广义 Rayleigh 商与有限元法 2-网格离散方案

杨一都*, 范馨月

贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵阳 550001

* E-mail: ydyang@gznu.edu.cn

收稿日期: 2008-04-14; 接受日期: 2008-09-25

国家自然科学基金 (批准号: 10761003) 和贵州省优秀科技教育人才省长专项基金 (编号: [2005]155) 资助项目

摘要 研究广义 Rayleigh 商和高效率有限元计算方案, 做了下列工作: 1) 把 Rayleigh 商加速技巧推广到非自共轭问题, 定义了算子型广义 Rayleigh 商和弱形式型广义 Rayleigh 商, 并建立了近似特征向量及其广义 Rayleigh 商之间的基本关系式. 2) 在误差估计式中用有限元特征值的陡度取代准确特征值的陡度, 得到新的误差估计式. 3) 在许进超和周爱辉工作的基础上建立了解非自共轭椭圆微分算子特征值问题的有限元 2-网格离散方案, 并用于协调有限元法和非协调有限元法. 从理论分析和数值实验两个方面证明了 2-网格方案的有效性. 4) 把解自共轭椭圆微分算子特征值问题的迭代 Galerkin 法、插值校正法和梯度重构法推广到非自共轭椭圆微分算子特征值问题.

关键词 非自共轭椭圆特征值问题 有限元法 广义 Rayleigh 商 2-网格法

MSC(2000) 主题分类 65N25, 65N30

1 引言

Rayleigh 商加速是数值分析中的一个基本方法, 已被下列学者成功地用于自共轭椭圆微分算子特征值问题有限元法: Sloan^[1], 林群和谢干权^[2] 利用 Rayleigh 商构建了迭代 Galerkin 法, 用于提高椭圆微分算子特征值问题协调有限元近似的精度阶. 林群和杨一都^[3] 利用 Rayleigh 商构建了插值校正方法, 用低次元的高次插值作 Rayleigh 商来得到高精度的特征值. Naga 等^[4] 把 Rayleigh 商加速与梯度重构相结合得到高精度的特征值. Shen 和周爱辉^[5] 及杨一都^[6] 分别把 Rayleigh 商加速与亏量校正相结合得到高精度的特征值. 许进超和周爱辉^[7] 基于 2-网格法思想^[8] 和 Rayleigh 商加速技巧建立了特征值问题有限元法 2-网格离散方案, 这是非常重要的工作, 有很好的应用前景. 在文献 [7] 基础上, 文献 [9] 建立了一种并行算法. 文献 [10] 讨论了特征值问题有限元的保序收敛性, 在此基础上杨一都还把文献 [7] 的方法拓展到非协调元, 并证明了在一定的条件下计算结果从下面逼近准确特征值, 且精度比直接在细网格上解特征值问题的精度高 (参见文献 [11] 等).

引用格式: 杨一都, 范馨月. 广义 Rayleigh 商与有限元法 2-网格离散方案. 中国科学 A, 2009, 39(3): 357~372
Yang Y D, Fan X Y. Generalized rayleigh quotient and finite element two-grid discretization schemes. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0016-8

以上文献讨论的几乎都是自共轭特征值问题. 自共轭特征值问题相对比较容易求解, 而非自共轭特征值问题求解相对很困难, 因此进一步研究非自共轭特征值问题高效率有限元计算方案十分必要. 文献 [12] 研究了多重网格法, 文献 [13] 研究了自适应算法. 文献 [7] 也注意到了研究非自共轭特征值问题并给出了一种 2-网格方案, 但未给出详细的理论分析, 我们用文献 [7] 中的方案计算了一个非对称对流扩散问题 (见节 7 的 (37)), 计算结果出现摆动, 不理想, 这启发我们去进一步研究非自共轭椭圆微分算子特征值问题有限元法 2-网格离散方案等高效率有限元计算方案.

为了把文献 [1–7] 和 [9, 11] 中的高效率计算方法推广到非自共轭问题, 关键是要建立适于非自共轭问题的 Rayleigh 商加速技术, 并克服非自共轭问题特征值陡度不一定等于 1 带来的困难. 在文献 [1–7] 和 [14, 15] 基础上, 本文做了下列工作: 1) 定义了算子型广义 Rayleigh 商和弱形式型广义 Rayleigh 商, 并建立了近似特征向量及其广义 Rayleigh 商之间的基本关系式. 2) 在误差估计式中用有限元特征值的陡度取代准确特征值的陡度, 得到新的误差估计式. 3) 建立了解非自共轭椭圆微分算子特征值问题的有限元 2-网格离散方案, 并用于协调有限元法和非协调有限元法. 从理论分析和数值实验两个方面证明了 2-网格方案, 用有限元法先在粗网格 K^H 上解一个特征值问题和 l 个 (l 是有限元特征值的陡度) 系数阵相同的线性方程组, 再在细网格 K^h 上解 l 个系数阵相同的线性方程组, 再计算广义 Rayleigh 商, 能够达到用有限元法直接在细网格 K^h 上解特征值问题的精度阶. 4) 把文献 [2–4] 中的计算方法推广到非自共轭椭圆微分算子特征值问题.

本文符号 C 表示与 h 无关的正常数, 在不同地方出现时表示的未必是同一个数.

2 全连续算子谱逼近

设 X 是可分 Hilbert 空间, $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 分别是 X 中内积和相应的范数, S^h 是分片多项式空间, 且 $\overline{\bigcup_{h>0} S^h} = X$. 设 $T \in L(X)$ 是全连续算子, $T_h : X \rightarrow S^h$ 是一列有限秩算子, 满足 $\|T_h - T\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). 设 T^* 和 T_h^* 分别是 T 和 T_h 的 Hilbert 共轭. 考虑算子特征值问题

$$Tu = \mu u, \quad (1)$$

$$T^*u = \mu^* u, \quad (2)$$

及其谱逼近

$$T_h u_h = \mu_h u_h, \quad (3)$$

$$T_h^* u_h = \mu_h^* u_h. \quad (4)$$

设 μ 是 T 的特征值, 代数重数为 m , 则 μ^* 是 T^* 的特征值, 代数重数亦为 m . 设 Γ 是包围 μ 的闭 Jordan 曲线, Δ 是由 Γ 围成的区域, $\Delta \setminus \mu \subset \rho(T)$. 设 h 充分小, 则 Γ 位于 $\rho(T_h)$ 内. 下面给出谱投影和陡度的定义 (参见文献 [14, 15]):

谱投影: 定义

$$E = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (T - z)^{-1} dz,$$

$$E_h = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (T_h - z)^{-1} dz.$$

E 和 E_h 分别称为关于 T 和 μ 的谱投影和关于 T_h 和 μ 的收敛于 μ 的特征值的谱投影. 用类似方法定义关于 T^* 和 μ^* 的谱投影 E^* , 和关于 T_h^* 和 μ^* 的收敛于 μ^* 的特征值的谱投影

E_h^* .

陡度, 广义特征向量: 存在一个最小整数 α , 使得 $N((\mu - T)^\alpha) = N((\mu - T)^{\alpha+1})$, 这里 N 表示零空间; 这个 α 称为 $\mu - T$ 的陡度. $N((\mu - T)^\alpha)$ 中向量称为 T 的相应于 μ 的广义特征向量. 用同样方法定义 $\mu_h - T_h$, $\mu^* - T^*$ 和 $\mu_h^* - T_h^*$ 的陡度和广义特征向量.

用 $R(E), R(E_h), R(E^*)$ 和 $R(E_h^*)$ 分别表示 E, E_h, E^* 和 E_h^* 的像空间. 则 $R(E) = N((\mu - T)^\alpha)$, $R(E_h) = \sum_{\mu_h \in \sigma(\mu)} N((\mu_h - T_h)^{l_{\mu_h}})$, 这里的 $\sigma(\mu)$ 是 T_h 所有收敛于 μ 的特征值的集合, l_{μ_h} 是 $\mu_h - T_h$ 的陡度.

因为 $(\mu - T)^j$ 的零空间 $N((\mu - T)^j)$ 是有限维空间, 所以有直和分解 $X = N((\mu - T)^j) \oplus M$, 定义 E_j 为从 X 沿 M 到 $N((\mu - T)^j)$ 上的投影, 用同样方法定义 E_j^* .

20 世纪 60–90 年代, 人们研究了近似特征值和特征向量的抽象误差估计式. 文献 [14, 15] 系统总结和发展了这些工作, 证明了存在 T_h 的 m 个特征值 (计及重数) $\mu_{1,h}, \mu_{2,h}, \dots, \mu_{m,h}$ 收敛于 μ , 给出了下面的引理 1 和 2:

引理 1 设 $\|T - T_h\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), α 是 $\mu - T$ 的陡度, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ 是 $R(E)$ 的一组基, $\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*$ 是共轭基, 则

$$|\mu - \mu_{j,h}| \leq C \left\{ \sum_{i,k=1}^m |((T - T_h)\varphi_i, \varphi_k^*)| + \|(T - T_h)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_h^*)|_{R(E^*)}\| \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

引理 2 设 $\|T - T_h\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), α 是 $\mu - T$ 的陡度, μ_h 是 T_h 的特征值且 $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_h = \mu$, u_h 满足 $(\mu_h - T_h)^k u_h = 0$, $\|u_h\| = 1$, 这里 $k \leq \alpha$ 是正整数, 则对任一整数 $j \in [k, \alpha]$, 成立

$$\|u_h - E_j u_h\| \leq C \|(T_h - T)|_{R(E)}\|^{\frac{j-k+1}{\alpha}}. \quad (6)$$

这是两个非常重要的引理, 不足之处在于确定陡度 α 的值很困难. 为此, 在文献 [14] 的基础上我们用 $\mu_h - T_h$ 的陡度 l 代替 $\mu - T$ 的陡度 α .

设 (μ_h, u_h) 是 T_h 的一个广义特征对, $\|u_h\| = 1$, $\mu_h - T_h$ 的陡度是 l . 由 $\mu_h^* - T_h^*$ 与 $\mu_h - T_h$ 有相同的陡度知 $\mu_h^* - T_h^*$ 的陡度也是 l .

令 u_h^- 是 u_h 到 $N((\mu_h^* - T_h^*)^l)$ 上的正交投影, $u_h^* = u_h^- / (u_h, u_h^-)$. 如果 $u_h \in N((\mu_h^* - T_h^*)^l)$, 则取 $u_h^* = u_h$. 不妨设 $u_h \notin N((\mu_h^* - T_h^*)^l)$, 可以用下列步骤求 u_h^* : 首先求 $N((\mu_h^* - T_h^*)^l)$ 的一个基 $\{\phi_i\}_1^g$, 然后解方程组

$$\sum_{i=1}^g \alpha_i (\phi_i, \phi_j) = (u_h, \phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, g.$$

取

$$u_h^- = \sum_{i=1}^g \alpha_i \phi_i, \quad (7)$$

$$u_h^* = u_h^- / (u_h, u_h^-). \quad (8)$$

显然, u_h^* 满足

$$(\mu_h^* - T_h^*)^l u_h^* = 0, \quad (u_h, u_h^*) = 1.$$

可以证明 u_h^* 关于 h 一致有界 (见引理 4).

引理 3 设 $\|T - T_h\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), (μ_h, u_h) 是 T_h 的一个特征对, u_h^* 满足 (7) 和 (8) 式, $u^* = E_l^* u_h^*$, $\mu_h - T_h$ 的陡度为 l , 则

$$(\mu - \mu_h)^l(u_h, u^*) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} (\mu - \mu_h)^i (\mu - T)^{l-1-i} (T - \mu_h) u_h, u^* \right), \quad (9)$$

$$(\mu - \mu_h)^l(u_h, u^*) = - \sum_{k=0}^{l-1} \left(\left(\sum_{m=k}^{l-1} C_m^k \right) (\mu_h - T)^{k+1} u_h, u^* \right) (\mu - \mu_h)^{l-1-k}. \quad (10)$$

证明见文献 [16, 定理 1].

引理 4 设 $\|T - T_h\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), μ_h 是 T_h 的特征值, $\mu_h - T_h$ 的陡度为 l , 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_h = \mu$, u_h 满足 $(\mu_h - T_h)^k u_h = 0$, $\|u_h\| = 1$, 这里 $k \leq l$ 是正整数, u_h^* 满足 (7) 和 (8) 式, 则对任意整数 $j \in [k, l]$, 成立

$$|\mu - \mu_h| \leq C \left\{ \sum_{i,k=1}^m |((T - T_h)\varphi_i, \varphi_k^*)| + \|(T - T_h)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_h^*)|_{R(E^*)}\| \right\}^{\frac{1}{l}}, \quad (11)$$

$$\|u_h - E_j u_h\| \leq C \|(T_h - T)|_{R(E)}\|^{(j-k+1)/l}, \quad (12)$$

$$\|u_h^* - E_l^* u_h^*\| \leq C \|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\|^{1/l}. \quad (13)$$

证明 设 μ_h 和 $\mu_{h'}$ 是 T_h 的两个特征值, $\mu_h \neq \mu_{h'}$, 则由文献 [15] 知 T_h 的相应于 μ_h 的广义特征向量与 T_h^* 的相应于 $\mu_{h'}$ 的任一广义特征向量正交, 且显然成立 $N((\mu_h^* - T_h^*)^l) \subset R(E_h^*)$. 所以 u_h 到 $N((\mu_h^* - T_h^*)^l)$ 上的正交投影 u_h^- 就是 u_h 到 $R(E_h^*)$ 上的正交投影. 另一方面, 由文献 [14, p. 689] 知, 存在 $w'_h \in N((\mu^* - T^*)^\alpha)$, $(u_h, w'_h) = 1$ 且 w'_h 关于 h 一致有界. 取 $u'_h = E_h^* w'_h / (u_h, E_h^* w'_h)$, 则 $u'_h \in R(E_h^*)$, $(u_h, u'_h) = 1$, 且 $(u_h, E_h^* w'_h) \rightarrow (u_h, w'_h) = 1$. 所以 $\|u'_h\| \leq C \|E_h^* w'_h\| \leq C$ 关于 h 一致有界. 联系 u_h^- 是 u_h 到 $R(E_h^*)$ 上的正交投影, 得 $\|u_h^*\| \leq \|u'_h\| \leq C$ 关于 h 一致有界.

为了证 (11) 式, 不妨设 u_h 是特征向量, 利用 (9) 式, 并注意 $\|u_h^*\|$ 关于 h 一致有界, $\|u^*\| = \|E_l^* u_h^*\| \leq \|E_l^*\| \|u_h^*\| \leq C$, $((\mu_h - T)u_h, \cdot)$ 是 $R(E^*)$ 上的线性连续泛函, 推出

$$\begin{aligned} |(\mu - \mu_h)^l(u_h, u^*)| &= \left| \left(\sum_{i=0}^{l-1} (\mu - \mu_h)^i (\mu - T)^{l-1-i} (T - \mu_h) u_h, u^* \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{l-1} |\mu - \mu_h|^i |((\mu_h - T)u_h, (\mu^* - T^*)^{l-1-i} u^*)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{l-1} |\mu - \mu_h|^i \max_{\varphi^* \in R(E^*), \|\varphi^*\|=1} |((\mu_h - T)u_h, \varphi^*)| \|\mu^* - T^*\|^{l-1-i} \|u^*\|. \end{aligned}$$

$\forall \varphi^* \in R(E^*), \|\varphi^*\| = 1$,

$$\begin{aligned} |((\mu_h - T)u_h, \varphi^*)| &= |((T_h - T)u_h, \varphi^*)| \\ &= |((T_h - T)(u_h - E u_h + E u_h), \varphi^*)| \\ &= |((T_h - T)E u_h, \varphi^*) + (u_h - E u_h, (T_h^* - T^*)\varphi^*)| \\ &\leq |((T_h - T)E u_h, \varphi^*)| + \|u_h - E u_h\| \|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\|. \end{aligned}$$

由引理 2 得 (取 $k = 1, j = \alpha$)

$$\|u_h - Eu_h\| \leq C\|(T_h - T)|_{R(E)}\|.$$

因为 $\|Eu_h\| \leq \|E\|\|u_h\| = \|E\|$, $Eu_h \in R(E)$, 所以成立

$$|((T_h - T)Eu_h, \varphi^*)| \leq C \sum_{i,k=1}^m |((T_h - T)\varphi_i, \varphi_k^*)|.$$

由上述 4 个式子得 (11) 式.

由文献 [14, p. 691] 知

$$\|u_h - E_l u_h\| \leq C(\|(T - T_h)|_{R(E)}\| + |\mu - \mu_h|^{l-k+1}).$$

由 (11) 式知

$$|\mu - \mu_h| \leq C\|(T - T_h)|_{R(E)}\|^{1/l}.$$

联系上两式得 (12) 式. 因为 u_h^* 关于 h 一致有界, 用证明 (12) 式的方法可以证明 (13) 式成立.

3 算子型广义 Rayleigh 商与 2-网格离散方案

我们把自共轭算子的 Rayleigh 商加速技巧推广到非自共轭算子特征值问题.

定义 1 $\forall w, w^* \in X, w, w^* \neq 0$, 称

$$\text{GRT}(w, w^*) = \frac{(Tw, w^*)}{(w, w^*)}$$

为 w 和 w^* 关于算子 T 的广义 Rayleigh 商.

定理 1 设 (μ, u) 和 (μ^*, u^*) 分别是 T 和 T^* 的特征对. 则 $\forall w, w^* \in X, (w, w^*) \neq 0$, 其广义 Rayleigh 商满足

$$\text{GRT}(w, w^*) - \mu = \frac{(T(w - u), w^* - u^*)}{(w, w^*)} - \mu \frac{(w - u, w^* - u^*)}{(w, w^*)}. \quad (14)$$

证明 由 (1) 和 (2) 式推出

$$\begin{aligned} & (T(w - u), w^* - u^*) - \mu(w - u, w^* - u^*) \\ &= (Tw, w^*) - (Tw, u^*) - (Tu, w^*) + (Tu, u^*) \\ & \quad - \mu((w, w^*) - (w, u^*) - (u, w^*) + (u, u^*)) \\ &= (Tw, w^*) - (w, T^*u^*) - (Tu, w^*) + (Tu, u^*) \\ & \quad - \mu((w, w^*) - (w, u^*) - (u, w^*) + (u, u^*)) \\ &= (Tw, w^*) - \mu(w, u^*) - \mu(u, w^*) + \mu(u, u^*) \\ & \quad - \mu((w, w^*) - (w, u^*) - (u, w^*) + (u, u^*)) \\ &= (Tw, w^*) - \mu(w, w^*), \end{aligned}$$

两端除以 (w, w^*) 得需要的结论.

这个定理告诉我们, 可以用广义 Rayleigh 商去提高非对称矩阵特征值、非自共轭微分算子特征值和非自共轭积分算子特征值的精度.

本文用广义 Rayleigh 商技巧构造有限元法 2-网格离散方案. 若已经在粗网格 K^H 上求得 T_H 的特征对 (μ_H, u_H) 和 T_H^* 的特征对 (μ_H^*, u_H^*) , 它们分别逼近 T 的特征对 (μ, u) 和 T^* 的

特征对 (μ^*, u^*) , 且 $(u_H, u_H^*) \neq 0$, 则由定理 1 知广义 Rayleigh 商 $\text{GRT}(u_H, u_H^*) = \frac{(Tu_H, u_H^*)}{(u_H, u_H^*)}$ 是具有高精度的近似特征值, 问题是如何计算 Tu_H , 一种自然的作法是在细网格 K^h 上计算 $T_h u_H$, 即用 $\text{GRTh}(u_H, u_H^*) = \frac{(T_h u_H, u_H^*)}{(u_H, u_H^*)}$ 代替 $\text{GRT}(u_H, u_H^*)$, 可以期望, 当 h 适当小时, $\text{GRTh}(u_H, u_H^*)$ 也具有高精度. 这正是本文 2-网格方案的基本思想和基本原理.

注意, 当 $\mu_H - T_H$ 的陡度等于 1 时, 上述 2-网格离散方案可行, 且定理 1 已经能够说明它的有效性. 但是当 $\mu_H - T_H$ 的陡度不等于 1 时, 问题较复杂, 因为这时未必能找到一个 T_H^* 的相应于 μ_H^* 的特征向量 u_H^* , 它逼近 T^* 的相应于 μ^* 的特征向量 u^* 且 $(u_H, u_H^*) \neq 0$, 而只能找到一个 T_H^* 的相应于 μ_H^* 的广义特征向量 u_H^* 逼近 T^* 的相应于 μ^* 的广义特征向量 u^* 且 $(u_H, u_H^*) \neq 0$. 例如, 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\mu = 2$ 是它的特征值, 相应的特征向量 $u = (1, 0)^T$, $2 - A$ 的陡度为 2. $\mu = 2$ 是 A^T 的特征值, 相应的特征向量 $v = (0, 1)^T$, 广义特征向量 $w = (1, 0)^T$, $2 - A^T$ 的陡度为 2. $(u, v) = 0$, 但 $(u, w) \neq 0$. 我们将在第 4 和第 5 节中对这问题做详细讨论, 把 2-网格离散法用于协调有限元法和非协调有限元法.

4 协调有限元法 2-网格方案

设 V 是 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 或 $H_0^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_{1,2}$ 为 V 中的范数, $\|\cdot\|_{s,p}$ 为 Sobolev 空间 $W_{s,p}(\Omega)$ 中的范数.

考虑二阶非自共轭椭圆微分算子特征值问题:

求 $\lambda \in \mathbb{C}$ (复数域), $u \in V, u \neq 0$, 使得满足

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i u \overline{\partial_j v} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i u \overline{v} + a(x) u \overline{v} \right) dx, \\ b(u, v) &= \int_{\Omega} d(x) u \overline{v} dx, \end{aligned}$$

这里, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界域, 对 Dirichlet 边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 取 $V = H_0^1(\Omega)$, 对 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \gamma_j \partial_i u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ 是边界上的单位外法向量, 取 $V = H^1(\Omega)$.

假设 $d(x)$ 是 Ω 上的有界可测实值函数且有正的下界, $a_{ij}(x), a_i(x), a(x)$ 是 Ω 上的有界可测实值或复值函数, 并且存在正常数 ν_0 , 使得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j &\geq \nu_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{Re} a(x) &\geq \frac{1}{2} \nu_0 + \frac{1}{2} \max_{x \in \Omega, i=1,2,\dots,n} |a_i(x)|^2 / \nu_0, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

由文献 [14, 第 8 和 10.3 节] 知, $a(u, v)$ 是 $V \times V$ 上一个半线性连续泛函且满足极小-极大条件

$$\inf_{u \in V, \|u\|_b=1} \sup_{v \in V, \|v\|_b=1} |a(u, v)| \geq \beta > 0,$$

$b(u, v)$ 是 $L_2(\Omega)$ 中内积, $\|\cdot\|_b = b(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\|\cdot\|_{0,2}$ 等价.

令 K^h 是 Ω 的一个网格, S^h 是定义在 K^h 上的协调有限元空间, $S^h \subset V$. (15) 式的协调有限元格式为

求 $\lambda_h \in \mathbb{C}$, $0 \neq u_h \in S^h$, 使得满足

$$a(u_h, v) = \lambda_h b(u_h, v), \quad \forall v \in S^h. \quad (16)$$

用 (16) 式的特征对 (λ_h, u_h) 逼近 (15) 式的特征对 (λ, u) . (15) 和 (16) 式的共轭方程分别为

求 $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \in V, w \neq 0$, 使得满足

$$a(v, w) = \lambda b(v, w), \quad \forall v \in V. \quad (17)$$

求 $\lambda_h \in \mathbb{C}$, $w_h \in S^h$, $w_h \neq 0$, 使得满足

$$a(v, w_h) = \lambda_h b(v, w_h), \quad \forall v \in S^h. \quad (18)$$

为讨论误差估计, 要把 (15) 和 (16) 式及其共轭 (17) 和 (18) 式化成算子方程形式. 定义算子 T 和 T^* :

$$a(Tf, v) = b(f, v), \quad \forall f \in L_2(\Omega), \forall v \in V,$$

$$a(v, T^*g) = b(v, g), \quad \forall g \in L_2(\Omega), \forall v \in V.$$

对协调有限元, 定义算子 T_h, T_h^* 和投影 P_h, P_h^* :

$$a(T_h f, v) = b(f, v), \quad \forall f \in L_2(\Omega), \forall v \in S^h,$$

$$a(v, T_h^* g) = b(v, g), \quad \forall g \in L_2(\Omega), \forall v \in S^h.$$

$$a(u - P_h u, v) = 0, \quad \forall u \in V, \forall v \in S^h,$$

$$a(v, u - P_h^* u) = 0, \quad \forall u \in V, \forall v \in S^h.$$

由文献 [14] 知, T 和 T^* 是全连续算子. 显然, T_h 和 T_h^* 是有限秩算子. $\forall u \in L_2(\Omega)$,

$$a(P_h T u, v) = a(T u, v) = b(u, v) = a(T_h u, v), \quad \forall v \in S^h.$$

所以, $a(P_h T u - T_h u, P_h T u - T_h u) = 0$. 据此, 由极小-极大条件成立推出 $T_h = P_h T$. 同理, 有 $T_h^* = P_h^* T^*$. 还可证, 在内积 $b(\cdot, \cdot)$ 下 T^* 是 T 的共轭算子, T_h^* 是 T_h 的共轭算子. 事实上,

$$b(T u, v) = a(T u, T^* v) = b(u, T^* v), \quad \forall u, v \in L_2(\Omega),$$

$$b(T_h u, v) = a(T_h u, T_h^* v) = b(u, T_h^* v), \quad \forall u, v \in L_2(\Omega).$$

令 $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $\mu_h = \frac{1}{\lambda_h}$, $X = L_2(\Omega)$, $(\cdot, \cdot) = b(\cdot, \cdot)$. 由文献 [14, pp. 693–694] 知, (15) 和 (17) 式分别有等价算子形式 (1) 和 (2), (16) 和 (18) 式分别有等价算子形式 (3) 和 (4).

在下面的讨论中, 把 $\mu - T$ 和 $\mu_h - T_h$ 的陡度又分别叫做 λ 和 λ_h 的陡度.

由 T 和 T_h 的定义知 Tf 和 $T_h f$ 分别是源问题

$$w \in V, \quad a(w, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V$$

的广义解和协调有限元解.

由 T^* 和 T_h^* 的定义知 T^*f 和 T_h^*f 分别是源问题

$$w \in V, \quad a(v, w) = b(v, f), \quad \forall v \in V$$

的广义解和协调有限元解.

设下列先验估计成立: 存在 $q \in (1, 2]$, 使得

$$Tf \in W_{2,q}(\Omega), \quad \|Tf\|_{2,q} \leq C\|f\|_{0,q}, \quad \forall f \in L_q(\Omega), \quad (19)$$

$$T^*f \in W_{2,q}(\Omega), \quad \|T^*f\|_{2,q} \leq C\|f\|_{0,q}, \quad \forall f \in L_q(\Omega).$$

由文献 [14] 知上述先验估计可保证 $\|T_h - T\|_b \rightarrow 0$ 和 $\|T_h^* - T^*\|_b \rightarrow 0$. 记

$$\begin{aligned} \|(T_h - T)|_{R(E)}\| &= \max_{v \in R(E), \|v\|_b=1} \|(T_h - T)v\|_b, \\ \|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\| &= \max_{v \in R(E^*), \|v\|_b=1} \|(T_h^* - T^*)v\|_b. \end{aligned}$$

则引理 1-4 成立.

利用算子型广义 Rayleigh 商技巧, 本文建立了下列协调有限元 2-网格计算方案:

方案 1

步骤 1 首先在粗网格 K^H 上用协调有限元法求解 (15) 式:

$$(\lambda_H, u_H) \in \mathbb{C} \times S^H, \quad \|u_H\|_b = 1,$$

满足

$$a(u_H, v) = \lambda_H b(u_H, v), \quad \forall v \in S^H.$$

然后在 S^H 中求一个满足 (7) 和 (8) 式的 u_H^* , 关键是求 $N((\mu_H^* - T_H^*)^l)$ 的一个基 $\{\phi_i\}_1^g$. 当特征值 λ_H 的陡度 $l = 1$ 时, 事实上是求下列齐次方程组解空间的一个基: $u_H^{(1)} \in S^H$,

$$a(v, u_H^{(1)}) - \lambda_H b(v, u_H^{(1)}) = 0, \quad \forall v \in S^H.$$

当 $l > 1$ 时, 可以通过依次取 $k = 1, 2, \dots, l$ 解下列方程组来得到这个基: $u_H^{(k)} \in S^H$,

$$a(v, u_H^{(k)}) - \lambda_H b(v, u_H^{(k)}) = a(v, u_H^{(k-1)}), \quad \forall v \in S^H. \quad (20)$$

其中 $u_H^{(0)} = 0$, $u_H^{(k-1)}$ 取遍方程 “ $a(v, u_H^{(k-1)}) - \lambda_H b(v, u_H^{(k-1)}) = a(v, u_H^{(k-2)})$, $\forall v \in S^H$ ” 的解空间的一个基中的向量. 这些方程组的系数矩阵都相同.

步骤 2 在细网格 K^h 上, 求解协调有限元方程组: $u_h^s \in S^h$,

$$a(u_h^s, v) = b(\lambda_H u_H, v), \quad \forall v \in S^h. \quad (21)$$

步骤 3 计算

$$\text{GRTh}l(u_H, u_H^*) = \frac{1}{\lambda_H} + \left(-b\left(\left(\frac{1}{\lambda_H} - T_h\right)^l u_H, u_H^*\right) \right)^{\frac{1}{l}}. \quad (22)$$

当 $l > 1$ 时, 定义这里的 $\text{GRTh}l(u_H, u_H^*)$ 为 u_H 和 u_H^* 关于 T_h 的广义 Rayleigh 商.

当 $l = 1$ 时, $(\frac{1}{\lambda_H} - T_h)^l u_H = \frac{1}{\lambda_H} u_H - T_h u_H = \frac{1}{\lambda_H} u_H - \frac{1}{\lambda_H} u_h^s$, 所以

$$\text{GRTh}1(u_H, u_H^*) = b(T_h u_H, u_H^*) = \frac{1}{\lambda_H} b(u_h^s, u_H^*) = \text{GRTh}(u_H, u_H^*).$$

当 $l > 1$ 时, 可以通过依次取 $k = 1, 2, \dots, l$ 解下列方程组得到 $(\frac{1}{\lambda_H} - T_h)^l u_H$: $u_h^{(k)} \in S^h$,

$$a(u_h^{(k)}, v) = b\left(\frac{1}{\lambda_H} u_h^{(k-2)} - u_h^{(k-1)}, v\right), \quad \forall v \in S^h,$$

其中 $u_h^{(-1)} = 0$, $u_h^{(0)} = u_H$, $u_h^{(l)} = (\frac{1}{\lambda_H} - T_h)^l u_H$.

记 $\lambda_h^r = \frac{1}{\text{GRTh}(u_H, u_H^*)}$, 用 (λ_h^r, u_h^s) 作为新的近似特征对.

定理 2 设 (19) 式成立. 令 (λ_H, u_H) 是 (15) 式的协调有限元特征对, λ_H 逼近 λ , l 是 λ_H 的陡度. 则存在 λ 的特征向量 u , 使得

$$\|u_h^s - u\|_{1,2} \leq C(\|(T - T_H)|_{R(E)}\|^{\frac{1}{l}} + \|(T - T_h)u_H\|_{1,2}). \quad (23)$$

证明 由 T_h 的定义和 (21) 式知 $u_h^s = \lambda_H T_h u_H$, 于是由 (1) 和 (19) 式得

$$\begin{aligned} \|u_h^s - u\|_{1,2} &= \|\lambda_H T_h u_H - \lambda T u\|_{1,2} \\ &= \|\lambda_H T_h u_H - \lambda_H T u_H + \lambda_H T u_H - \lambda T u\|_{1,2} \\ &\leq |\lambda_H| \|T_h u_H - T u_H\|_{1,2} + \|\lambda_H T u_H - \lambda T u_H\|_{1,2} + \|\lambda T u_H - \lambda T u\|_{1,2} \\ &\leq |\lambda_H| \|T_h u_H - T u_H\|_{1,2} + |\lambda_H - \lambda| \|T u_H\|_{1,2} + C \|u_H - u\|_b, \end{aligned}$$

注意到 $\mu_H = \frac{1}{\lambda_H}$ 是 T_H 的特征值, u_H 是对应的特征向量, 联系 (11) 和 (12) 式并取 $j = k = 1$ 得 (23) 式.

定理 3 设 (19) 式成立. 令 (λ_H, u_H) 是 (15) 式的协调有限元特征对, λ_H 逼近 λ , l 是 λ_H 的陡度, $u^* = E_l^* u_h^*$. 则当 $l = 1$ 时成立

$$\begin{aligned} |\lambda_h^r - \lambda| &\leq C |\lambda \lambda_h^r| (\|(T - T_H)|_{R(E)}\| \| (T^* - T_H^*)|_{R(E^*)} \| \\ &\quad + |b(u, (T_h^* - T^*)u^*)|). \end{aligned} \quad (24)$$

当 $l \geq 2$ 且 h 适当小时成立

$$|\lambda_h^r - \lambda| \leq C |\lambda \lambda_h^r| \|R(l)\| |b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*)|^{\frac{1}{l}-1}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \|R(l)\| &\leq C (\|(T_H - T)|_{R(E)}\|^{\frac{l+1}{l}} + \|(T_H^* - T^*)|_{R(E^*)}\|^{\frac{1}{l}} \|(T_H - T)|_{R(E)}\| \\ &\quad + \|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\|). \end{aligned} \quad (26)$$

证明 先证 $l = 1$ 时 (24) 式成立, 用定理 1 证. 注意 $b(u_H, u_H^*) = 1$, 由 (12) 和 (13) 式推出

$$\begin{aligned} |\text{GRTh}(u_H, u_H^*) - \text{GRT}(u_H, u_H^*)| &= \left| \frac{1}{b(u_H, u_H^*)} b((T_h - T)u_H, u_H^*) \right| \\ &= |b((T_h - T)u_H, u_H^* - u^*) + b((T_h - T)u_H, u^*)| \\ &= |b((T_h - T)(u_H - u), u_H^* - u^*) + b((T_h - T)u, u_H^* - u^*) + b((T_h - T)u_H, u^*)| \\ &\leq C (\|(T - T_H)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_H^*)|_{R(E^*)}\| + \|(T - T_h)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_H^*)|_{R(E^*)}\| \\ &\quad + |b(u, (T_h^* - T^*)u^*)| + \|(T - T_H)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_h^*)|_{R(E^*)}\|). \end{aligned}$$

由定理 1、(12) 和 (13) 式推出

$$\begin{aligned} |\text{GRT}(u_H, u_H^*) - \mu| &\leq C \|u_H - u\|_b \|u_H^* - u^*\|_b \\ &\leq C \|(T - T_H)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_H^*)|_{R(E^*)}\|. \end{aligned}$$

联系上两式并注意 $h < H$ 推出

$$\begin{aligned} |\text{GRTh}(u_H, u_H^*) - \mu| &\leq |\text{GRTh}(u_H, u_H^*) - \text{GRT}(u_H, u_H^*)| + |\text{GRT}(u_H, u_H^*) - \mu| \\ &\leq C (\|(T - T_H)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_H^*)|_{R(E^*)}\| + |b(u, (T_h^* - T^*)u^*)|). \end{aligned}$$

注意到 $|\text{GRTh}(u_H, u_H^*) - \mu| = \left| \frac{\lambda_h^r - \lambda}{\lambda_h^r \lambda} \right|$ 得 (24) 式.

下面证 $l \geq 2$ 时 (25) 和 (26) 式成立, 用 (10) 式证. 利用 $b(u_H, u_H^*) = 1$ 和 (13),

$$\left| \frac{1}{b(u_H, u^*)} - 1 \right| = \left| \frac{b(u_H, u_H^* - u^*)}{b(u_H, u^*)} \right| \leq C \|(T_H^* - T^*)|_{R(E^*)}\|^{\frac{1}{l}}. \quad (27)$$

经计算得

$$\begin{aligned} (\mu_H - T)^{k+1} &= (\mu_H - T)^{k+1} - (\mu_H - T_h)^{k+1} + (\mu_H - T_h)^{k+1} \\ &= (T_h - T)(\cdots) + (\mu_H - T_h)^{k+1}, \\ |b((T_h - T)(\cdots)u_H, u^*)| &= |b((\cdots)u_H, (T_h^* - T^*)u^*)| \leq C \|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\|. \end{aligned}$$

所以 (10) 式右端 (在粗网格 K^H 上)

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=0}^{l-1} b\left(\left(\sum_{m=k}^{l-1} C_m^k\right)(\mu_H - T)^{k+1}u_H, u^*\right)(\mu - \mu_H)^{l-1-k} \\ & \equiv - \sum_{k=0}^{l-1} b\left(\left(\sum_{m=k}^{l-1} C_m^k\right)(\mu_H - T_h)^{k+1}u_H, u^*\right)(\mu - \mu_H)^{l-1-k} - r_1, \end{aligned}$$

这里 $|r_1| = |\sum_{k=0}^{l-1} b((\sum_{m=k}^{l-1} C_m^k)(T_h - T)(\cdots)u_H, u^*)(\mu - \mu_H)^{l-1-k}| \leq C \|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\|$.

上式右端第 1 项 $\sum_{k=0}^{l-1} b(\cdots)$ 中, $k = l-1$ 时得到的是 $b((\mu_H - T_h)^l u_H, u^*)$, 于是推出

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=0}^{l-1} b\left(\left(\sum_{m=k}^{l-1} C_m^k\right)(\mu_H - T)^{k+1}u_H, u^*\right)(\mu - \mu_H)^{l-1-k} \\ & = - \sum_{k=0}^{l-2} b\left(\left(\sum_{m=k}^{l-1} C_m^k\right)(\mu_H - T_h)^{k+1}u_H, u^*\right)(\mu - \mu_H)^{l-1-k} \\ & \quad - b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*) - b((\mu_H - T_h)^l u_H, u^* - u_H^*) - r_1 \\ & \equiv -b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*) - r_2 - r_1. \end{aligned} \quad (28)$$

由引理 2 知 $\|(T_H - T)u_H\| \leq \|(T_H - T)Eu_H\| + \|(T_H - T)(u_H - Eu_H)\| \leq C\|(T_H - T)|_{R(E)}\|$, 因为 $h < H$, 还可以推出 $\|(T - T_h)u_H\| \leq \|(T - T_h)Eu_H\| + \|(T - T_h)(u_H - Eu_H)\| \leq C\|(T_H - T)|_{R(E)}\|$. 于是

$$|b((\mu_H - T_h)^{k+1}u_H, u^*)| = |b((\mu_H - T_h)^k(T_H - T_h)u_H, u^*)| \leq C\|(T_H - T)|_{R(E)}\|.$$

联系此式, (11) 和 (13) 式 (粗网格 K^H 上的 (11) 和 (13) 式) 推出

$$\begin{aligned} |r_2| &\leq C(\|(T_H - T)|_{R(E)}\|^{1+\frac{1}{l}} + \|(T_H - T)|_{R(E)}\|^{1+\frac{2}{l}} + \cdots \\ &\quad + \|(T_H - T)|_{R(E)}\|^{1+\frac{l-1}{l}} + \|(T_H - T)|_{R(E)}\| \|(T_H^* - T^*)|_{R(E^*)}\|^{\frac{1}{l}}) \\ &\leq C(\|(T_H - T)|_{R(E)}\|^{1+\frac{1}{l}} + \|(T_H - T)|_{R(E)}\| \|(T_H^* - T^*)|_{R(E^*)}\|^{\frac{1}{l}}). \end{aligned}$$

把 (28) 式代入 (10) 式 (粗网格 K^H 上的 (10) 式) 得

$$(\mu - \mu_H)^l = \frac{-1}{b(u_H, u^*)} (b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*) + r_2 + r_1) \equiv -b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*) + R(l).$$

由 r_1 和 r_2 的估计式及 (27) 式知 $R(l)$ 满足 (26) 式. 和上式右端第 1 项比较, 易知 (26) 式右端第 1 和 2 项是高阶小量, 选 h 适当小以保证 (26) 式右端第 3 项也是高阶小量, 则 $R(l)$ 是高阶小量. 写

$$\mu - \mu_H = (-1 + R(l)b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*)^{-1})^{\frac{1}{l}} b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*)^{\frac{1}{l}},$$

由 Taylor 公式推出

$$(-1 + R(l)b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*)^{-1})^{\frac{1}{l}} = (-1)^{\frac{1}{l}} + O(R(l)b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*)^{-1}),$$

于是得

$$\mu - \mu_H = (-b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*))^{\frac{1}{l}} + O(R(l)b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*)^{\frac{1}{l}-1}),$$

即

$$|\mu - \text{GRThl}(u_H, u_H^*)| \leq C|R(l)|b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_H^*)^{\frac{1}{l}-1}.$$

由此式知 (25) 式成立.

推论 1 设 (19) 式成立, 网格 K^H 和 K^h 是正规网格 (见文献 [17, P. 131]). 令 (λ_h^r, u_h^s) 是用方案 1 (采用线性有限元) 求得的特征对, λ_H 逼近 λ, λ_H 的陡度 $l = 1$, 则

$$\|u_h^s - u\|_{1,2} \leq C(H^{n+2-\frac{2n}{q}} + h^{\frac{n}{2}+1-\frac{n}{q}}), \quad |\lambda_h^r - \lambda| \leq C(H^{2n+4-\frac{4n}{q}} + h^{n+2-\frac{2n}{q}}).$$

证明 由文献 [14] 知, (23) 和 (24) 式右端各项归结为估计对应的源问题有限元解的误差. 由有限元误差估计 (见文献 [14, 17]) 推出

$$\begin{aligned} \|(T - T_h)u_H\|_{1,2} &\leq Ch^{\frac{n}{2}+1-\frac{n}{q}}, \quad \|(T - T_h)|_{R(E)}\| \leq CH^{n+2-\frac{2n}{q}}, \\ \|(T^* - T_h^*)|_{R(E^*)}\| &\leq CH^{n+2-\frac{2n}{q}}, \quad |b(u, (T_h^* - T^*)u^*)| \leq Ch^{n+2-\frac{2n}{q}}, \end{aligned}$$

代入 (23) 和 (24) 式得到需要的结果.

5 非协调有限元法 2-网格方案

考虑二阶非自共轭特征值问题 (15).

令 K^h 是 Ω 的一个网格, S^h 是定义在 K^h 上的非协调有限元空间, $S^h \not\subset V$. 令

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &= \sum_{e \in K^h} \int_e \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i u \overline{\partial_j v} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i u \overline{v} + a(x) u \overline{v} \right) dx, \\ \|v\|_h &= \left(\sum_{e \in K^h} \|v\|_{1,2,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

并假设 $a_h(u, v)$ 是 $S^h \times S^h$ 上一个半线性连续泛函, 一致地满足离散极小-极大条件

$$\inf_{u \in S^h, \|u\|_b=1} \sup_{v \in S^h, \|v\|_b=1} |a_h(u, v)| \geq \beta > 0, \quad \forall h > 0.$$

(15) 式的非协调有限元格式为

求 $\lambda_h \in \mathbb{C}, 0 \neq u_h \in S^h$, 使得满足

$$a_h(u_h, v) = \lambda_h b(u_h, v), \quad \forall v \in S^h. \quad (29)$$

(29) 式的共轭方程为

求 $\lambda_h \in \mathbb{C}, w_h \in S^h, w_h \neq 0$, 使得满足

$$a_h(v, w_h) = \lambda_h b(v, w_h), \quad \forall v \in S^h. \quad (30)$$

定义算子 T_h 和 T_h^* :

$$\begin{aligned} a_h(T_h f, v) &= b(f, v), \quad \forall f \in L_2(\Omega), \forall v \in S^h, \\ a_h(v, T_h^* g) &= b(v, g), \quad \forall g \in L_2(\Omega), \forall v \in S^h. \end{aligned}$$

显然, T_h 和 T_h^* 是有限秩算子. 可证在内积 $b(\cdot, \cdot)$ 下 T_h^* 是 T_h 的共轭算子. 事实上,

$$b(T_h u, v) = a_h(T_h u, T_h^* v) = b(u, T_h^* v), \quad \forall u, v \in L_2(\Omega).$$

记 $\mu = \frac{1}{\lambda}, \mu_h = \frac{1}{\lambda_h}, X = L_2(\Omega), (\cdot, \cdot) = b(\cdot, \cdot)$, 则 (29) 和 (30) 式分别有等价算子形式 (3) 和 (4). 设先验估计 (19) 成立, 则对常用非协调元可保证 $\|T_h - T\|_b \rightarrow 0$ 和 $\|T_h^* - T^*\|_b \rightarrow 0$. 用与协调元同样的形式定义 $\|(T_h - T)|_{R(E)}\|$ 和 $\|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\|$. 则引理 1-4 成立.

利用算子型广义 Rayleigh 商技巧, 本文建立了下列非协调有限元 2-网格计算方案:

方案 2

步骤 1 首先在粗网格 K^H 上用非协调有限元法求解 (15) 式:

$$(\lambda_H, u_H) \in \mathbb{C} \times S^H, \quad \|u_H\|_b = 1,$$

满足

$$a_H(u_H, v) = \lambda_H b(u_H, v), \quad \forall v \in S^H.$$

然后在 S^H 中求一个满足 (7) 和 (8) 式的 u_H^* (具体作法参见方案 1 的步骤 1, 注意把双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 用 $a_h(\cdot, \cdot)$ 代替).

步骤 2 在细网格 K^h 上, 求解非协调有限元方程组: $u_h^s \in S^h$,

$$a_h(u_h^s, v) = b(\lambda_H u_H, v), \quad \forall v \in S^h. \quad (31)$$

步骤 3 计算 u_H 和 u_H^* 的广义 Rayleigh 商

$$\text{GRThl}(u_H, u_H^*) = \frac{1}{\lambda_H} + \left(-b\left(\left(\frac{1}{\lambda_H} - T_h\right)u_H, u_H^*\right) \right)^{\frac{1}{l}} \quad (32)$$

(具体作法参见方案 1 的步骤 3, 注意把双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 用 $a_h(\cdot, \cdot)$ 代替).

记 $\lambda_h^r = \frac{1}{\text{GRThl}(u_H, u_H^*)}$, 用 (λ_h^r, u_h^s) 作为新的近似特征对.

采用定理 2 和 3 的证明步骤, 只需把其中几处的 $\|\cdot\|_{1,2}$ 改为 $\|\cdot\|_h$, 就得到下列定理 4 和 5.

定理 4 设先验估计 (19) 成立. 令 (λ_H, u_H) 是 (15) 式的非协调有限元特征对, λ_H 逼近 λ , l 是 λ_H 的陡度, 则存在 λ 的特征向量 u , 使得

$$\|u_h^s - u\|_h \leq C(\|(T - T_H)|_{R(E)}\|^{\frac{1}{l}} + \|(T - T_h)u_H\|_h). \quad (33)$$

定理 5 设 (19) 式成立. 令 (λ_H, u_H) 是 (15) 式的非协调有限元特征对, λ_H 逼近 λ , l 是 λ_H 的陡度, $u^* = E_l^* u_h^s$, 则当 $l = 1$ 时成立

$$|\lambda_h^r - \lambda| \leq C|\lambda \lambda_h^r|(\|(T - T_H)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_h^*)|_{R(E^*)}\| + |b(u, (T_h^* - T^*)u^*)|). \quad (34)$$

当 $l \geq 2$ 且 h 适当小时成立

$$|\lambda_h^r - \lambda| \leq C|\lambda \lambda_h^r| |R(l)| |b((\mu_H - T_h)^l u_H, u_h^*)|^{\frac{1}{l}-1}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} |R(l)| &\leq C(\|(T_H - T)|_{R(E)}\|^{\frac{l+1}{l}} + \|(T_H^* - T^*)|_{R(E^*)}\|^{\frac{1}{l}} \|(T_H - T)|_{R(E)}\| \\ &\quad + \|(T_h^* - T^*)|_{R(E^*)}\|). \end{aligned} \quad (36)$$

推论 2 设先验估计 (19) 成立, K^H 和 K^h 是正规 n -矩形网格 ($n = 2, 3$). 令 (λ_h^r, u_h^s) 是用方案 2(采用 Wilson 元) 求得特征对, λ_H 逼近 λ , λ_H 的陡度 $l = 1$, 则

$$\|u_h^s - u\|_h \leq C(H^{n+2-\frac{2n}{q}} + h^{\frac{n}{2}+1-\frac{n}{q}}), \quad |\lambda_h^r - \lambda| \leq C(H^{2n+4-\frac{4n}{q}} + h^{n+2-\frac{2n}{q}}).$$

证明 由文献 [14] 知, (33) 和 (34) 式右端各项归结为估计对应的源问题非协调有限元解的误差. 由非协调有限元误差估计 (见文献 [17-19]) 推出

$$\begin{aligned} \|(T - T_h)u_H\|_h &\leq Ch^{\frac{n}{2}+1-\frac{n}{q}}, \quad \|(T - T_H)|_{R(E)}\| \leq CH^{n+2-\frac{2n}{q}}, \\ \|(T^* - T_h^*)|_{R(E^*)}\| &\leq CH^{n+2-\frac{2n}{q}}, \quad |b(u, (T_h^* - T^*)u^*)| \leq Ch^{n+2-\frac{2n}{q}}, \end{aligned}$$

代入 (33) 和 (34) 式得到需要的结果.

6 弱形式型广义 Rayleigh 商与 2-网格离散方案

考虑 (15) 式及其协调有限元近似.

我们讨论弱形式型广义 Rayleigh 商技巧和协调有限元 2-网格计算方案.

定义 2 对所有非零 $w, w^* \in V$, 称

$$\text{GRa}(w, w^*) = \frac{a(w, w^*)}{b(w, w^*)}$$

为 w 和 w^* 的弱形式型广义 Rayleigh 商.

定理 6 设 (λ, u) 和 (λ^*, u^*) 分别是 (15) 和 (17) 式的特征对, 则 $\forall w, w^* \in V, b(w, w^*) \neq 0$, 其广义 Rayleigh 商满足

$$\text{GRa}(w, w^*) - \lambda = \frac{a(w - u, w^* - u^*)}{b(w, w^*)} - \lambda \frac{b(w - u, w^* - u^*)}{b(w, w^*)}.$$

证明 由 (15) 和 (17) 式推出

$$\begin{aligned} & a(w - u, w^* - u^*) - \lambda b(w - u, w^* - u^*) \\ &= a(w, w^*) - a(w, u^*) - a(u, w^*) + a(u, u^*) \\ & \quad - \lambda(b(w, w^*) - b(w, u^*) - b(u, w^*) + b(u, u^*)) \\ &= a(w, w^*) - \lambda b(w, u^*) - \lambda b(u, w^*) + \lambda b(u, u^*) \\ & \quad - \lambda(b(w, w^*) - b(w, u^*) - b(u, w^*) + b(u, u^*)) \\ &= a(w, w^*) - \lambda b(w, w^*), \end{aligned}$$

两端除以 $b(w, w^*)$ 得需要的结论.

设特征值 λ_H 的陡度 l 等于 1, 我们建立了如下的协调有限元 2-网格离散方案.

方案 3

步骤 1 首先在粗网格 K^H 上用协调有限元法求解 (15) 式:

$$(\lambda_H, u_H) \in \mathbb{C} \times S^H, \quad \|u_H\|_b = 1,$$

满足

$$a(u_H, v) = \lambda_H b(u_H, v), \quad \forall v \in S^H.$$

然后在 S^H 中求一个满足 (7) 和 (8) 式的 u_H^* , 这要求下列齐次方程组解空间的一个基:

$$u_H^{(1)} \in S^H, \quad a(v, u_H^{(1)}) - \lambda_H b(v, u_H^{(1)}) = 0, \quad \forall v \in S^H.$$

步骤 2 在细网格 K^h 上, 求解协调有限元方程组:

$$\begin{aligned} u_h^s &\in S^h, \quad a(u_h^s, v) = b(\lambda_H u_H, v), \quad \forall v \in S^h. \\ u_h^{s*} &\in S^h, \quad a(v, u_h^{s*}) = \lambda_H b(v, u_H^*), \quad \forall v \in S^h. \end{aligned}$$

步骤 3 计算 u_h^s 和 u_h^{s*} 的广义 Rayleigh 商

$$\text{GRa}(u_h^s, u_h^{s*}) = \frac{a(u_h^s, u_h^{s*})}{b(u_h^s, u_h^{s*})}.$$

记 $\lambda_h^a = \text{GRa}(u_h^s, u_h^{s*})$. 用 (λ_h^a, u_h^s) 作为新的近似特征对.

联系定理 2 和 6 得到下列定理 7.

定理 7 设先验估计 (19) 成立, 网格 K^H 和 K^h 是两个正规网格. 令 (λ_h^a, u_h^s) 是用方案 3 (采用线性有限元) 求得的特征对, λ_H 逼近 λ , λ_H 的陡度 $l = 1$, 则成立

$$\begin{aligned}\|u_h^s - u\|_{1,2} &\leq C(H^{n+2-\frac{2n}{q}} + h^{\frac{n}{2}+1-\frac{n}{q}}), \\ \|u_h^{s*} - u^*\|_{1,2} &\leq C(H^{n+2-\frac{2n}{q}} + h^{\frac{n}{2}+1-\frac{n}{q}}), \\ |\lambda_h^a - \lambda| &\leq C(H^{2n+4-\frac{4n}{q}} + h^{n+2-\frac{2n}{q}}).\end{aligned}$$

注 1 也可以把方案 3 形式地推广到非自共轭特征值问题非协调有限元法, 即把方案 3 中双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 用 $a_h(\cdot, \cdot)$ 代替, 得到推广的方案 3, 在第 7 节给出了数值例子, 但其有效性尚需进一步从理论上论证.

7 数值实验

考虑非对称对流扩散问题

$$-\Delta u + b \cdot \nabla u = \lambda u, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \quad u = 0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (37)$$

这里 $b = (1, 1)$, Ω 为单位正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 或 L 型区域 $[0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

对这个问题, 推论 1 和 2 成立, 且对单位正方形 $n = 2, q = 2$, 对 L 型区域 $n = 2, q = \frac{3}{2}$.

例 1 采用方案 1 和 3, 采用三角形线性有限元, 求问题 (37) 的模最小特征值. 作 Ω 的沿 3 个固定方向的一致等腰直角三角形网格 K^H , 加密 K^H 得到细网格 K^h , 取 S^H 和 S^h 分别为粗网格 K^H 和细网格 K^h 上的线性有限元空间. 用 MATLAB 编程计算, 求得粗网格上的特征值 λ_H , 细网格上的特征值 λ_h , 方案 1 的计算结果 λ_h^r 和方案 3 的计算结果 λ_h^a , 并把结果列于表 1 和 2. 我们也用文献 [7] 中方案做了计算, 计算结果 λ_h^A 也列于表 1 和 2.

表 1 单位正方形情形

H	h	λ_H	λ_h^a	λ_h^r	λ_h^A	λ_h
$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	23.08704	20.39909	20.46881	20.26363	20.40498
$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{64}$	20.91377	20.24819	20.25131	20.19323	20.24951
$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{144}$	20.53527	20.24348	20.24403	20.21680	20.24379
$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{256}$	20.40498	20.23975	20.23991	20.22406	20.23985
趋势	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	摆动	$\searrow$

表 2 L 型区域情形

H	h	λ_H	λ_h^a	λ_h^r	λ_h^A	λ_h
$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	56.34592	40.47035	41.62113	40.16679	40.30816
$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{64}$	43.40655	39.19666	39.28959	39.01830	39.18812
$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{144}$	41.12984	39.13099	39.15707	39.02891	39.12824
$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{256}$	40.30816	39.07662	39.08847	39.00928	39.07518
趋势	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	摆动	$\searrow$

从表 1 和 2 看到, 方案 1 求得的特征值 λ_h^r 和方案 3 求得的特征值 λ_h^a 都达到了细网格上特征值的精度阶, 方案 3 更好一些. 而用文献 [7] 中的方案求得的 λ_h^A 出现了摆动, 且精度小于 λ_h^a . 方形区域准确特征值应该在 $[20.23848, 20.23985]$ 之间, L 型区域准确特征值应该在 $[39.06298, 39.07518]$ 之间.

例 2 把方案 3 形式地推广到 Wilson 非协调元, 采用推广的方案 3 和 2, 采用 Wilson 非协调元, 求问题 (37) 的模最小特征值. 作 Ω 的均匀矩形网格 K^H , 加密 K^H 得到细网格 K^h , 取 S^H 和 S^h 分别为粗网格 K^H 和细网格 K^h 上的 Wilson 有限元空间. 用 MATLAB 编程计算, 求得粗网格上的特征值 λ_H , 细网格上的特征值 λ_h , 方案 2 的计算结果 λ_h^r 和推广的方案 3 的计算结果 λ_h^a , 并把结果列于表 3 和 4.

表 3 单位正方形情形

H	h	λ_H	λ_h^a	λ_h^r	λ_h
$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	17.80092	20.05486	20.09702	20.05495
$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{64}$	19.53282	20.22726	20.22867	20.22753
$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{256}$	20.05495	20.23846	20.23852	20.23848
趋势	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

表 4 L 型区域情形

H	h	λ_H	λ_h^a	λ_h^r	λ_h
$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	33.35389	38.73322	39.16606	38.70460
$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{64}$	37.41083	39.06131	39.09158	39.06109
$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{256}$	38.70460	39.06311	39.06641	39.06298
趋势	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

从表 3 和 4 看到, 方案 2 求得的特征值 λ_h^r 和推广的方案 3 求得的特征值 λ_h^a 都达到了细网格上特征值的精度阶, 推广的方案 3 的结果更接近 λ_h .

注 2 有限元特征值的陡度 l 可能因 h 不同而有不同的值, 但总小于该有限元特征值逼近的准确特征值的代数重数 m , 且对给定的 h, l 的值是确定的和容易计算的, 因此不影响 2-网格法的实现和效果. 注意, 在本文中把 λ_h 的陡度 l 换成 λ 的陡度 α 后, 得到的方案、定理和推论仍然成立.

注 3 本文的 2-网格方案和定理可直接推广到四阶非自共轭椭圆微分算子特征值问题.

注 4 利用本文的广义 Rayleigh 商加速技巧还可以把文献 [1–6] 和 [9] 的计算方法推广到非自共轭特征值问题. 例如, 把弱形式型广义 Rayleigh 商技巧与插值后处理或迭代 Galerkin 法或梯度重构相结合可以得到下列计算方案:

方案 4

步骤 1 首先在粗网格 K^H 上用协调有限元法求解 (15) 式:

$$(\lambda_H, u_H) \in \mathbb{C} \times S^H, \quad \|u_H\|_b = 1,$$

满足 $a(u_H, v) = \lambda_H b(u_H, v)$, $\forall v \in S^H$. 然后在 S^H 中求一个满足 (7) 和 (8) 式的 u_H^* , 这要求下列齐次方程组解空间的一个基:

$$u_H^{(1)} \in S^H, \quad a(v, u_H^{(1)}) - \lambda_H b(v, u_H^{(1)}) = 0, \quad \forall v \in S^H.$$

步骤 2 用插值后处理或迭代 Galerkin 法或梯度重构技术构造 $G(u_H)$ 和 $G(u_H^*)$.

步骤 3 计算 $G(u_H)$ 和 $G(u_H^*)$ 的广义 Rayleigh 商

$$\text{Gra}(G(u_H), G(u_H^*)) = \frac{a(G(u_H), G(u_H^*))}{b(G(u_H), G(u_H^*))}.$$

用 $\text{GRa}(G(u_H), G(u_H^*))$ 和 $G(u_H)$ 作为新的近似特征对.

设 λ_H 的陡度 $l = 1$. 则由定理 6 知, 当 $G(u_H)$ 和 $G(u_H^*)$ 有超收敛时, $\text{GRa}(G(u_H), G(u_H^*))$ 就有超收敛. 本文第 2 个作者做了数值实验, 也表明该方案有效.

注 5 曹礼群, 崔俊芝等 (见文献 [20, 21]) 讨论了具有周期孔洞和振荡系数的二阶椭圆算子特征值问题有限元分析, 获得非常重要的结果. 在此基础上进一步讨论 2-网格离散方案是有意义的工作.

致谢 作者感谢审稿专家的宝贵意见和建议, 感谢贵州师范大学闭海老师对本文的帮助.

参考文献

- 1 Sloan I H. Iterated Galerkin method for eigenvalue problems. *SIAM J Numer Anal*, **13**: 753–760 (1976)
- 2 林群, 谢干权. 本征值问题的有限元方法的加速. *科学通报*, **26**(8): 449–452 (1981)
- 3 林群, 杨一都. 有限元方法的插值与校正. *数学的实践与认识*, **3**: 17–28 (1991)
- 4 Naga A, Zhang Z M, Zhou A. Enhancing eigenvalue approximation by gradient recovery. *SIAM J Sci Comput*, **28**(4): 1289–1300 (2006)
- 5 Shen L, Zhou A. A defect correction scheme for finite element eigenvalues with applications to quantum chemistry. *SIAM J Sci Comput*, **28**: 321–338 (2006)
- 6 杨一都. 用有限元亏量校正求特征值下界. *工程数学学报*, **23**(1): 99–106 (2006)
- 7 Xu J, Zhou A. A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems. *Math Comput*, **70**(233): 17–25 (2001)
- 8 Xu J. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs. *SIAM J Numer Anal*, **33**: 1759–1777 (1996)
- 9 Xu J, Zhou A. Local and parallel finite element algorithms for eigenvalue problems. *Acta Math Appl*, **18**(2): 185–200 (2002)
- 10 杨一都, 陈震. 自共轭全连续算子谱逼近的保序收敛性. *中国科学 A*, **38**(1): 87–96 (2008)
- 11 Yang Y D. Iterated Galerkin method and Rayleigh quotient for accelerating convergence of eigenvalue problems. *Chin J Engrg Math*, **25**(3): 480–488 (2008)
- 12 Heuveline V, Bertsch V. On multigrid methods for the eigenvalue computation of nonselfadjoint elliptic operators. *East-West J Numer Math*, **8**: 275–297 (2000)
- 13 Heuveline V, Rannacher R. Adaptive FEM for eigenvalue Problems with application in hydrodynamic stability analysis. *J Numer Math*, **14**: 1–32 (2006)
- 14 Babuska I, Osborn J E. Eigenvalue problems. *Handbook of Numer Anal*, Vol 2. North-Holland: Elsevier Science Publishers B V, 1991
- 15 Chatelin F. *Spectral Approximations of Linear Operators*. New York: Academic Press, 1983
- 16 Yang Y D, Huang Q M. A posteriori error estimator for spectral approximations of completely continuous operators. *Int J Numer Anal Model*, **3**(3): 361–370 (2006)
- 17 Ciarlet P G. Basic Error Estimates for Elliptic Problems. *Handbook of Numer Anal*, Vol 2. North-Holland: Elsevier Science Publishers B V, 1991
- 18 Shi Z C, Jiang B, Xue W M. A new superconvergence property of Wilson nonconforming finite element. *Numer Math*, **78**: 259–268 (1997)
- 19 张鸿庆, 王鸣. *有限元的数学理论*. 北京: 科学出版社, 1991
- 20 曹礼群, 崔俊芝, 诸德超, 等. 具有周期孔洞和振荡系数的二阶椭圆算子谱分析与数值模拟. *中国科学 A*, **32**(4): 362–373 (2002)
- 21 Cao L Q, Cui J Z. Asymptotic expansions and numerical algorithm of eigenvalues and eigenfunctions of the Dirichlet problem for second order elliptic equations in perforated domains. *Numer Math*, **96**: 525–581 (2004)