Steklov 特征值问题的一种有效的 Legendre-Galerkin 谱逼近

安静

贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵阳 550001

E-mail: aj154@163.com

收稿日期: 2013-10-13; 接受日期: 2014-10-22

国家自然科学基金 (批准号: 11201093)、2014 年贵州师范大学博士基金和贵州省科学技术基金 (批准号: 黔科合 LH 字 [2014] 7052 号) 资助项目

摘要 本文给出 Steklov 特征值问题基于 Legendre-Galerkin 逼近的一种有效的谱方法. 首先利用 Legendre 多项式构造了一组适当的基函数使得离散变分形式中的矩阵是稀疏的, 然后推导了 2 维及 3 维情形下离散变分形式基于张量积的矩阵形式, 由此可以快速地计算出离散的特征值和特征向量. 文章还给出了误差分析和数值试验, 数值结果表明本文提出的方法是稳定和有效的.

关键词 Steklov 特征值问题 Legendre-Galerkin 逼近 基于张量积的矩阵形式 误差估计

MSC (2010) 主题分类 65N25, 65N30

1 引言

由于 Steklov 特征值问题具有重要的物理背景和广泛的应用 (参见 [1–6]), 因此求解该问题的数值方法受到学术界越来越多的关注. 对于 Steklov 特征值问题, Andreev 和 Todorov^[7] 讨论了等参有限元法; Armentano 和 Padra^[8] 分析了有界多角形域上的线性协调有限元逼近; 在文献 [9–11] 中作者研究了非协调有限元法; 文献 [12] 和文献 [13] 分别讨论了协调和非协调有限元二网格法; Li 等人^[14] 研究了外推和超收敛; 在文献 [15] 中 Tang 等人讨论了边界元法; Bi 和 Yang^[16] 讨论了基于 Rayleigh 商迭代的多尺度离散方案; Garau 和 Morin^[17] 分析了自适应有限元法的收敛性和拟最优性; 在文献 [18] 中 Cao 等人研究了在复合介质中 Steklov 特征方程的多尺度渐近法.

特别在最近的文献 [19] 中, Zhang 等人讨论了 Steklov 特征值问题带张量积节点基的谱方法. 尽管谱方法具有高精度的特点, 但采取节点基会导致离散系统中的矩阵是满的, 由此降低计算效率, 甚至当自由度很大的时候会使得计算不稳定, 对高维问题而言这种影响尤其严重. 因此本文的目的是给出 Steklov 特征值问题基于 Legendre-Galerkin 逼近的一种有效的谱方法, 通过利用 Legendre 多项式构造一组适当的基函数使得离散变分形式中的矩阵是稀疏的, 然后推导了 2 维及 3 维情形下离散变分形式的基于张量积的矩阵形式, 由此可以快速地计算出离散的特征值和特征向量. 此外文章还给出了近似特征值的误差估计. 在数值试验中不仅给出了 2 维区域上的数值结果, 还给出相关文献中未见报导的 3 维区域上的数值结果, 这些数值结果表明了本文提出的方法是稳定和有效的.

本文第 2 节给出 Steklov 特征值问题的弱形式, 建立该问题的 Legendre-Galerkin 谱方法, 并证明近似特征值的误差估计. 第 3 节构造一组适当的基函数使得离散变分形式中的矩阵是稀疏的, 然后推

导 2 维及 3 维情形下离散变分形式基于张量积的矩阵形式. 第 4 节给出几个数值算例验证了本文提出的算法的有效性. 最后一节给出结论性注记.

本文中符号 C 表示与 N 无关的正常数, 在不同的地方可能代表不同的值. 为简单起见, 我们使用符号 $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$.

2 Steklov 特征值问题的弱形式和误差估计

令 $H^s(\Omega)$ 和 $H^s(\partial\Omega)$ 分别表示 Ω 和 $\partial\Omega$ 上的 s 阶 Soblev 空间. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, $H^0(\partial\Omega) = L^2(\partial\Omega)$. $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_{s, \partial\Omega}$ 分别表示 $H^s(\Omega)$ 和 $H^s(\partial\Omega)$ 中的范数.

本文考虑下述 Steklov 特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (或 $\mathbb{R}^3$) 是一个矩形 (或立方体) 区域, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的外法向导数.

(2.1) 的弱形式为: 求 $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in H^1(\Omega)$, $\|u\|_{0, \partial\Omega} = 1$ 使得

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (2.2)$$

其中

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + uv dx, \quad b(u, v) = \int_{\partial\Omega} uv ds. \quad (2.3)$$

显然 $a(\cdot, \cdot)$ 是 $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上对称, 连续和 $H^1(\Omega)$ - 椭圆的双线性形式. 因此, $a(\cdot, \cdot)$ 可以作为 $H^1(\Omega)$ 中的内积, $\|\cdot\|_a = \sqrt{a(\cdot, \cdot)} = \|\cdot\|_1$. 类似地, $b(\cdot, \cdot)$ 可以作为 $L^2(\partial\Omega)$ 中的内积, $\|\cdot\|_b = \sqrt{b(\cdot, \cdot)} = \|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$.

下面我们将先明确文中使用的一些符号. 为了简单起见, 我们考虑 $\Omega = (-1, 1)^d$ ($d = 2, 3$). 我们用 $L_n(x)$ 表示 n 次 Legendre 多项式. 令

$$S_N = \text{span}\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)\}, \quad X_N = S_N^d.$$

则 (2.1) 的 Legendre-Galerkin 逼近为: 求 $\lambda_N \in \mathbb{R}$, $u_N \in X_N$ 且 $\|u_N\|_{0, \partial\Omega} = 1$ 使得

$$a(u_N, v_N) = \lambda_N b(u_N, v_N), \quad \forall v_N \in X_N. \quad (2.4)$$

为了分析误差 $\lambda_N - \lambda$, 我们首先给出下面的极小极大原理.

引理 2.1 令 λ_l 表示 (2.2) 的特征值, V_l 为 $H^1(\Omega)$ 的任意 l 维子空间. 那么, 对于 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_l \leq \dots$, 有

$$\lambda_l = \min_{V_l \subset H^1(\Omega)} \max_{v \in V_l} \frac{a(v, v)}{b(v, v)}. \quad (2.5)$$

证明 参见文献 [20, 定理 3.1]. □

引理 2.2 令 λ_i 表示 (2.2) 的特征值并按照升序排列, 定义

$$E_{i,j} = \text{span}\{u_i, \dots, u_j\},$$

其中 u_i 是相应于特征值 λ_i 的特征向量, 则有

$$\lambda_l = \max_{v \in E_{k,l}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)}, \quad k \leq l, \quad (2.6)$$

$$\lambda_l = \min_{v \in E_{l,m}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)}, \quad l \leq m. \quad (2.7)$$

证明 参见文献 [20, 定理 3.2]. $\square$

事实上, 极小极大原理对离散格式 (2.4) 也是成立的 (参见文献 [20]).

引理 2.3 令 λ_N^l 表示 (2.4) 的特征值, V_l 是 X_N 的任意 l 维子空间. 那么, 对于 $\lambda_N^1 \leq \lambda_N^2 \leq \cdots \leq \lambda_N^l \leq \cdots$, 有

$$\lambda_N^l = \min_{V_l \subset X_N} \max_{v \in V_l} \frac{a(v, v)}{b(v, v)}. \quad (2.8)$$

定义 H^1 投影算子 $\Pi_N^1: H^1(\Omega) \rightarrow X_N$, 满足

$$a(\Pi_N^1 u - u, v_N) = 0, \quad \forall v_N \in X_N.$$

于是由文献 [21] 中的定理 8.4 我们有:

引理 2.4 对于任意 $u \in H^r(\Omega)$ ($r \geq 1$), 有

$$\|u - \Pi_N^1 u\|_{H^1(\Omega)} \lesssim N^{1-r} \|u\|_{H^r(\Omega)}.$$

引理 2.5 设 λ_N^l 是 (2.2) 的特征值 λ_l 的近似值, 它通过求解 (2.4) 得到, 则有

$$\lambda_l \leq \lambda_N^l \leq \lambda_l \max_{v \in E_{1,l}} \frac{b(v, v)}{b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)}. \quad (2.9)$$

证明 因为 $X_N \subset H^1(\Omega)$, 由 (2.5) 和 (2.8) 我们有 $\lambda_l \leq \lambda_N^l$. 令 $\Pi_N^1 E_{1,l}$ 表示由 $\Pi_N^1 u_1, \Pi_N^1 u_2, \dots, \Pi_N^1 u_l$ 张成的空间. 显然 $\Pi_N^1 E_{1,l}$ 是 X_N 的一个 l 维子空间. 由极小极大原理我们有

$$\lambda_N^l \leq \max_{v \in \Pi_N^1 E_{1,l}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)} = \max_{v \in E_{1,l}} \frac{a(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)}{b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)}.$$

由于

$$a(v, v) = a(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v) + 2a(v - \Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v) + a(v - \Pi_N^1 v, v - \Pi_N^1 v),$$

注意到 $a(v - \Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v) = 0$ 和 $a(v - \Pi_N^1 v, v - \Pi_N^1 v)$ 非负, 则有 $a(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v) \leq a(v, v)$. 因此,

$$\lambda_N^l \leq \max_{v \in E_{1,l}} \frac{a(v, v)}{b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)} = \max_{v \in E_{1,l}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)} \frac{b(v, v)}{b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)} \leq \lambda_l \max_{v \in E_{1,l}} \frac{b(v, v)}{b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)}.$$

证毕. $\square$

引理 2.6 若 $\{u_i\}_{i=1}^l \subset H^r(\Omega)$ ($r \geq 1$), 则下述不等式成立:

$$\max_{v \in E_{1,l}} \frac{b(v, v)}{b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)} \leq 1 + c(l)(N^{1-r})^2, \quad (2.10)$$

其中 $c(l)$ 是不依赖于 N 的常数.

证明 对于任意 $v \in E_{1,l}$, v 可表示为 $v = \sum_{i=1}^l \mu_i u_i$, 从而有

$$\begin{aligned} \frac{b(v, v) - b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)}{b(v, v)} &\leq \frac{2|b(v, v - \Pi_N^1 v)|}{b(v, v)} \leq \frac{2 \sum_{i,j=1}^l |\mu_i| |\mu_j| |b(u_i - \Pi_N^1 u_i, u_j)|}{\sum_{i=1}^l |\mu_i|^2} \\ &\leq 2l \max_{i,j=1,\dots,l} |b(u_i - \Pi_N^1 u_i, u_j)|. \end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式和 $a(u, u) = \|u\|_1^2$, 由引理 2.4 可得

$$\begin{aligned} |b(u_i - \Pi_N^1 u_i, u_j)| &= \frac{1}{\lambda_j} |\lambda_j b(u_j, u_i - \Pi_N^1 u_i)| = \frac{1}{\lambda_j} |a(u_j, u_i - \Pi_N^1 u_i)| \\ &= \frac{1}{\lambda_j} |a(u_j - \Pi_N^1 u_j, u_i - \Pi_N^1 u_i)| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_j} a(u_j - \Pi_N^1 u_j, u_j - \Pi_N^1 u_j)^{\frac{1}{2}} a(u_i - \Pi_N^1 u_i, u_i - \Pi_N^1 u_i)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim N^{2(1-r)}. \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{b(v, v)}{b(\Pi_N^1 v, \Pi_N^1 v)} \leq \frac{1}{1 - 2l \max_{i,j=1,\dots,l} |b(u_i - \Pi_N^1 u_i, u_j)|} \leq 1 + c(l)(N^{1-r})^2.$$

证毕.

由引理 2.5 和 2.6 我们有下面的定理.

定理 2.1 若 $\{u_i\}_{i=1}^l \subset H^1(\Omega) \cap H^r(\Omega) (r \geq 1)$, λ_N^l 是 λ_l 的近似特征值, 则下述不等式成立

$$|\lambda_N^l - \lambda_l| \leq c(l)(N^{1-r})^2, \quad (2.11)$$

其中 $c(l)$ 是与 N 无关的常数. $\square$

注记 2.1 利用仿射变换我们可以将一般的矩形区域 $[a, b] \times [c, d]$ 和长方体区域 $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ 分别变换为 $[-1, 1]^2$ 和 $[-1, 1]^3$, 因此以上理论分析对一般的矩形区域和长方体区域也是成立的.

3 Legendre-Galerkin 谱方法的有效实现

为了充分利用和实现谱方法的高精度特点, 现在关键的问题是要构造 X_N 的一组适当的基函数, 使得线性系统 (2.4) 尽可能容易求解. 令 $\varphi_i(x) = L_i(x) - L_{i+2}(x) (i = 0, 1, \dots, N-2)$, $\varphi_{N-1}(x) = L_0(x)$, $\varphi_N(x) = L_1(x)$, 则有

$$S_N = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)\}.$$

令 $s_{kj} = \int_{-1}^1 \varphi_j' \varphi_k' dx$, $m_{kj} = \int_{-1}^1 \varphi_j \varphi_k dx$, 则不难发现以下结论.

(1) 当 $k, j = 0, 1, \dots, N-2$ 时,

$$s_{kj} := \begin{cases} 4k+6, & k=j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad m_{jk} = m_{kj} := \begin{cases} \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+5}, & j=k, \\ -\frac{2}{2k+5}, & j=k+2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 当 $k = N - 1, N, j = 0, 1, \dots, N - 2$ 时,

$$\begin{cases} s_{kj} = 0, \\ s_{jk} = 0, \end{cases} \quad m_{jk} = m_{kj} := \begin{cases} 2, & k + j = N - 1, \\ \frac{2}{3}, & k + j = N + 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 当 $k = N - 1, N, j = N - 1, N$ 时,

$$\begin{cases} s_{N,N-1} = s_{N-1,N} = 0, \\ s_{N-1,N-1} = 0, s_{NN} = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} m_{N,N-1} = m_{N-1,N} = 0, \\ m_{N-1,N-1} = 2, m_{NN} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

令 $p_{ij} = \varphi_j(-1)\varphi_i(-1)$, $q_{ij} = \varphi_j(1)\varphi_i(1)$, 由于 $\varphi_i(\pm 1) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, N - 2$), $\varphi_{N-1}(\pm 1) = 1$, $\varphi_N(\pm 1) = \pm 1$, 则有

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = N - 1, N, \\ p_{ji} = -1, & i = N, j = N - 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad q_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = N - 1, N, \\ q_{ji} = 1, & i = N, j = N - 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

下面我们将导出 2 维和 3 维情形下离散系统 (2.4) 基于张量积的矩阵形式.

3.1 2 维的情形

令

$$u_N = \sum_{i,j=0}^N u_{ij} \varphi_i(x) \varphi_j(y), \quad U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N0} & u_{N1} & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}.$$

用 $\bar{U}$ 表示由 U 的列构成的长度为 $(N + 1)^2$ 的列向量. 则对 $v_N = \varphi_m(x)\varphi_n(y)$, $m, n = 0, 1, \dots, N$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_N \nabla v_N dx dy &= \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla(\varphi_i(x)\varphi_j(y)) \nabla(\varphi_m(x)\varphi_n(y)) dx dy u_{ij} \\ &= \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi'_i(x)\varphi'_m(x)\varphi_j(y)\varphi_n(y) + \varphi_i(x)\varphi_m(x)\varphi'_j(y)\varphi'_n(y) dx dy u_{ij} \\ &= \sum_{i,j=0}^N \left(\int_{-1}^1 \varphi'_i(x)\varphi'_m(x) dx \int_{-1}^1 \varphi_j(y)\varphi_n(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \varphi_i(x)\varphi_m(x) dx \int_{-1}^1 \varphi'_j(y)\varphi'_n(y) dy \right) u_{ij} \\ &= \sum_{i,j=0}^N (s_{mi}m_{nj} + s_{nj}m_{mi}) u_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S(m, :)UM(n, :)^T + M(m, :)US(n, :)^T \\
 &= M(n, :) \otimes S(m, :)\bar{U} + S(n, :) \otimes M(m, :)\bar{U}, \\
 \int_{\Omega} u_N v_N dx dy &= \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_m(x) \varphi_n(y) dx dy u_{ij} \\
 &= \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_m(x) dx \int_{-1}^1 \varphi_j(y) \varphi_n(y) dy u_{ij} \\
 &= \sum_{i,j=0}^N m_{mi} m_{nj} u_{ij} = M(m, :)UM(n, :)^T \\
 &= M(n, :) \otimes M(m, :)\bar{U}, \\
 \int_{\partial\Omega} u_N v_N ds &= \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_j(-1) \varphi_m(x) \varphi_n(-1) + \varphi_i(x) \varphi_j(1) \varphi_m(x) \varphi_n(1) dx u_{ij} \\
 &\quad + \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \varphi_i(-1) \varphi_j(y) \varphi_m(-1) \varphi_n(y) + \varphi_i(1) \varphi_j(y) \varphi_m(1) \varphi_n(y) dy u_{ij} \\
 &= \sum_{i,j=0}^N (\varphi_j(-1) \varphi_n(-1) + \varphi_j(1) \varphi_n(1)) \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_m(x) dx u_{ij} \\
 &\quad + \sum_{i,j=0}^N (\varphi_i(-1) \varphi_m(-1) + \varphi_i(1) \varphi_m(1)) \int_{-1}^1 \varphi_j(y) \varphi_n(y) dy u_{ij} \\
 &= \sum_{i,j=0}^N (p_{nj} + q_{nj}) m_{mi} u_{ij} + \sum_{i,j=0}^N (p_{mi} + q_{mi}) m_{nj} u_{ij} \\
 &= M(m, :)U(P + Q)(n, :)^T + (P + Q)(m, :)UM(n, :)^T \\
 &= (P + Q)(n, :) \otimes M(m, :)\bar{U} + M(n, :) \otimes (P + Q)(m, :)\bar{U}.
 \end{aligned}$$

在上面的三个方程中, 矩阵 $S = (s_{ij})_{i,j=0}^N$, $M = (m_{ij})_{i,j=0}^N$, $P = (p_{ij})_{i,j=0}^N$, $Q = (q_{ij})_{i,j=0}^N$. $A(m, :)$ 表示矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j=0}^N$ 的第 m 行, $\otimes$ 表示矩阵的张量积, 即 $A \otimes B = (a_{ij} B)_{i,j=0}^N$.

从而, 由上面的等式我们可得到 (2.4) 基于张量积的矩阵形式为

$$(M \otimes S + S \otimes M + M \otimes M)\bar{U} = \lambda_N((P + Q) \otimes M + M \otimes (P + Q))\bar{U}. \quad (3.1)$$

3.2 3 维的情形

令

$$u_N = \sum_{i,j,k=0}^N u_{ij}^k \varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_k(z), \quad U^k = \begin{pmatrix} u_{00}^k & u_{01}^k & \cdots & u_{0N}^k \\ u_{10}^k & u_{11}^k & \cdots & u_{1N}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N0}^k & u_{N1}^k & \cdots & u_{NN}^k \end{pmatrix}.$$

用 $\bar{U}^k$ 表示由矩阵 U^k 的列形成的长度为 $(N+1)^2$ 的列向量. 令 $U = (\bar{U}^0, \bar{U}^1, \dots, \bar{U}^N)$, $\bar{U}$ 表示由矩阵 U 的列形成的长度为 $(N+1)^3$ 的列向量.

那么, 对于 $v_N = \varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(z)$, $m, n, l = 0, 1, \dots, N$ 有

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla u_N \nabla v_N dx dy &= \sum_{i,j,k=0}^N \int_{\Omega} \nabla(\varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(z)) \nabla(\varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(z)) dx dy dz u_{ij}^k \\
&= \sum_{i,j,k=0}^N (s_{mi}m_{nj}m_{lk} + m_{mi}s_{nj}m_{lk} + m_{mi}m_{nj}s_{lk}) u_{ij}^k \\
&= \sum_{k=0}^N S(m, :) U^k m_{lk} M(n, :)^T + M(m, :) U^k m_{lk} S(n, :)^T + M(m, :) U^k s_{lk} M(n, :)^T \\
&= \sum_{k=0}^N M(n, :) \otimes S(m, :) \bar{U}^k m_{lk} + S(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U}^k m_{lk} + M(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U}^k s_{lk} \\
&= M(n, :) \otimes S(m, :) U M(l, :)^T + S(n, :) \otimes M(m, :) U M(l, :)^T \\
&\quad + M(n, :) \otimes M(m, :) U S(l, :)^T \\
&= M(l, :) \otimes M(n, :) \otimes S(m, :) \bar{U} + M(l, :) \otimes S(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U} \\
&\quad + S(l, :) \otimes M(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U}, \\
\int_{\Omega} u_N v_N dx dy &= \sum_{i,j,k=0}^N \int_{\Omega} \varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(z)\varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(z) dx dy dz u_{ij}^k \\
&= \sum_{i,j,k=0}^N m_{mi}m_{nj}m_{lk} u_{ij}^k = \sum_{k=0}^N M(m, :) U^k m_{lk} M(n, :)^T \\
&= \sum_{k=0}^N M(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U}^k m_{lk} = M(l, :) \otimes M(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U}, \\
\int_{\partial\Omega} u_N v_N ds &= \sum_{i,j,k=0}^N \int_{\Gamma} \varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(z)\varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(z) ds \\
&= \sum_{i,j,k=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(-1)\varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(-1) \\
&\quad + \varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(1)\varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(1)) dx dy u_{ij}^k \\
&\quad + \sum_{i,j,k=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi_i(x)\varphi_j(-1)\varphi_k(z)\varphi_m(x)\varphi_n(-1)\varphi_l(z) \\
&\quad + \varphi_i(x)\varphi_j(-1)\varphi_k(z)\varphi_m(x)\varphi_n(-1)\varphi_l(z)) dx dz u_{ij}^k \\
&\quad + \sum_{i,j,k=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi_i(-1)\varphi_j(y)\varphi_k(z)\varphi_m(-1)\varphi_n(y)\varphi_l(z) \\
&\quad + \varphi_i(1)\varphi_j(y)\varphi_k(z)\varphi_m(1)\varphi_n(y)\varphi_l(z)) dy dz u_{ij}^k \\
&= \sum_{i,j,k=0}^N m_{mi}m_{nj}(p_{lk} + q_{lk}) + m_{mi}(p_{nj} + q_{nj})m_{lk} + (p_{mi} + q_{mi})m_{nj}m_{lk} \\
&= (P + Q)(l, :) \otimes M(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U} + M(l, :) \otimes (P + Q)(n, :) \otimes M(m, :) \bar{U} \\
&\quad + M(l, :) \otimes M(n, :) \otimes (P + Q)(m, :) \bar{U}.
\end{aligned}$$

于是我们得到 (2.4) 基于张量积的矩阵形式为:

$$\begin{aligned} & (M \otimes M \otimes S + M \otimes S \otimes M + S \otimes M \otimes M + M \otimes M \otimes M) \bar{U} \\ & = \lambda_N ((P + Q) \otimes M \otimes M + M \otimes (P + Q) \otimes M + M \otimes M \otimes (P + Q)) \bar{U}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

注记 3.1 利用本文提出的 Legendre-Galerkin 谱方法, 求解 (2.1) 的问题就归结为求解形如

$$\tilde{A} \bar{U} = \lambda_N \tilde{B} \bar{U} \quad (3.3)$$

的矩阵广义特征值问题 (3.1) 或 (3.2). 该方法对于求解变系数方程依然是有效的, 此时矩阵 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 可能是满的, 可以利用 Gauss-Legendre 积分公式计算其元素. 由于人们大多只关心前几个最小的特征值, 我们可以利用预条件方法和移位反幂法有效地求解 (3.3) (参见[22]), 而这只需对不同的右端项 $\bar{f}$ 反复地求解下列方程:

$$(\tilde{A} - \lambda_a \tilde{B}) \bar{U} = \bar{f},$$

其中 λ_a 是 λ_N 的一个近似值. 上述方程组可以用 Schur 补方法有效求解.

4 数值试验

在这一节我们将进行一些数值试验, 分别在区域 $\bar{\Omega} = [0, 1]^2$ 和 $\bar{\Omega} = [0, 1]^3$ 上计算 (2.1) 的特征值. 许多和 Steklov 特征值问题相关的文献利用有限元法计算了区域 $\bar{\Omega} = [0, 1]^2$ 上 (2.1) 的前四个特征值 (参见 [10, 12, 13]):

$$\lambda_1 \approx 0.24007909, \quad \lambda_2 \approx 1.492303, \quad \lambda_3 \approx 1.492303, \quad \lambda_4 \approx 2.08265.$$

然而, 据我们所知, 目前还没有关于 3 维数值算例的报道. 本文利用 Legendre 多项式构造基函数, 使得离散变分形式的矩阵尽可能稀疏, 这使得我们能够有效地计算 3 维区域上 (2.1) 的特征值. 我们在 MATLAB 7.1 环境下编程计算, 数值结果列在表 1 和 2 中. 本节表格中的 DOF 表示自由度(未知数的个数).

从表 1 可以看到, 当 $N \leq 10$ 时近似特征值具有至少 15 位有效数字, 而文献 [19] 中利用节点基函数计算得到的近似特征值只有 12 位有效数字. 这表明离散变分形式中矩阵的稀疏性的确影响了计算结果的精度.

从表 2 我们也能看到, 当 $N \leq 10$ 时近似特征值具有至少 15 位有效数字. 此外, 对于 $\bar{\Omega} = [0, 1]^3$ 上的问题 (2.1), 通过计算还可以观察到 λ_1 是该问题的一个简单特征值, 而 λ_2 和 λ_5 都是 3 重特征值.

表 1 区域 $\bar{\Omega} = [0, 1]^2$ 上的近似特征值

N	DOF	λ_1	λ_2	λ_4
5	36	0.2400790854279226	1.492303165848313	2.082647054033204
10	121	0.2400790854272275	1.492303134533593	2.082647054033199
15	256	0.2400790854272273	1.492303134533591	2.082647054033197
20	441	0.2400790854272273	1.49230313453359	2.082647054033202

表 2 区域 $\bar{\Omega} = [0, 1]^3$ 上的近似特征值

N	DOF	λ_1	λ_2	λ_5
5	216	0.1621863227878745	1.155046619010471	1.691690701535465
10	1331	0.1621863227878111	1.155046608956007	1.691690654660923
15	4096	0.1621863227878115	1.155046608956004	1.691690654660922
20	9261	0.1621863227878114	1.155046608956007	1.69169065466092

5 结论性注记

本文针对 Steklov 特征值问题提出了基于 Legendre-Galerkin 逼近的一种有效的谱方法, 证明了近似特征值的误差估计式. 我们将离散变分形式相应的矩阵形式表示成张量积形式, 这样就可以快速地计算出离散的特征值和离散特征向量. 数值结果也表明了我们的方法是非常稳定和有效的.

本文中只给出了在区域 $[-1, 1]^d$ ($d = 2, 3$) 上的数值试验结果, 但文中的方法可以推广到一般的矩形或长方体区域. 例如要计算 Steklov 特征值问题 (2.4) 在一般的矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上的特征值, 只需要通过仿射变换将 $[a, b] \times [c, d]$ 变换到 $[-1, 1]^2$ 即可, 而这也只会引起 (3.1) 的微小变化, 即 (3.1) 中相应的矩阵乘以一个适当的常数即可. 3 维情形可类似地处理. 对另一种可分离变量的区域, 比如球形区域, 可以先将方程改写成球坐标形式, 再利用球调和函数展开将问题转化为一系列 1 维问题, 而这些 1 维问题可以用 Legendre-Galerkin 方法有效地求解. 事实上, 利用谱元法可以将本文中的方法推广到更一般的区域上.

致谢 作者感谢贵州师范大学数学与计算机科学学院闭海副教授对本文给予的帮助.

参考文献

- 1 Bergman S, Schiffer M. Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. New York: Academic Press, 1953
- 2 Ahn H J. Vibration of a pendulum consisting of a bob suspended from a wire: the method of integral equations. Quart Appl Math, 1981, 39: 109–117
- 3 Hinton D B, Shaw J K. Differential operators with spectral parameter incompletely in the boundary conditions. Funkc Ekvacioj Ser Int, 1990, 33: 363–385
- 4 Conca C, Planchard J, Vanninathanm M. Fluid and Periodic Structures. New York: John Wiley & Sons, 1995
- 5 Bermudez A, Rodriguez R, Santamarina D. A finite element solution of an added mass formulation for coupled fluid-solid vibrations. Numer Math, 2000, 87: 201–227
- 6 Bucur D, Ionescu I. Asymptotic analysis and scaling of friction parameters. Z Angew Math Phys, 2006, 57: 1–15
- 7 Andreev A B, Todorov T D. Isoparametric finite-element approximation of a Steklov eigenvalue problem. IMA J Numer Anal, 2004, 24: 309–322
- 8 Armentano M G, Padra C. A posteriori error estimates for the Steklov eigenvalue problem. Appl Numer Math, 2008, 58: 593–601
- 9 Alonso A, Russo A D. Special approximation of variationally-posed eigenvalue problem by nonconforming methods. J Comput Appl Math, 2009, 223: 177–197
- 10 Yang Y D, Li Q, Li S R. Nonconforming finite element approximations for the Stelov eigenvalue problem. Appl Numer Math, 2009, 59: 2388–2401

- 11 Li Q, Lin Q, Xie H. Nonconforming finite element approximations of the Steklov eigenvalue problem and its lower bound approximations. *Appl Math*, 2013, 58: 129–151
- 12 Li Q, Yang Y D. A two-grid discretization scheme for the Steklov eigenvalue problem. *J Appl Math Comput*, 2011, 36: 129–139
- 13 Bi H, Yang Y D. A two-grid method of the non-conforming Crouzeix-Raviart element for the Steklov eigenvalue problem. *Appl Math Comput*, 2011, 217: 9669–9678
- 14 Li M X, Lin Q, Zhang S. Extrapolation and superconvergence of the Steklov eigenvalue problems. *Adv Comput Math*, 2010, 33: 25–44
- 15 Tang W, Guan Z, Han H. Boundary element approximation of Steklov eigenvalue problem for Helmholtz equation. *J Comput Math*, 1998, 16: 165–178
- 16 Bi H, Yang Y D. Multi-scale discretization scheme based on the Rayleigh quotient iterative method for the Steklov eigenvalue problems. *Math Prob Eng*, 2012, doi: 10.1155/487207
- 17 Garau E M, Morin P. Convergence and quasi-optimality of adaptive FEM for Steklov eigenvalue problems. *IMA J Numer Anal*, 2011, 31: 914–946
- 18 Cao L, Zhang L, Allegretto W, Lin Y P. Multiscale asymptotic method for Steklov eigenvalue equations in composite media. *SIAM J Numer Anal*, 2013, 51: 273–296
- 19 Zhang X Q, Yang Y D, Bi H. Spectral method with the tensor-product nodal basis for the Steklov eigenvalue problems. *Math Prob Eng*, 2013, doi: 10.1155/2013/650530
- 20 Min M, Gottlieb D. On the convergence of the Fourier approximation for eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous problems. *SIAM J Numer Anal*, 2003, 40: 2254–2269
- 21 Shen J, Tang T, Wang L. *Spectral Methods Algorithms, Analysis and Applications*. Heidelberg: Springer, 2011
- 22 Golub G H, Van Loan C F. *Matrix Computations*. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1989

An efficient Legendre-Galerkin spectral approximation for the Steklov eigenvalue problem

AN Jing

Abstract In this paper, we give an effective spectral method based on the Legendre-Galerkin approximation for the Steklov eigenvalue problem. We first construct an appropriate set of basis functions such that the matrices in the discrete variational form are sparse. Then we deduce the matrix formulations based on the tensor-product for the discrete variational form in two- and three-dimensional cases, respectively. By using these tensor-product forms we can compute the discrete eigenvalues and eigenvectors rapidly. We also provide an error analysis and some numerical experiments. The numerical results indicate that our method is very stable and effective.

Keywords Steklov eigenvalue problem, Legendre-Galerkin approximation, matrix forms based on the tensor-product, error estimation

MSC(2010) 65N25, 65N30

doi: 10.1360/012014-64