar{f}g}$, 而且 $T_gT_{\bar{f}} = T_{g\bar{f}}$ 当且仅当 f 或 g 是常数. Choe 和 Lee [5] 给出在调和 Bergman 空间 $b^2(D)$ 上, 若 $f, g \in H^\infty$, 且其中一个非循环, $T_fT_{\bar{g}} = T_{\bar{g}}T_f$, 或 $T_{f\bar{g}} = T_{\bar{g}}T_f$, 或 $T_{f\bar{g}} = T_fT_{\bar{g}}$ 成立当且仅当只能 f 或 g 是常数. 但在 $h^2(T^2)$ 上, 一般情形, $T_{\bar{f}}T_g \neq T_{\bar{f}g}$. 我们也能够证明 $T_{\bar{\zeta}_1}T_{\zeta_2} = T_{\zeta_2}T_{\bar{\zeta}_1}$, 但 $f = \zeta_1$ 和 $g = \zeta_2$ 都不是常数. 因此很自然又有下面的问题.

问题 3 在 $h^2(T^2)$ 上, 对于解析函数 f 和 g , 在什么条件下有 $T_fT_{\bar{g}} = T_{\bar{g}}T_f$, 或 $T_{f\bar{g}} = T_{\bar{g}}T_f$, 或 $T_{f\bar{g}} = T_fT_{\bar{g}}$ 成立?

本文将在第 2 节给出问题 1 的完整解答, 在第 3 节给出问题 2 的完整解答, 在第 4 节对问题 3 进行一些讨论.

2 解析 Toeplitz 算子的半交换子

定理 2.1 设 $f, g \in H^\infty(T^2)$, 则 $T_fT_g = T_{fg}$ 成立的充要条件是下面三个条件之一成立:

- (1) f 和 g 至少有一个是常数;
- (2) $f = f(\zeta_1)$ 和 $g = g(\zeta_1)$ 均为以 ζ_1 为变量的函数;
- (3) $f = f(\zeta_2)$ 和 $g = g(\zeta_2)$ 均为以 ζ_2 为变量的函数.

证明 必要性 设 $T_fT_g = T_{fg}$. 我们将 f 和 g 写成关于其中一个变量的幂级数的形式,

$$f(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\zeta_2)\zeta_1^i, \quad g(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^j,$$

其中 $\zeta_1, \zeta_2 \in T$, $a_i(\zeta_2)$ 和 $b_j(\zeta_2)$ 均是关于 ζ_2 的解析函数, 且 $a_i(\zeta_2), b_j(\zeta_2) \in H^2(T)$. 对于 $\bar{\zeta}_1 \in h^2(T^2)$, 由已知显然有 $T_fT_g\bar{\zeta}_1 = T_{fg}\bar{\zeta}_1$. 因为

$$\begin{aligned} T_g\bar{\zeta}_1 &= Q(g\bar{\zeta}_1) = Q\left[\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(\zeta_2)\bar{\zeta}_1\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + Q(b_0(\zeta_2)\bar{\zeta}_1) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(0)\bar{\zeta}_1, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} T_fT_g\bar{\zeta}_1 &= Q[fQ(g\bar{\zeta}_1)] = Q\left\{f\left[\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(0)\bar{\zeta}_1\right]\right\} \\ &= Q\left[f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(0)f\bar{\zeta}_1\right] = f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(0)Q(f\bar{\zeta}_1) \\ &= f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(0)\left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2)\zeta_1^{i-1} + a_0(0)\bar{\zeta}_1\right] \\ &= f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(0)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2)\zeta_1^{i-1} + a_0(0)b_0(0)\bar{\zeta}_1. \end{aligned}$$

另一边,

$$\begin{aligned}
 T_{fg}\bar{\zeta}_1 &= Q(fg\bar{\zeta}_1) = Qf(g\bar{\zeta}_1) \\
 &= Qf\left[\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(\zeta_2)\bar{\zeta}_1\right] \\
 &= Q\left(f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + fb_0(\zeta_2)\bar{\zeta}_1\right) \\
 &= f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + Q(fb_0(\zeta_2)\bar{\zeta}_1) \\
 &= f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + Q\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2)b_0(\zeta_2)\zeta_1^{i-1} + a_0(\zeta_2)b_0(\zeta_2)\bar{\zeta}_1\right) \\
 &= f\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1} + b_0(\zeta_2)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2)\zeta_1^{i-1} + a_0(0)b_0(0)\bar{\zeta}_1,
 \end{aligned}$$

所以,

$$b_0(0)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2)\zeta_1^{i-1} = b_0(\zeta_2)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2)\zeta_1^{i-1}.$$

将上式两端解析延拓到 D^2 内, 即

$$b_0(0)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2)z_1^{i-1} = b_0(z_2)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2)z_1^{i-1}.$$

上式两端同时乘以 z_1 得

$$b_0(0)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2)z_1^i = b_0(z_2)\sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2)z_1^i,$$

即 $[f(z) - a_0(z_2)]b_0(z_2) = b_0(0)[f(z) - a_0(z_2)]$, 整理得

$$[f(z) - a_0(z_2)][b_0(z_2) - b_0(0)] = 0.$$

根据解析函数零点的孤立性, 只有两种情形发生:

情形 1 $f(z) - a_0(z_2) \equiv 0$, 即 $f(z)$ 关于 z_1 是常数;

情形 2 $f(z)$ 关于 z_1 不是常数, 而 $b_0(z_2) - b_0(0) \equiv 0$, 即 $b_0(z_2)$ 是常数.

当情形 2 成立时, 有

$$g(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^j + b_0(0),$$

令 $g_1(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^j$, 由已知 $T_f T_g = T_{fg}$ 得 $T_f T_{g_1+b_0(0)} = T_{f(g_1+b_0(0))}$, 即

$$T_f T_{g_1} + b_0(0)T_f = T_{fg_1} + b_0(0)T_f,$$

即 $T_f T_{g_1} = T_{fg_1}$. 因为 $\bar{\zeta}_1^2 \in h^2(T^2)$, 显然, $T_f T_{g_1} \bar{\zeta}_1^2 = T_{fg_1} \bar{\zeta}_1^2$, 其中

$$T_{g_1} \bar{\zeta}_1^2 = Q(g_1 \bar{\zeta}_1^2) = Q\left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-2} + b_1(\zeta_2)\bar{\zeta}_1\right] = \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-2} + b_1(0)\bar{\zeta}_1.$$

所以,

$$\begin{aligned}
 T_f T_{g_1} \bar{\zeta}_1^2 &= T_f \left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\
 &= Q \left[f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) f \bar{\zeta}_1 \right] \\
 &= f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) Q \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(\zeta_2) \bar{\zeta}_1 \right] \\
 &= f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + Q(a_0(\zeta_2) \bar{\zeta}_1) \right] \\
 &= f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(0) b_1(0) \bar{\zeta}_1.
 \end{aligned}$$

另一边,

$$\begin{aligned}
 T_{fg_1} \bar{\zeta}_1^2 &= Q(fg_1 \bar{\zeta}_1^2) = Qf \left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(\zeta_2) \bar{\zeta}_1 \right] \\
 &= Q \left[f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + f b_1(\zeta_2) \bar{\zeta}_1 \right] = f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + Q[f b_1(\zeta_2) \bar{\zeta}_1] \\
 &= f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + Q \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) b_1(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(\zeta_2) b_1(\zeta_2) \bar{\zeta}_1 \right] \\
 &= f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(\zeta_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(0) b_1(0) \bar{\zeta}_1,
 \end{aligned}$$

所以,

$$b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} = b_1(\zeta_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1}.$$

可将上式两端解析延拓到 D^2 内, 即

$$b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^{i-1} = b_1(z_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^{i-1}.$$

上式两端同时乘以 z_1 得

$$b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i = b_1(z_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i,$$

即 $[f(z) - a_0(z_2)]b_1(z_2) = b_1(0)[f(z) - a_0(z_2)]$, 整理得 $[f(z) - a_0(z_2)][b_1(z_2) - b_1(0)] = 0$. 因为 $f(z)$ 关于 z_1 不是常数, 所以, $b_1(z_2) - b_1(0) \equiv 0$, 即 $b_1(z_2)$ 是常数. 所以,

$$g_1(\zeta) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j + b_1(0) \zeta_1,$$

令 $g_2(\zeta) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2)\zeta_1^j$, 由 $T_f T_{g_1} = T_{f_{g_1}}$ 得 $T_f T_{g_2+b_1(0)\zeta_1} = T_{f[g_2+b_1(0)\zeta_1]}$, 即

$$\begin{aligned} T_f T_{g_2} + b_1(0) T_f T_{\zeta_1} &= T_{f_{g_2} + b_1(0) T_{f_{\zeta_1}}}, \\ T_f T_{\zeta_1} \bar{\zeta}_1^3 &= T_f Q(\bar{\zeta}_1^2) = T_f \bar{\zeta}_1^2 = Q(f \bar{\zeta}_1^2), \\ T_{f_{\zeta_1}} \bar{\zeta}_1^3 &= Q(f \bar{\zeta}_1^2). \end{aligned}$$

显然, $T_f T_{\zeta_1} \bar{\zeta}_1^3 = T_{f_{\zeta_1}} \bar{\zeta}_1^3$, 所以,

$$T_f T_{g_2} \bar{\zeta}_1^3 = T_{f_{g_2}} \bar{\zeta}_1^3.$$

上式左边

$$\begin{aligned} T_f T_{g_2} \bar{\zeta}_1^3 &= Q \left[f \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) f \bar{\zeta}_1 \right] \\ &= f \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) Q \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(\zeta_2) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &= f \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(0) b_2(0) \bar{\zeta}_1, \end{aligned}$$

右边

$$\begin{aligned} T_{f_{g_2}} \bar{\zeta}_1^3 &= Q(f g_2 \bar{\zeta}_1^3) = Qf \left[\sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(\zeta_2) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &= f \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + Q[f b_2(\zeta_2) \bar{\zeta}_1] \\ &= f \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + Q \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) b_2(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(\zeta_2) b_2(\zeta_2) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &= f \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(\zeta_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + a_0(0) b_2(0) \bar{\zeta}_1, \end{aligned}$$

所以,

$$b_2(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} = b_2(\zeta_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1}.$$

同样将上式两端解析延拓到 D^2 内, 即

$$b_2(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^{i-1} = b_2(z_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^{i-1}.$$

上式两端同时乘以 z_1 得

$$b_2(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i = b_2(z_2) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i,$$

即

$$[f(z) - a_0(z_2)] b_2(z_2) = b_2(0) [f(z) - a_0(z_2)],$$

整理得

$$[f(z) - a_0(z_2)][b_2(z_2) - b_2(0)] = 0.$$

因为 $f(z)$ 关于 z_1 不是常数, 所以, $b_2(z_2) - b_2(0) \equiv 0$, 即 $b_2(z_2)$ 是常数. 一直进行下去, 在 $f(z)$ 关于 z_1 不是常数的假定下, 可以推得 $b_k(z_2)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 都是常数. 所以, g 关于 z_2 是常数. 因此得到 f 关于 z_1 是常数或者 g 关于 z_2 是常数. 当我们利用 $\bar{\zeta}_2^l$ 作用于算子方程 $T_f T_g = T_{fg}$ 两端时, 由对称性可以得到, 要么 f 关于 z_2 是常数, 要么 g 关于 z_1 是常数. 综上所述, 当 f 关于 z_1 是常数时, 有两种情况: (a) f 关于 z_2 是常数, 此时 f 是常数, 这就是条件 (1); (b) g 关于 z_1 是常数, 此时条件 (3) 成立. 同样, 当 g 关于 z_2 是常数时, 也有两种情况: (c) g 关于 z_1 是常数, 此时 g 是常数, 即条件 (1) 成立; (d) f 关于 z_2 是常数, 此时条件 (2) 成立. 必要性获证.

充分性 当 f, g 满足条件 (1) 时, 显然有 $T_f T_g = T_{fg}$ 成立.

当 f, g 满足条件 (2) 时, 将 f 和 g 写成幂级数的形式, $f(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \zeta_1^i$, $g(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \zeta_1^j$, 其中 a_i 和 b_j 都是常数. 那么对整数 $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} T_g \bar{\zeta}_2^m &= Q(g \bar{\zeta}_2^m) = g(0) \bar{\zeta}_2^m, \\ T_f T_g \bar{\zeta}_2^m &= Q[f g(0) \bar{\zeta}_2^m] = f(0) g(0) \bar{\zeta}_2^m. \end{aligned}$$

另一边, $T_{fg} \bar{\zeta}_2^m = Q(f g \bar{\zeta}_2^m) = f(0) g(0) \bar{\zeta}_2^m$, 显然, $T_f T_g \bar{\zeta}_2^m = T_{fg} \bar{\zeta}_2^m$. 又有

$$T_g \bar{\zeta}_1^m = Q(g \bar{\zeta}_1^m) = Q\left[\sum_{j=m}^{\infty} b_j \zeta_1^{j-m} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j}\right] = \sum_{j=m}^{\infty} b_j \zeta_1^{j-m} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j},$$

则

$$T_f T_g \bar{\zeta}_1^m = Qf\left[\sum_{j=m}^{\infty} b_j \zeta_1^{j-m} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j}\right] = f \sum_{j=m}^{\infty} b_j \zeta_1^{j-m} + Qf \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j}.$$

另一边,

$$T_{fg} \bar{\zeta}_1^m = Qf\left[\sum_{j=m}^{\infty} b_j \zeta_1^{j-m} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j}\right] = f \sum_{j=m}^{\infty} b_j \zeta_1^{j-m} + Qf \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j},$$

显然, $T_f T_g \bar{\zeta}_1^m = T_{fg} \bar{\zeta}_1^m$. 又对整数 $m, l \geq 1$,

$$T_g \bar{\zeta}_1^m \bar{\zeta}_2^l = Q\left(\sum_{j=m}^{\infty} b_j \zeta_1^{j-m} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j}\right) \bar{\zeta}_2^l = b_m \bar{\zeta}_2^l + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j} \bar{\zeta}_2^l,$$

所以,

$$\begin{aligned} T_f T_g \bar{\zeta}_1^m \bar{\zeta}_2^l &= Qf\left(b_m \bar{\zeta}_2^l + \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j} \bar{\zeta}_2^l\right) \\ &= b_m Qf \bar{\zeta}_2^l + Qf \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j} \bar{\zeta}_2^l \\ &= b_m f(0) \bar{\zeta}_2^l + Qf \sum_{j=0}^{m-1} b_j \bar{\zeta}_1^{m-j} \bar{\zeta}_2^l. \end{aligned}$$

另一边,

$$\begin{aligned} T_{fg}\bar{\zeta}_1^m\bar{\zeta}_2^l &= Qf\left(\sum_{j=m}^{\infty}b_j\zeta_1^{j-m}\bar{\zeta}_2^l+\sum_{j=0}^{m-1}b_j\bar{\zeta}_1^{m-j}\bar{\zeta}_2^l\right) \\ &= Q\left(f\sum_{j=m}^{\infty}b_j\zeta_1^{j-m}\bar{\zeta}_2^l\right)+Q\left(f\sum_{j=0}^{m-1}b_j\bar{\zeta}_1^{m-j}\bar{\zeta}_2^l\right) \\ &= f(0)b_m\bar{\zeta}_2^l+Qf\sum_{j=0}^{m-1}b_j\bar{\zeta}_1^{m-j}\bar{\zeta}_2^l. \end{aligned}$$

所以, $T_fT_g\bar{\zeta}_1^m\bar{\zeta}_2^l=T_{fg}\bar{\zeta}_1^m\bar{\zeta}_2^l$. 而 $T_fT_g\zeta_1^m\zeta_2^l=fg\zeta_1^m\zeta_2^l=T_{fg}\zeta_1^m\zeta_2^l$ 是显然的, 因此 $T_fT_g=T_{fg}$.

当 f 和 g 满足条件 (3) 时, 与条件 (2) 同理可证. 证毕. $\square$

3 解析 Toeplitz 算子的交换子

定理 3.1 设 f, g 在 D^2 上有界解析, 则 $T_fT_g=T_gT_f$ 成立的充要条件是下面三个条件之一成立:

- (1) $f=f(\zeta_1)$ 和 $g=g(\zeta_1)$ 均为以 ζ_1 为变量的函数;
- (2) $f=f(\zeta_2)$ 和 $g=g(\zeta_2)$ 均为以 ζ_2 为变量的函数;
- (3) 存在不全为零的常数 a 和 b , 使得 $af+bg$ 为常数.

证明 充分性 根据定理 2.1, 显然成立.

必要性 设 $T_fT_g=T_gT_f$.

情形 1 假设 f 和 g 关于每个变量都不是常数, 且 $f(0)=g(0)=0$, 即 $\partial_1f\neq 0, \partial_2f\neq 0, \partial_1g\neq 0, \partial_2g\neq 0, f(0)=g(0)=0$.

我们将 f 和 g 写成关于一个变量的幂级数的形式, $f=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(\zeta_2)\zeta_1^i, g=\sum_{j=0}^{\infty}b_j(\zeta_2)\zeta_1^j$, 其中 $\zeta_1, \zeta_2\in T, a_i(\zeta_2), b_j(\zeta_2)\in H^2(T)$. 因为

$$T_g\bar{\zeta}_1=Q\left[\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1}+b_0(\zeta_2)\bar{\zeta}_1\right]=\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1}+b_0(0)\bar{\zeta}_1,$$

又因为 $f(0)=a_0(0)=g(0)=b_0(0)=0$, 所以,

$$T_g\bar{\zeta}_1=\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1}, \quad T_fT_g\bar{\zeta}_1=f(\zeta)\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1}.$$

由对称性得

$$T_gT_f\bar{\zeta}_1=g(\zeta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i(\zeta_2)\zeta_1^{i-1},$$

即

$$f(\zeta)\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\zeta_2)\zeta_1^{j-1}=g(\zeta)\sum_{i=1}^{\infty}a_i(\zeta_2)\zeta_1^{i-1}.$$

将上式两端解析延拓到 D^2 内, 有

$$f(z)\sum_{j=1}^{\infty}b_j(z_2)z_1^{j-1}=g(z)\sum_{i=1}^{\infty}a_i(z_2)z_1^{i-1},$$

上式两端同时乘以 z_1 得

$$f(z) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j = g(z) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i,$$

即

$$f(z)[g(z) - b_0(z_2)] = g(z)[f(z) - a_0(z_2)].$$

这样,

$$f(z)b_0(z_2) = g(z)a_0(z_2).$$

如果 $b_0(z_2) \neq 0$, 由题设 $g(z) \neq 0$, 就有

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0(z_2)}{b_0(z_2)},$$

即 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 关于 z_1 是常数. 若 $b_0(z_2) \equiv 0$, 则 $a_0(z_2) \equiv 0$, 于是,

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i, \quad g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j.$$

因为

$$T_g \bar{\zeta}_1^2 = \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + Q[b_1(\zeta_2) \bar{\zeta}_1] = \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \bar{\zeta}_1,$$

所以,

$$T_f T_g \bar{\zeta}_1^2 = f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) Q(f \bar{\zeta}_1) = f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1}.$$

由对称性得

$$T_g T_f \bar{\zeta}_1^2 = g \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1}.$$

所以,

$$f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} = g \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1}.$$

上式两端同时乘以 ζ_1^2 得

$$f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j + b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i \zeta_1 = g \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i + a_1(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j \zeta_1,$$

将上式两端解析延拓到 D^2 内, 即

$$f \sum_{j=2}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j + b_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i z_1 = g \sum_{i=2}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i + a_1(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j z_1,$$

即

$$f(z)[g(z) - b_1(z_2)z_1] + b_1(0)z_1f(z) = g(z)[f(z) - a_1(z_2)z_1] + a_1(0)z_1g(z).$$

所以,

$$[b_1(z_2) - b_1(0)]f(z) = [a_1(z_2) - a_1(0)]g(z).$$

如果 $b_1(z_2) - b_1(0) \neq 0$, 那么

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_1(z_2) - a_1(0)}{b_1(z_2) - b_1(0)},$$

即 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 关于 z_1 是常数. 若 $b_1(z_2) - b_1(0) \equiv 0$, 则 $a_1(z_2) - a_1(0) \equiv 0$. 如果 $b_2(z_2) \neq b_2(0)$, 那么

$$T_g \bar{\zeta}_1^3 = \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + Q \sum_{j=1}^2 b_j(\zeta_2) \bar{\zeta}_1^{3-j} = \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) \bar{\zeta}_1 + b_1(0) \bar{\zeta}_1^2.$$

所以,

$$\begin{aligned} T_f T_g \bar{\zeta}_1^3 &= f(\zeta) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) Q(f \bar{\zeta}_1) + b_1(0) Q(f \bar{\zeta}_1^2) \\ &= f(\zeta) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + b_1(0) \left[\sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \bar{\zeta}_1 \right]. \end{aligned}$$

由对称性得

$$T_g T_f \bar{\zeta}_1^3 = g(\zeta) \sum_{i=3}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-3} + a_2(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1} + a_1(0) \left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \bar{\zeta}_1 \right].$$

所以,

$$\begin{aligned} &f(\zeta) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + b_1(0) \left[\sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &= g(\zeta) \sum_{i=3}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-3} + a_2(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1} + a_1(0) \left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \bar{\zeta}_1 \right], \end{aligned}$$

上式两端的解析部分相等,

$$\begin{aligned} &f(\zeta) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) f(\zeta) \bar{\zeta}_1 + b_1(0) \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} \\ &= g(\zeta) \sum_{i=3}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-3} + a_2(0) g(\zeta) \bar{\zeta}_1 + a_1(0) \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2}. \end{aligned}$$

上式两端同时乘以 ζ_1^3 得

$$f(\zeta) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j + b_2(0) f(\zeta) \zeta_1^2 + b_1(0) \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i \zeta_1$$

$$= g(\zeta) \sum_{i=3}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i + a_2(0) g(\zeta) \zeta_1^2 + a_1(0) \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j \zeta_1,$$

将上式两端解析延拓到 D^2 内, 即

$$\begin{aligned} & f(z) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j + b_2(0) f(z) z_1^2 + b_1(0) \sum_{i=2}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i z_1 \\ &= g(z) \sum_{i=3}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i + a_2(0) g(z) z_1^2 + a_1(0) \sum_{j=2}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j z_1, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & f(z)[g(z) - b_2(z_2) z_1^2 - b_1(0) z_1] + b_2(0) f(z) z_1^2 + b_1(0) z_1 [f(z) - a_1(0) z_1] \\ &= g(z)[f(z) - a_2(z_2) z_1^2 - a_1(0) z_1] + a_2(0) g(z) z_1^2 + a_1(0) z_1 [g(z) - b_1(0) z_1]. \end{aligned}$$

化简之后得

$$-b_2(z_2) z_1^2 f(z) + b_2(0) f(z) z_1^2 = -a_2(z_2) z_1^2 g(z) + a_2(0) g(z) z_1^2.$$

所以,

$$f(z)[b_2(z_2) - b_2(0)] = g(z)[a_2(z_2) - a_2(0)].$$

因为 $b_2(z_2) - b_2(0) \not\equiv 0$, 所以,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_2(z_2) - a_2(0)}{b_2(z_2) - b_2(0)},$$

即 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 关于 z_1 是常数. 若 $b_2(z_2) - b_2(0) \equiv 0$, 则 $a_2(z_2) - a_2(0) \equiv 0$. 如果 $b_3(z_2) \not\equiv b_3(0)$, 那么

$$\begin{aligned} T_g \bar{\zeta}_1^4 &= \sum_{j=4}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-4} + Q \sum_{j=1}^3 b_j(\zeta_2) \bar{\zeta}_1^{4-j} \\ &= \sum_{j=4}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-4} + b_3(0) \bar{\zeta}_1 + b_2(0) \bar{\zeta}_1^2 + b_1(0) \bar{\zeta}_1^3. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} T_f T_g \bar{\zeta}_1^4 &= f(\zeta) \sum_{j=4}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-4} + b_3(0) Q(f \bar{\zeta}_1) + b_2(0) Q(f \bar{\zeta}_1^2) + b_1(0) Q(f \bar{\zeta}_1^3) \\ &= f(\zeta) \sum_{j=4}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-4} + b_3(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + b_2(0) \left[\sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &\quad + b_1(0) \left[\sum_{i=3}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-3} + a_2(0) \bar{\zeta}_1 + a_1(0) \bar{\zeta}_1^2 \right], \end{aligned}$$

由对称性得

$$T_g T_f \bar{\zeta}_1^4 = g(\zeta) \sum_{i=4}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-4} + a_3(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1} + a_2(0) \left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \bar{\zeta}_1 \right]$$

$$+ a_1(0) \left[\sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) \bar{\zeta}_1 + b_1(0) \bar{\zeta}_1^2 \right].$$

所以,

$$\begin{aligned} & f(\zeta) \sum_{j=4}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-4} + b_3(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + b_2(0) \left[\sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\ & + b_1(0) \left[\sum_{i=3}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-3} + a_2(0) \bar{\zeta}_1 + a_1(0) \bar{\zeta}_1^2 \right] \\ & = g(\zeta) \sum_{i=4}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-4} + a_3(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1} + a_2(0) \left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\ & + a_1(0) \left[\sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-3} + b_2(0) \bar{\zeta}_1 + b_1(0) \bar{\zeta}_1^2 \right]. \end{aligned}$$

根据解析部分相等, 得到解析部分的等式. 在这个解析部分等式的两端同时乘以 ζ_1^4 得

$$\begin{aligned} & f(\zeta) \sum_{j=4}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j + b_3(0) f(\zeta) \zeta_1^3 + b_2(0) \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i \zeta_1^2 + b_1(0) \sum_{i=3}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i \zeta_1 \\ & = g(\zeta) \sum_{i=4}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i + a_3(0) g(\zeta) \zeta_1^3 + a_2(0) \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j \zeta_1^2 + a_1(0) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j \zeta_1, \end{aligned}$$

同样延拓到 D^2 内, 有

$$\begin{aligned} & f(z) \sum_{j=4}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j + b_3(0) f(z) z_1^3 + b_2(0) \sum_{i=2}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i z_1^2 + b_1(0) \sum_{i=3}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i z_1 \\ & = g(z) \sum_{i=4}^{\infty} a_i(z_2) z_1^i + a_3(0) g(z) z_1^3 + a_2(0) \sum_{j=2}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j z_1^2 + a_1(0) \sum_{j=3}^{\infty} b_j(z_2) z_1^j z_1, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & f(z) [g(z) - b_3(z_2) z_1^3 - b_2(0) z_1^2 - b_1(0) z_1] + b_3(0) f(z) z_1^3 + b_2(0) z_1^2 [f(z) - a_1(0) z_1] \\ & + b_1(0) z_1 [f(z) - a_2(0) z_1^2 - a_1(0) z_1] \\ & = g(z) [f(z) - a_3(z_2) z_1^3 - a_2(0) z_1^2 - a_1(0) z_1] + a_3(0) g(z) z_1^3 + a_2(0) z_1^2 [g(z) - b_1(0) z_1] \\ & + a_1(0) z_1 [g(z) - b_2(0) z_1^2 - b_1(0) z_1]. \end{aligned}$$

化简之后得

$$-b_3(z_2) z_1^3 f(z) + b_3(0) f(z) z_1^3 = -a_3(z_2) z_1^3 g(z) + a_3(0) g(z) z_1^3.$$

所以,

$$f(z) [b_3(z_2) - b_3(0)] = g(z) [a_3(z_2) - a_3(0)].$$

因为 $b_3(z_2) - b_3(0) \neq 0$, 所以,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_3(z_2) - a_3(0)}{b_3(z_2) - b_3(0)},$$

即 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 关于 z_1 是常数. 若 $b_3(z_2) - b_3(0) \equiv 0$, 则 $a_3(z_2) - a_3(0) \equiv 0$. 因为

$$\partial_2 g = \sum_{j=1}^{\infty} \partial_2 b_j(\zeta_2) \zeta_1^j \neq 0,$$

所以, 必然存在 $i_0 \geq 1$, 使 $\partial_2 b_{i_0}(\zeta_2) \neq 0$, 即 $b_{i_0}(\zeta_2) \neq b_{i_0}(0)$. 设 i_0 是使得 $b_{i_0}(\zeta_2) \neq b_{i_0}(0)$ 的最小正整数, 则

$$\begin{aligned} b_1(z_2) &\equiv b_1(0), b_2(0), \dots, b_{i_0-1}(z_2) \equiv b_{i_0-1}(0), \\ a_1(z_2) &\equiv a_1(0), a_2(0), \dots, a_{i_0-1}(z_2) \equiv a_{i_0-1}(0). \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} T_g \bar{\zeta}_1^{i_0+1} &= \sum_{j=i_0+1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-i_0-1} + Q \sum_{j=1}^{i_0} b_j(\zeta_2) \bar{\zeta}_1^{i_0+1-j} \\ &= \sum_{j=i_0+1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-i_0-1} + b_{i_0}(0) \bar{\zeta}_1 + b_{i_0-1}(0) \bar{\zeta}_1^2 + \dots + b_1(0) \bar{\zeta}_1^{i_0}, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} T_f T_g \bar{\zeta}_1^{i_0+1} &= f(\zeta) \sum_{j=i_0+1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-i_0-1} + b_{i_0}(0) Q(f \bar{\zeta}_1) + b_{i_0-1}(0) Q(f \bar{\zeta}_1^2) + \dots + b_1(0) Q(f \bar{\zeta}_1^{i_0}) \\ &= f(\zeta) \sum_{j=i_0+1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-i_0-1} + b_{i_0-1}(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + b_{i_0-1}(0) \left[\sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &\quad + \dots + b_1(0) \left[\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-i_0} + a_{i_0-1}(0) \bar{\zeta}_1 + \dots + a_1(0) \bar{\zeta}_1^{i_0-1} \right], \end{aligned}$$

由对称性得

$$\begin{aligned} f(\zeta) \sum_{j=i_0+1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-i_0-1} &+ b_{i_0-1}(0) \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-1} + b_{i_0-1}(0) \left[\sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-2} + a_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &+ \dots + b_1(0) \left[\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-i_0} + a_{i_0-1}(0) \bar{\zeta}_1 + \dots + a_1(0) \bar{\zeta}_1^{i_0-1} \right] \\ &= g(\zeta) \sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^{i-i_0-1} + a_{i_0-1}(0) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1} + a_{i_0-1}(0) \left[\sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-2} + b_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] \\ &\quad + \dots + a_1(0) \left[\sum_{j=i_0}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-i_0} + b_{i_0-1}(0) \bar{\zeta}_1 + \dots + b_1(0) \bar{\zeta}_1^{i_0-1} \right]. \end{aligned}$$

根据解析部分相等, 得到解析部分的等式, 在这个解析部分等式的两端同时乘以 $\zeta_1^{i_0+1}$ 得

$$\begin{aligned} f(\zeta) \sum_{j=i_0+1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j &+ b_{i_0}(0) f(\zeta) \zeta_1^{i_0} + b_{i_0-1}(0) \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i \zeta_1^{i_0-1} + \dots + b_1(0) \zeta_1 \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i \\ &= g(\zeta) \sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_i(\zeta_2) \zeta_1^i + a_{i_0}(0) g(\zeta) \zeta_1^{i_0} + a_{i_0-1}(0) \sum_{j=2}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j \zeta_1^{i_0-1} + \dots + a_1(0) \zeta_1 \sum_{j=i_0}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^j, \end{aligned}$$

将其解析延拓到 D^2 内, 即

$$\begin{aligned} f(z) & \sum_{j=i_0+1}^{\infty} b_j(z_2)z_1^j + b_{i_0}(0)f(z)z_1^{i_0} + b_{i_0-1}(0)\sum_{i=2}^{\infty} a_i(z_2)z_1^i z_1^{i_0-1} + \cdots + b_1(0)z_1 \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i(z_2)z_1^i \\ & = g(z) \sum_{i=i_0+1}^{\infty} a_i(z_2)z_1^i + a_{i_0}(0)g(z)z_1^{i_0} + a_{i_0-1}(0)\sum_{j=2}^{\infty} b_j(z_2)z_1^j z_1^{i_0-1} + \cdots + a_1(0)z_1 \sum_{j=i_0}^{\infty} b_j(z_2)z_1^j, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & f(z)[g(z) - b_{i_0}(z_2)z_1^{i_0} - b_{i_0-1}(0)z_1^{i_0-1} - \cdots - b_1(0)z_1] + b_{i_0}(0)f(z)z_1^{i_0} + b_{i_0-1}(0)z_1^{i_0-1}[f(z) - a_1(0)z_1] \\ & + \cdots + b_1(0)z_1[f(z) - a_{i_0-1}(0)z_1^{i_0-1} - \cdots - a_1(0)z_1] \\ & = g(z)[f(z) - a_{i_0}(z_2)z_1^{i_0} - a_{i_0-1}(0)z_1^{i_0-1} - \cdots - a_1(0)z_1] + a_{i_0}(0)g(z)z_1^{i_0} + a_{i_0-1}(0)z_1^{i_0-1} \\ & \quad \times [g(z) - b_1(0)z_1] + \cdots + a_1(0)z_1[g(z) - b_{i_0-1}(0)z_1^{i_0-1} - \cdots - b_1(0)z_1]. \end{aligned}$$

化简之后得

$$-b_{i_0}(z_2)z_1^{i_0}f(z) + b_{i_0}(0)f(z)z_1^{i_0} = -a_{i_0}(z_2)z_1^{i_0}g(z) + a_{i_0}(0)g(z)z_1^{i_0}.$$

所以,

$$f(z)[b_{i_0}(z_2) - b_{i_0}(0)] = g(z)[a_{i_0}(z_2) - a_{i_0}(0)].$$

因为 $b_{i_0}(z_2) - b_{i_0}(0) \neq 0$, 所以,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_{i_0}(z_2) - a_{i_0}(0)}{b_{i_0}(z_2) - b_{i_0}(0)},$$

即 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 关于 z_1 是常数.

用同样的方法将 $\bar{\zeta}_2^1$ 作用于方程 $T_f T_g = T_g T_f$ 的两端, 可得 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 关于 z_2 是常数. 所以, $\frac{f(z)}{g(z)} = C$ 是一个常数, 即 $f(z) = Cg(z)$.

情形 2 $\partial_1 f \neq 0, \partial_2 f \neq 0, \partial_1 g \neq 0, \partial_2 g \neq 0$. 令 $f_1 = f - f(0), g_1 = g - g(0)$, 所以, $\partial_1 f_1 \neq 0, \partial_2 f_1 \neq 0, \partial_1 g_1 \neq 0, \partial_2 g_1 \neq 0, f_1(0) = g_1(0) = 0$.

由情形 1, $f_1(z) = C_1 g_1(z)$, 所以, $f(z) - f(0) = C_1[g(z) - g(0)]$, 即 $f(z) - C_1 g(z) = f(0) - C_1 g(0)$. 令 $a = 0, b = -C_1, C = f(0) - C_1 g(0)$, 所以, $af + bg = C$.

情形 3 4 个偏导数 $\partial_i f, \partial_i g$ 中只有一个恒等于零, 例如 $\partial_1 f \equiv 0, \partial_2 f \neq 0$, 即 $f = f(z_2), \partial_1 g \neq 0, \partial_2 g \neq 0$.

令 $f_1 = f - f(0)$. 由 $T_f T_g = T_g T_f$ 可以推出 $T_{f_1} T_g = T_g T_{f_1}$. 容易看到 $T_g T_{f_1} \bar{\zeta}_1 = 0$,

$$T_{f_1} T_g \bar{\zeta}_1 = Q f_1 Q g \bar{\zeta}_1 = Q f_1 \left[\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1} + b_1(0) \bar{\zeta}_1 \right] = f_1 \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\zeta_2) \zeta_1^{j-1} \neq 0,$$

这样 $T_{f_1} T_g \neq T_g T_{f_1}$, 矛盾. 所以, 当 $T_f T_g = T_g T_f$ 时, 情形 3 不会发生.

情形 4 f 和 g 是两个不同变量的单变量函数, 例如 $\partial_1 f \equiv 0, \partial_2 f \neq 0, \partial_1 g \neq 0, \partial_2 g \equiv 0$, 即 $f = f(\zeta_2), g = g(\zeta_1)$.

令 $g_1 = g - g(0)$, 则由 $T_f T_g = T_g T_f$ 推出 $T_f T_{g_1} = T_{g_1} T_f$. 那么 $T_f T_{g_1} \bar{\zeta}_2 = 0$, 但 $T_g T_f \bar{\zeta}_2 \neq 0$, 矛盾, 所以, 此种情形也不会发生.

情形 5 $\partial_1 f \equiv 0, \partial_2 f \neq 0, \partial_1 g \equiv 0, \partial_2 g \neq 0$, 或 $\partial_1 f \neq 0, \partial_2 f \equiv 0, \partial_1 g \neq 0, \partial_2 g \equiv 0$.

由定理 2.1 知, $T_f T_g = T_{fg} = T_g T_f$. 所以, 情形 5 是可以发生的. 综合上述, 当 $T_f T_g = T_g T_f$ 时, 必然成立情形 1 或 2 或 5, 即条件 (1) 或 (2) 或 (3) 必然成立. 证毕. $\square$

4 问题 3 的讨论

下面的定理 4.1 的结果与解析 Hardy 空间及解析 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质不同, 但与调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质是一样的.

定理 4.1 设 f, g 在 D^2 上有界解析, 则下列条件等价:

- (1) $T_f T_{\bar{g}} = T_{\bar{g}} T_f$;
- (2) $T_{f\bar{g}} = T_{\bar{g}} T_f$;
- (3) $T_{f\bar{g}} = T_f T_{\bar{g}}$.

由于 Ding 在文献 [6, 定理 3.1] 中的证明完全可以照搬到这里, 故定理 4.1 的证明从略.

下面的定理 4.2 的结果显示出重调和 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子与重调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子的性质有很大的差异.

定理 4.2 若函数 $f = f(\zeta_1)$ 和 $g = g(\zeta_2)$ 都是单位圆盘上的有界解析函数, 则 $T_f T_{\bar{g}} = T_{f\bar{g}}$.

证明 由于 $T_f T_{\bar{g}} = T_{f\bar{g}}$ 等价于 $T_{f-f(0)} T_{\overline{g-g(0)}} = T_{[f-f(0)][\overline{g-g(0)}]}$, 故不失一般性, 可以假设 $f(0) = g(0) = 0$. 我们将 g 表示成幂级数形式 $g(\zeta_2) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \zeta_2^i$. 则对于整数 $m \geq 0$ 及 $l \geq 0$, 有

$$T_{f(\zeta_1)} T_{\bar{g}(\zeta_2)} \zeta_1^m \zeta_2^l = QfQ \left\{ \sum_{i=0}^l \bar{b}_i \zeta_2^{l-i} \zeta_1^m + \sum_{i=l+1}^{\infty} \bar{b}_i \zeta_2^{i-l} \zeta_1^m \right\} = f \sum_{i=0}^l \bar{b}_i \zeta_2^{l-i} \zeta_1^m.$$

因为 $Qf(\zeta_1) \sum_{i=l+1}^{\infty} \bar{b}_i \zeta_2^{i-l} \zeta_1^m = 0$. 而对于 $r \in \overline{H^2(T^2)}$, 显然成立 $T_f T_{\bar{g}} r = Qf\bar{g}r = T_{f\bar{g}}r$. 因此, $T_f T_{\bar{g}} = T_{f\bar{g}}$. 证毕. $\square$

虽然我们目前还不能彻底解决问题 3, 但我们可以猜想问题 3 的结论应该是如下形式.

猜想 设 f, g 是 D^2 上的有界解析函数, 则 $T_f T_{\bar{g}} = T_{f\bar{g}}$ 的充分必要条件是下列条件之一成立:

- (1) f 或者 g 是常数;
- (2) $f = f(\zeta_1)$ 且 $g = g(\zeta_2)$;
- (3) $f = f(\zeta_2)$ 且 $g = g(\zeta_1)$.

致谢 衷心感谢审稿人的宝贵意见.

参考文献

- 1 Axler S, Bourdon P, Ramey W. Harmonic Function Theory. New York: Springer-Verlag, 1992
- 2 Axler S, Conway J B, McDonald G. Toeplitz operators on Bergman spaces. Canad J Math, 1982, 34: 466–483
- 3 Brown A, Halmos P R. Algebraic properties of Toeplitz operators. J Reine Angew Math, 2009, 1963: 89–102
- 4 Douglas R G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory. New York: Academic Press, 1972
- 5 Choe B R, Lee Y J. Commutants of analytic Toeplitz operators on the harmonic Bergman space. Integral Equations Operator Theory, 2004, 50: 559–564
- 6 Ding X. A question of Toeplitz operators on the harmonic Bergman space. J Math Anal Appl, 2008, 344: 367–372

- 7 Choe B R, Lee Y J. Commuting Toeplitz operators on the harmonic Bergman space. *Michigan Math J*, 1999, 46: 163–174
- 8 Choe B R, Nam K S. Note on commuting Toeplitz operators on the pluriharmonic Bergman space. *J Korean Math Soc*, 2006, 43: 259–269
- 9 Choi E S. Positive Toeplitz operators on pluriharmonic Bergman space. *J Korean Math Soc*, 2007, 47: 247–267
- 10 Guo K, Zheng D. Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space. *J Math Anal Appl*, 2002, 276: 213–230
- 11 Jovović M. Compact Hankel operators on the harmonic Bergman spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 1995, 22: 295–304
- 12 Lee Y J, Zhu K. Some differential and integral equations with applications to Toeplitz operators. *Integral Equations Operator Theory*, 2002, 44: 466–479
- 13 Lee Y J. Commuting Toeplitz operators on the pluriharmonic Bergman space. *Czechoslovak Math J*, 2004, 54: 535–544
- 14 Miao J. Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 1997, 27: 426–438

Toeplitz operators on the pluriharmonic Hardy space

LIU Yuan & DING XuanHao

Abstract Corresponding to harmonic Bergman space, in this paper we study Toeplitz operators of pluriharmonic Hardy space. We find the properties of Toeplitz operators on $h^2(D^2)$ are greatly different from the classical Hardy space, Bergman space and harmonic Bergman space. For example, two analytic Toeplitz operators maybe not semi-commute or commute. Even if it is semi-commute, neither of both symbols is constant; Even if it is commute, their symbols' nontrivial linear combination may be not constant. We obtain the necessary and sufficient condition of two analytic Toeplitz operators semi-commute and commute on $h^2(D^2)$.

Keywords pluriharmonic Hardy space, Toeplitz operator, commutator, bidisk

MSC(2010) 47B35, 31B05

doi: 10.1360/012012-292