论 文

字典乘积网络的支撑树计数

李峰^{①③}, 徐宗本^{①③*}, 赵海兴^②, 王卫^{①③}^① 西安交通大学信息与系统科学研究所, 西安 710049^② 青海师范大学计算机学院, 西宁 810008^③ 西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室, 西安 710049

* 通信作者. E-mail: zbxu@mail.xjtu.edu.cn

收稿日期: 2012-02-29; 接受日期: 2012-05-13

国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2007CB311002) 和国家自然科学基金 (批准号: 70531030) 资助项目

摘要 支撑树个数是边失效下网络可靠性分析与设计的一个重要性能参考指标, 本文利用字典乘积的方法来构建网络, 通过这种方法我们很容易由若干特定规模较小网络来构建规模较大的网络, 并得到它的一个紧的支撑树计数解析公式, 这样的计数公式仅仅依赖于小网络的性能参数, 如: 结点的度数、小网络的阶数、小网络的支撑树数目.

关键词 图 网络 支撑树 字典乘积 Laplacian 矩阵

1 引言

网络就是一个系统中元件之间的连接模式, 拓扑上讲, 系统的互连网络逻辑上指定了该系统中所有元件之间的连接方式, 显然, 互连网络可以用图来表示^[1]. 图的顶点表示系统中的元件, 图的边表示元件之间的物理连线, 其中边分为有向和无向两种, 利用关联函数规定元件之间的连接方式, 这样的图称为互连网络拓扑结构, 因此, 图和互连网络从拓扑结构上讲是一回事. 因此许多学者, 如文献[2~5]的作者用图的理论去刻画互连网络的性能及设计方法. 在以后的叙述中, 我们将混淆“图”与“互连网络”的概念.

现实世界的许多网络, 如计算机网络和通讯网络等, 都会由于网络的通讯线路或站点出现故障, 而导致网络的功能降低, 甚至整个网络失效. 因此分析已有网络的可靠性具有重要的理论意义和应用价值. 人们在实践中发现网络的拓扑结构的一些重要性质能够在某种程度上衡量一个网络的性能如何, 网络的可靠性便是其中的一个重要性能指标.

网络容错性分为概率性度量和确定性度量两种情况, 由于通讯网络线路或站点出现故障在一般情况下是随机发生的, 因而网络容错性的概率性度量比确定性度量更能模拟实际情况. 本文考虑的是网络概率性度量, 它更能实际反映网络系统的运行情况, 文献[2, 3, 6, 7]给出了关于这方面的理论知识的详细描述.

所谓网络的可靠性是指网络拓扑为网络部件在随机故障的环境下工作提供合适连接的能力, 网络的“合适连接”通常是指网络的某些连通性质. 其具体模型分为3种: 首先点可靠而边以随机概率失效, 称为边失效下网络可靠性; 其次是边可靠而点以随机概率失效, 称为点失效下网络可靠性; 最后是

引用格式: 李峰, 徐宗本, 赵海兴, 等. 字典乘积网络的支撑树计数. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 949-959, doi: 10.1360/112010-1050

点边都以随机概率失效的混合网络可靠性分析. 本文主要考虑的是边失效下网络可靠性分析, 文献 [3] 中有更详细的叙述.

对于主要关注“随机故障”的网络可靠性来说, 网络的基本数学模型是概率图 $G(V, E)$, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是顶点集, 用 n 表示 G 的阶, 即 $n = |V|$; 相应地 E 是边集, 用 e 表示 G 的边数, 即 $|E| = e$; 且每个顶点和边都有处于工作状态的概率. 为了使这个模型在数学上更便于处理, 进一步假设:

- 1) G 中各边处于工作状态的概率都等于同一常数 p , $0 \leq p \leq 1$.
- 2) 各边都处于工作状态的概率在统计上是相互独立的.
- 3) 由于假定每个顶点完全可靠, 每一条边处于工作状态的概率为 p ($0 \leq p \leq 1$), 称为边可靠率; 那么每条边处于不工作状态的概率为 $q = 1 - p$, 称为边故障率.

从上述假设得到网络可靠性的常用模型: 假设表示网络拓扑的 n 点 e 边的简单无向图 $G = (V, E)$ 的每个点完全可靠, 而其边有正常工作与失效两种状态, 各边失效是相互独立的且具有相同的概率 q ($0 \leq q \leq 1$), 则由边失效导致某两点不能通讯的概率为

$$P_e(G, q) = \sum_{i=1}^e m_i(G) q^i (1-q)^{e-i},$$

其中 $m_i(G)$ 表示图 G 中具有 i 条边的分割集个数, 称 $P_e(G, q)$ 为图 G 的边故障多项式, 或边失效情况下网络 G 的不可靠性多项式, 关于这方面的系统理论见文献 [7 ~ 10].

若用 $R_e(G, p)$ 表示网络 G 在边失效情况下的网络可靠性多项式, 根据每条边要么可靠要么不可靠两种情况, 则有 $R_e(G, p) = 1 - P_e(G, q)$. 假定在边集 e 中任取 i 条边不能将图 G 割断, 相应地剩下的 $e - i$ 条边为连通的, 由此推得边失效情况下网络 G 连通的可靠性多项式

$$R_e(G, p) = \sum_{i=n-1}^e N_i(G) (1-q)^i q^{e-i},$$

其中 $N_i(G)$ 表示表示图 G 中具有 i 条边的连通生成子图的个数.

显然 $N_{n-1}(G)$ 表示图 G 中具有 $n - 1$ 条边的连通生成子图的个数, 即生成树的数目. 用 $t(G)$ 表示图 G 的生成树数目, 不难看出当 $q \rightarrow 1$ 时, 若 $t(G) \geq t(G')$, 则有 $R_e(G, p) \geq R_e(G', p)$. 由此可见, 在边失效下网络可靠性分析与设计中, 求给定图的支撑树数目是非常重要和必要的, 如: 圈二次方图 [11], 多星连接图 [12], 门槛图 [13], 笛卡尔乘积图 [9, 14], 循环图 [15], 这些都是重要的互连网络的拓扑模型. 近年出现了很多关于图的支撑树计数方面的结果, 有兴趣的读者可参阅文献 [2, 16 ~ 24]. 但不是每个图都能给出确切的支撑树计数公式, 文献 [25, 26] 通过刻画图的度序列性质, 给出了各自文章中图的支撑树计数的一个上界.

2 字典乘积网络设计

所谓互连网络拓扑的设计实质就是构造满足给定要求的网络. 如何利用现有的小网络来构建规模较大的网络, 而且要求得到的大网络具有好的性能, 是网络可靠性分析与设计的根本出发点. 最常用的是 Cartesian 乘积方法, 它为网络的设计、分析和改进提供了一类很重要的图论模型, 关于这方面的研究已取得了成熟的理论体系, 见文献 [8, 10, 14, 27 ~ 29].

本文将考虑这样的网络设计方法: 字典乘积, 两个图的字典乘积, 记为 $G_1[G_2]$, 是以 $V(G_1 \times G_2) = \{(u_i, v_j) | u_i \in V(G_1), v_j \in V(G_2)\}$ 为顶点集, 而任意两个顶点 (v_i, u_j) 与 (v_k, u_l) 相连, 当且仅当 v_i 连接 v_k 或 $v_i = v_k$ 时 u_j 连接 u_l . 这种方法构造的网络包含特定的小网络作为它的子网络, 而且保留这些小网络的许多好性质, 比如, 正则性、连通性、点可迁性、Euler 性、Hamilton 性等 [30]. 由于字典乘积不满足交换律, 不同的乘积序得到不同拓扑结构的图, 见文献 [1, 8 ~ 10, 14, 22].

关于图的支撑树计数的研究, 一般的方法是 Cayley 在文献 [31] 中提出的方法, 即通过刻画图的支撑树和它的边删除及边收缩子图的支撑树数目的关系, 也就是反复运用 $t(G)$ 与 $t(G-x)$, $t(G/x)$ 的关系来计算的, 这种方法对于具有某种特性的图能很容易导出它的支撑树数目, 如边对称图. 在某种意义上讲, 这是由“大”到“小”的过程, 对于阶数特别大且无规则的一般图来说是很难计算出它的支撑树数目. 还有一种方法是通过直接计算该图的特征值来实现的. 对于阶数较小的图是可以的, 但对于阶数很大的图是很难实现的. 文献 [32] 采用逆向思维的方式, 通过分析一般特征多项式去刻画一个图, 这种思想对于研究图与特征值之间的关系有重要的理论研究价值. 但到目前为止, 还不能精确刻画由两个小图的特征值在合成或乘积后来表示所得到的大图特征值. 怎样用已有规模较小的网络来构建规模较大的网络, 且使之具有好的性能, 是一个具有理论研究价值和实际应用价值的问题.

按照字典乘积的方法, 能方便地用若干规模较小的网络来构建规模较大的网络, 且所得大网络的特征值完全由小网络的拓扑结构参数来刻画. 因而实现由“小”图来推出“大”图的支撑树数目的公式, 因为按照这种构建方法, 字典乘积图 $G_1[G_2]$ 的特征值与因子图 G_1, G_2 的特征值之间存在某种关系, 再通过支撑树数目与特征值之间的关系, 就可以给出 $t(G_1[G_2])$ 的公式, 从而达到由小的因子图 G_1, G_2 的支撑树个数推出大图 $G_1[G_2]$ 的支撑数计数公式. 用此方法得到本文的主要结果, 即给出字典乘积图 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的紧的支撑树计数解析公式, 这样的计数公式仅仅依赖于小网络的参数, 如: 结点的度数、小网络的阶数、小网络的支撑树数目.

3 主要结果

这一节将给出字典乘积图 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的支撑树数目的紧的计数公式. 首先设 $L(G) = D(G) - A(G)$ 是图 G 的 Laplacian 矩阵, 其中 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 为图 G 的 $(0, 1)$ 关联矩阵, $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为图 G 的对角矩阵, d_i 表示图 G 的第 i 顶点的度数. 用 $P(G, \lambda)$ 定义为 $L(G)$ 的特征多项式, 由于 $L(G)$ 的对称性及其性质, 它的特征值都是实数. 为了不失一般性, 我们假定: $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. 对于文中没有定义而直接使用的符号和术语可参见文献 [33]. 首先给出下面定理的证明过程.

定理 1^[17] 设 n 点图 G 的 Laplacian 特征值为 $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_n(G)$, 则有

$$\prod_{i=2}^n (\lambda - \lambda_i(G)) = \begin{vmatrix} 1 & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ 1 & \lambda - d_2 & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & h_{n2} & \cdots & \lambda - d_n \end{vmatrix} := B(G, \lambda).$$

证明 图 G 的 Laplacian 特征值多项式为

$$P(G, \lambda) = \det(\lambda I_n - L(G))$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - d_1 & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & \lambda - d_2 & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & \lambda - d_n \end{vmatrix}.$$

把第 2 列至第 n 列加到第 1 列得

$$P(G, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \lambda & \lambda - d_2 & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & h_{n2} & \cdots & \lambda - d_n \end{vmatrix} = \lambda B(G, n).$$

另一方面, 由于 $\lambda_1(G) = 0$, 所以

$$P(G, \lambda) = \lambda \prod_{i=2}^n (\lambda - \lambda_i(G)).$$

比较上面两式便得此定理.

现给出图的支撑树计数公式:

定理 2^[34] 设 n 点图 G 的 Laplacian 特征值为 $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \cdots \leq \lambda_n(G)$, 则图 G 的支撑树数目

$$t(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \lambda_i(G).$$

为了使下面的定理证明过程显得清晰有条理, 本文主要采用分块矩阵形式来处理大的矩阵和行列式. 规定 J_0 表示全零矩阵, 即元素全为零, J_n 表示全 1 矩阵, 即元素全为 1.

定理 3 设 n 点图 G 的特征值为 $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \cdots \leq \lambda_n(G)$, 其度序列为 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, 则字典乘积图 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的特征值由 1 个 $\lambda_k(G)p$, 各 $s-1$ 个 $(d_k+1)p$, 各 l_i-1 个 $p(d_k+1)-l_i$, 其中 $p = \sum_{i=1}^s l_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, $k = 1, 2, \dots, n$.

证明 设图 $K_{l_1, l_2, \dots, l_s}$ 的结点标号 $u_1, u_2, \dots, u_{l_1}, \dots, u_{l_1+l_2}, \dots, u_p$, 而 n 点图 G 对应于结点标号 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 的 Laplacian 矩阵为 $L(G)$, 其中 u_j 连接 u_i 当且仅当 $i \in A_k$ 且 $j \notin A_k$, 或 $i \notin A_k$ 且 $j \in A_k$, 其中 $A_k = \{x | \sum_{i=0}^{k-1} l_i + 1 \leq x \leq \sum_{i=0}^k l_i\}$, 这里的 $l_0 = 0$, 且 $k = 1, 2, \dots, s$. 把字典乘积图 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的结点 (u_i, u_j) 按字典序作如下排列: (v_i, u_j) 在 (v_k, u_l) 之前, 当且仅当 $j \leq l$ 或者 $j = l$ 时 $i \leq k$, 设对应于上述结点序 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的 Laplacian 矩阵的分块形式为

$$L(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]) = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & \cdots & A^{1p} \\ A^{21} & A^{22} & \cdots & A^{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{p1} & A^{p2} & \cdots & A^{pp} \end{bmatrix},$$

其中分块 $A^{jl} = (a_{ik}^{jl})_{n \times n}$ 的元素 a_{ik}^{jl} 正好表示结点 (v_i, u_j) 与结点 (v_k, u_l) 的相连关系, 根据字典乘积的定义, 字典乘积图 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的结点 (v_i, u_j) 与结点 (v_k, u_l) 相连, 当且仅当 v_i 连接 v_k 或 $v_i = v_k$ 时 u_j 连接 u_l , 则有

$$a_{ik}^{jl} = \begin{cases} h_{ik}, & j = l, \quad i \neq k, \\ 0, & j \neq l, \quad i = k, \\ 1, & j \neq l, \quad i = k, \quad j \in A_k, l \notin A_k \text{ 或 } j \notin A_k, l \in A_k, \\ 0, & j \neq l, \quad i = k, \quad \text{其他}, \\ h_{ik}, & j \neq l, \quad i \neq k, \end{cases}$$

即

$$A^{jl} = \begin{cases} A(G), & j = l, \\ A(G) + I_n, & j \neq l, \quad j \in A_k, l \notin A_k \text{ 或 } j \notin A_k, l \in A_k, \\ A(G), & j \neq l, \quad \text{其他}, \end{cases}$$

由 Laplacian 矩阵的性质可知

$$D_i = \begin{cases} pD(G) + (p - l_1)I_n, & 1 \leq i \leq l_1, \\ pD(G) + (p - l_2)I_n, & l_1 + 1 \leq i \leq l_1 + l_2, \\ pD(G) + (p - l_3)I_n, & l_1 + l_2 + 1 \leq i \leq l_1 + l_2 + l_3, \\ \vdots & \vdots \\ pD(G) + (p - l_s)I_n, & \sum_{j=1}^{s-1} l_j + 1 \leq i \leq \sum_{j=1}^s l_j, \end{cases}$$

则字典乘积图 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的特征多项式为

$$P(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}], \lambda) = \det(\lambda I_{p \times p} - L(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}])) \quad (1)$$

$$= \begin{vmatrix} B_1 & V_{12} & \cdots & V_{1s} \\ V_{21} & B_2 & \cdots & V_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{s1} & V_{s2} & \cdots & B_s \end{vmatrix}_{p \times p}, \quad (2)$$

其中

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda(l_i) + A & A & \cdots & A \\ A & \lambda(l_i) + A & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A & A & \cdots & \lambda(l_i) + A \end{bmatrix}_{l_i \times l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

且

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} A + I_n & A + I_n & \cdots & A + I_n \\ A + I_n & A + I_n & \cdots & A + I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A + I_n & A + I_n & \cdots & A + I_n \end{bmatrix}_{l_i \times l_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

在 (2) 中, 按分块把每一列都加到第 1 列, 然后按分块从第 2 行起每行都减去第 1 行, 得

$$P(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}], \lambda) = \det(\lambda I_{p \times p} - L(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}])) = \begin{vmatrix} C'_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ Q_2 & C_2 & \cdots & J_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_n & J_0 & \cdots & C_s \end{vmatrix}_{p \times p},$$

其中

$$C'_1 = \begin{bmatrix} \lambda I_n - pL(G) & A & \cdots & A \\ 0 & \lambda(l_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda(l_1) \end{bmatrix}_{l_1 \times l_1}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \cdots & I_n \\ 0 & I_n & \cdots & I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & I_n & \cdots & I_n \end{bmatrix}_{l_i \times l_1}$$

且

$$P_i = \begin{bmatrix} A + I_n & A + I_n & \cdots & A + I_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{l_i \times l_i}, \quad C_i = \begin{bmatrix} \lambda'(l_i) & -I_n & \cdots & -I_n \\ -I_n & \lambda'(l_i) & \cdots & -I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -I_n & -I_n & \cdots & \lambda'(l_i) \end{bmatrix}_{l_i \times l_i}.$$

这里记 $\lambda'(l_i) = (\lambda - (p - l_i) - 1)I_n - pD(G)$, $i = 2, 3, \dots, s$. 将 C'_1, P_i, Q_i, C_i 代入上面的特征多项式, 根据行列式的性质, 得

$$P(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}], \lambda) = \det(\lambda I_n - pL(G))[\det((\lambda - (p - l_1))I_n - pD(G))]^{l_1-1} \times R, \quad (3)$$

其中 $R = T_2 \times T_3 \times \cdots \times T_s = \prod_{i=2}^s T_i$, 这里 $T_i = \det(C_i)$, 则

$$T_i = \begin{vmatrix} \lambda'(l_i) & -I_n & \cdots & -I_n \\ -I_n & \lambda'(l_i) & \cdots & -I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -I_n & -I_n & \cdots & \lambda'(l_i) \end{vmatrix}_{l_i \times l_i} \quad (4)$$

$$= \begin{vmatrix} M & -I_n & \cdots & -I_n \\ -I_n & M & \cdots & -I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -I_n & -I_n & \cdots & M \end{vmatrix}_{l_i \times l_i}, \quad (5)$$

其中 $M = (\lambda - p + l_i - 1)I_n - pD(G)$, $i = 2, 3, \dots, s$. 在 (5) 中, 按分块把每一列都加到第 1 列, 然后按分块从第 2 行起每行都减去第 1 行, 得到上三角矩阵

$$\begin{aligned} T_i &= \begin{vmatrix} M - (l_i - 1)I_n & -I_n & \cdots & -I_n \\ 0 & M + I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M + I_n \end{vmatrix}_{l_i \times l_i} \\ &= \det((\lambda - p)I_n - pD(G))(\det((\lambda - p + l_i)I_n - pD(G)))^{l_i - 1} \\ &= \prod_{k=1}^n (\lambda - p - d_k p) \cdot \prod_{k=1}^n (\lambda - p + l_i - d_k p)^{l_i - 1}. \end{aligned}$$

因而得

$$R = \prod_{i=2}^s T_i = \prod_{i=2}^s \left[\prod_{k=1}^n (\lambda - p - d_k)(\lambda - p + l_i - d_k p)^{l_i - 1} \right].$$

代入 (3) 式得

$$\begin{aligned} P(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}], \lambda) &= \det(\lambda I_n - pL(G)) \prod_{i=1}^s \prod_{k=1}^n [(\lambda - p - d_k p)(\lambda - p + l_i - d_k p)^{l_i - 1}] \\ &= \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k(G)p) \prod_{i=1}^s \prod_{k=1}^n [(\lambda - p - d_k p)(\lambda - p + l_i - d_k p)^{l_i - 1}]. \end{aligned}$$

此式蕴含着本定理结论, 定理得证.

由图的特征值和支撑树的关系, 即定理 2, 再结合定理 3, 可得下面的定理.

定理 4 设 n 点图 G 的特征值为 $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \cdots \leq \lambda_n(G)$, 其度序列为 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, 则字典乘积图 $G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的支撑树数目为

$$t(G[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]) = t(G)p^{ns-2} \prod_{i=1}^n (d_i + 1)^{s-1} \prod_{i=1}^s \prod_{k=1}^n (p - l_i + d_k p)^{l_i - 1},$$

其中 $p = \sum_{j=1}^s l_j$ 为图 $K_{l_1, l_2, \dots, l_s}$ 的阶数.

4 主要实例

本节给出一些由定理 4 直接推出且非常典型的图类的支撑树计数公式, 现罗列如下.

定理 5^[35] 完全 s 部图 $K_{l_1, l_2, \dots, l_s}$ 的支撑树数目为

$$t(K_{l_1, l_2, \dots, l_s}) = p^{s-2} \prod_{i=1}^s (p - l_i)^{l_i - 1}.$$

证明 由于 $t(K_{l_1, l_2, \dots, l_s}) = t(K_1[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}])$ 并且 $t(K_1) = 1$, 定理得证.

定理 6^[9,36] 下列 4 类图的支撑树计数公式

$$\begin{aligned} t(K_m[K_n]) &= (mn)^{mn-2}; \\ t(Q_n[K_m]) &= \frac{1}{2^n} m^{m2^n-2} (n+1)^{(m-1)2^n} \prod_{i=1}^n (2i)^{\binom{n}{i}}; \\ t(K_{p,q}[K_n]) &= n^{n(p+q)-2} q^{p-1} p^{q-1} [(q+1)^p (p+1)^q]^{n-1}; \\ t(K_m[K_{p,q}]) &= [n(p+q)]^{2n-2} \{[(p+q)(n-1) + p]^{q-1} [(p+q)(n-1) + q]^{p-1}\}^n. \end{aligned}$$

证明 由于 $t(Q_n) = \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{i=1}^n (2i)^{\binom{n}{i}}$, $d_i(K_n) = n-1$, $\lambda_i(K_n) = (0, (n-1)^{n-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$, 由定理 4 立即得到此结果.

下面我们给出一些新的图类的生成树计数公式.

定理 7 设 K_n 为 n 点的完全图, λ 是其非零的 Laplacian 特征值, d 为每个顶点的度数, 则字典乘积图 $K_n[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]$ 的支撑树计数公式为

$$t(K_n[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]) = n^{n-2} (ls)^{ns-2} n^{(s-1)n} [l(s-1 + ns - s)]^{ns(l-1)},$$

这里有 s 个 l , 且 $p = ls$.

证明 在定理 4 中, 把 G 换成 K_n , 且 $l_1 = l_2 = \dots = l_s = l$, 则得此图类的支撑树个数.

定理 8 设 C_n 为 n 点的圈, 且 P_n 为 n 点的路, 则

$$\begin{aligned} t(C_n[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]) &= n 3^{ns-n} p^{ns-2} \prod_{i=1}^s (3p - l_i)^{n(l_i-1)}. \\ t(P_n[K_{l_1, l_2, \dots, l_s}]) &= p^{ns-2} 3^{(n-2)(s-1)} 2^{2s-2} \prod_{i=1}^s [(2p - l_i)^{2l_i-2} (3p - l_i)^{l_i-1}]. \end{aligned}$$

证明 由于 $t(C_n) = n$, $d_i = 2$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $t(P_n) = 1$, 且其度序列为 $1, 2, 2, \dots, 2, 1$, 由定理 4 很容易得此结果.

根据上述定理 7 和 8, 由本文所得结果 (即定理 4), 可以推出总线网络 P_n 和环网络 C_n 与完全多部连通网络 $K_{l_1, l_2, \dots, l_s}$ 字典乘积后所得大网络的支撑树数目; 尤其是全连通网络 K_n 与完全多部网络 $K_{l_1, l_2, \dots, l_s}$ 字典乘积后, 所得到的大网络的支撑树数目. 通过支撑树个数来分析这几类重要网络模型的可靠性程度, 这在网络的嵌入性问题, 系统的容错性 (可靠性) 方面具有重要的理论和应用价值 [2, 7, 17].

5 结论

本文利用组合优化和网络设计的方法, 给出了任意一个图 G 与完全多部图 $K_{l_1, l_2, \dots, l_s}$ 的字典乘积的一个紧的支撑树计数公式, 用这种方法可以简化许多图类支撑树数目公式的推导过程, 同时还能得到一些新的图类的支撑数计数的解析公式, 到目前为止, 关于已得到的字典乘积图的支撑树计数方面的结果都包含在本文的结果之中, 也就是说本文结果的特例, 见文献 [9, 35, 36]. 由于两个图的字典乘积不满足交换律, 因而对于字典乘积图 $K_{l_1, l_2, \dots, l_s}[G]$, 还得不到关于 $t(K_{l_1, l_2, \dots, l_s}[G])$ 的一个紧的支撑树计数公式. 对于任意两个图 G_1 与 G_2 的字典乘积图 $G_1[G_2]$, 还有更多的工作要做, 接下来将通过

进一步刻画字典乘积图的拓扑结构参数和 Laplacian 特征值之间的关系, 用新的组合理论和网络设计方法来解决.

由于图的支撑树个数是衡量网络可靠性的一个重要指标. 本文通过字典乘积分析, 将大网络的支撑树计数问题转化为计算已知小网络的支撑树数目, 从而允许我们通过已有小网络的可靠性来分析构建后的大网络的可靠性. 因此只要知道小网络的拓扑结构和性能参数, 就能知道构建后的大网络的拓扑结构和性能参数. 通过改动局部网络的拓扑结构参数, 达到优化大网络性能的目的.

参考文献

- 1 Biggs N. Algebraic Graph Theory. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- 2 Boesch F, Suffel C. A survey of the algebraic approach to the study of spanning trees. Stevens Research Reports in Math 8401. 1984
- 3 Boesch F, Li X, Suffel C. On the existence of uniformly most reliable networks. Networks, 1991, 21: 181–194
- 4 Chung F, Coffman E G, Reiman M I, et al. The forwarding index of communication networks. IEEE Trans Inf Theory, 1987, 33: 224–232
- 5 Li X. Some properties of t -optimal graphs. In: Proc. of ICCAS'89, Nanjing, 1989. 736–739
- 6 Boesch F. The Cut Frequency Vector, Graph Theory with Application to Algorithms and Computer Science. New York: Wiley, 1985. 103–121
- 7 Colbourn C J. The Combinatorics of Network Reliability. Oxford: Oxford University Press, 1987
- 8 Feder T. Stable networks and product graphs. Mem Amer Math Soc, 1995, 116: 1–89
- 9 Li X M, Huang Z J. On the number of spanning trees of graphs and applications of networks. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1999. 1–120 [李晓明, 黄振杰. 图的生成树计数及其在网络中的应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1999. 1–120]
- 10 Xu J M. Theory of Combination Networks. Beijing: Science Press, 2007. 1–170 [徐俊明. 组合网络理论. 北京: 科学出版社, 2007. 1–170]
- 11 Boesch F, Wang J F. A conjecture on the number of spanning trees in the square of a cycle. In: Notes from New York Graph Theory Day V. New York: New York Academy Sciences, 1982
- 12 Chung K L, Yan W M. On the number of spanning trees of a multi-complete/star related graphs. Inform Process Lett, 2000, 76: 113–119
- 13 Gilbert B, Kelman A K. Laplacian spectra and spanning trees of threshold graphs. Discrete Math, 1996, 65: 255–273
- 14 Imrich W, Izbicki H. Associative products of graphs. Monatsh Math, 1975, 80: 277–281
- 15 Zhang Y, Yong X, Golin M J. The number of spanning trees in circulant graphs. Discrete Appl Math, 2000, 223: 337–350
- 16 Boesch F, Prodinger H. Spanning tree formulas and chebyshev polynomials. Graph Combin, 1986, 2: 191–200
- 17 Boesch F, Prodinger H. Some remarkable tree formulas. CS Dept. Stevens Inst. of Tech, Technical Report No. 8404. 1991
- 18 Cheng C. Maximizing the total number spanning trees in a graph: two related problems in graph theory and optimization design theory. J Combin Theory (B), 1981, 31: 240–248
- 19 Chung F, Yau S T. Coverings, heat kernels and spanning trees. Electron J Combin, 1999, 6: 113–128
- 20 Gilbert B, Myrvold W. Maximizing spanning trees in almost complete graphs. Networks, 1997, 30: 23–30
- 21 Kelman A K. On graphs with the maximum number of spanning trees. Random Struct Algorithms, 1996, 9: 177–192
- 22 Li F, Peng Y, Zhao H X. On the number of spanning trees of the multi-lexicographic product of networks. Software, 2011, 7: 51–53 [李峰, 彭毅, 赵海兴. 一类多重字典乘积网络的支撑树计数. 软件, 2011, 7: 51–53]
- 23 Petingi L, Boesch F, Suffel C. On the characterization of graphs with maximum number of spanning trees. Discrete Math, 1998, 179: 155–166
- 24 Shier D. Maximizing the number of spanning trees in a graph with n nodes and m edge. J Res Nat Bur Standards, 1974, 78: 193–196

- 25 Kinkar C D. A sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph. *Graphs Combin*, 2007, 23: 625–632
- 26 Li J X, Shiu C S, Chang A. The number of spanning trees of a graph. *Appl Math Lett*, 2010, 23: 286–290
- 27 Bokal D. On the crossing numbers of Cartesian products with trees. *J Combin Theory (B)*, 2007, 97: 381–384
- 28 Imrich W, Klavžar S. *Product Graphs*. New York: Wiley, 2000
- 29 Yegnanarayanan V, Thiripurasundari P R. On some graph operations and related applications. *Electron Note Discrete Math*, 2009, 33: 123–130
- 30 Li F, Wang W, Xu Z B, et al. Some results on the lexicographic product of vertex-transitive graphs. *Appl Math Lett*, 2011, 24: 1924–1926
- 31 Cayley A. A theorem on trees. *Q J Math*, 1889, 23: 276–278
- 32 Wang W, Li F, Lu H L, et al. Graphs determined by their generalized characteristic polynomials. *Linear Algebra Appl*, 2011, 434: 1378–1387
- 33 Bondy J A, Murty U S. *Graph Theory with Application*. Amsterdam: North-Holland, 1976
- 34 Kelman A K, Chelnokov V M. A certain polynomials of a graph and graphs with an extremal number of trees. *J Combin Theory (B)*, 1974, 16: 197–214
- 35 Moon J. *Enumerating labelled trees: Graph Theory and Theoretical Physics*. New York: Academic Press, 1967. 261–272
- 36 Huang Z J, Li X M. On the number of spanning trees of some composite graphs. *Acta Math Sci*, 1995, 15: 259–268
[黄振杰, 李晓明. 关于复合图的生成树计数. *数学物理学报*, 1995, 15: 259–268]

On the number of spanning trees of the lexicographic product of networks

LI Feng^{1,3}, XU ZongBen^{1,3*}, ZHAO HaiXing² & WANG Wei^{1,3}

1 *Institute of Information and System Sciences, Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;*

2 *College of Computer Science, Qinghai Normal University, Xi'ning 810008, China;*

3 *Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

*E-mail: zbxu@mail.xjtu.edu.cn

Abstract The number of the spanning trees of a network is a very important index in the analysis and synthesis of reliable networks. Usually, it is desirable to give the formulae of the number of spanning trees for various networks, which is not only interesting in its own right but also in practice. Product graphs play a vital role not only in applied mathematics but also in computer science. Since many large networks are composed of some existing smaller networks by using, in terms of graph theory, lexicographic product, the topological invariants and some properties of such large networks are associated strongly with that of the corresponding smaller ones. The number of spanning trees of the Cartesian product of two networks has been studied extensively with more results obtained. However, few results are available for the number of spanning trees of the Lexicographic product of two networks. In this paper, we establish a closed formula for the number of spanning trees of the lexicographic product of two networks. The formula of the number of the spanning trees which depends only on the number of the vertices and the Laplacian eigenvalues of the smaller networks. The results extend some of the previous results and give new closed formulae of the number of spanning trees for some new family of graphs.

Keywords graph, network, spanning trees, lexicographic product, Laplacian matrix

LI Feng was born in Anhui Province in 1981. Currently, he is a Ph.D. candidate in School of Mathematics and Statistics at Xi'an Jiaotong University. His research interests include graph theory, analysis and design of reliable combinatorial network, the optimization theory and algorithms of interconnection networks, machine learning.

XU ZongBen was born in 1955. He received his Ph.D. degree in mathematics from Xi'an Jiaotong University in 1987. He now serves as Ph.D. Supervisor and Vice President of Xi'an Jiaotong University, the Chief Scientist of National Basic Research Program of China (973 Project), and Director of the Institute for Information and System Sciences of the university. His current research interests include non-linear functional analysis, mathematical foundation of information technology, and computational intelligence. He is an academician of Chinese Academy of Sciences and a member of the New York Academy of Sciences.

ZHAO HaiXing was born in 1969. He received his Ph.D. degree in School of Computer Science in 2004 from Northwestern Polytechnical University. He received another Ph.D. degree in faculty of mathematical sciences from University of Twente, Netherlands in 2005. Prof. Zhao is a Ph.D. Supervisor at College of Computer Science, Qinghai Normal University. His research interests include graph theory, complicated networks and clustering algorithm, security of network and information processing.

WANG Wei received the Ph.D. degree in applied mathematics in 2006 from Xi'an Jiaotong University. He is an Associate Professor in School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University. His research interests mainly include algebraic graph theory and designing and analysis of approximation algorithms to some combinatorial optimization problems arising from applications.