论 文

存在互耦误差时的圆台共形阵列 DOA 估计

张学敬^{①*}, 杨志伟^①, 廖桂生^①, 贺顺^{①②}^① 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 西安 710071^② 西安科技大学通信学院, 西安 710054

* 通信作者. E-mail: xjzhang7@163.com

收稿日期: 2013-11-26; 接受日期: 2014-01-14

国家自然科学基金 (批准号: 60901066)、长江学者和创新团队发展计划 (批准号: IRT-0954)、中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: K5051302007) 和陕西省教育厅科技计划 (批准号: 2013JK1051) 资助项目

摘要 阵列存在互耦误差时, 由于理想导向矢量与实际导向矢量之间存在偏差, 使得高分辨空间谱估计方法性能恶化. 本文针对圆台共形阵列, 充分利用其结构分布特性, 以互耦矩阵呈复共轭对称分布为前提推导出了圆台共形阵列的互耦矩阵模型. 在此基础上, 利用两种模式对互耦矩阵进行分解, 由此建立了两种基于圆台共形阵列的互耦误差自校正模型. 两种模型均可以实现存在互耦误差时的圆台共形阵列 DOA 估计, 且校正后的导向矢量与实际导向矢量之间的相关程度得到明显改善. 另外, 本文所提的互耦自校正方法具有较低的信噪比门限. 理论分析和仿真结果证实了本文两种模型的有效性, 可以为共形阵列的工程应用提供参考.

关键词 圆台共形阵列 互耦误差 DOA 估计 自校正 Toeplitz 矩阵

1 引言

在飞行器或其他移动平台载体表面, 常常需要安装共形阵列天线^[1,2]. 与常规均匀线阵相比, 共形阵有着优越的结构特点和良好的测向性能, 如其对雷达载体的空气动力学性能影响很小, 且具有体积小、重量轻、易于安装等优点. 此外, 共形阵列具有 360° 发射覆盖范围的潜力, 可以通过使用全向波束、多波束, 或者是一个可以在 360° 范围内调整的窄波束实现^[1]. 共形阵的优势使其在雷达、移动通信、无线电测向等方面有着广泛的应用前景.

波束形成和参数估计是阵列信号处理的核心. 在共形阵列波束形成方面, 文献 [3] 利用内插阵列方法实现了圆柱阵的自适应波束形成. 文献 [4] 将流形分离方法应用于共形阵列中, 实现了半球共形阵的稳健波束形成. 文献 [5,6] 基于子阵级数字波束形成技术将大型共形阵布局为二维相扫子阵, 并利用后项投影 BP (back projection) 算法来形成阵列方向图. 该方法实现简单, 为共形阵列波束形成提供了新思路, 且其原理可以应用于共形阵列的波达方向 DOA (direction of arrival) 估计中. 共形阵列的参数估计问题主要集中在 DOA 估计上, 主要方法包括流形分离^[7,8] 方法、虚拟内插变换^[9] 方法, 以及针对特殊共形阵列的 DOA 估计方法^[10].

在实际工程应用中, 阵列不可避免地存在着各种误差, 误差的存在使得实际阵列流形与理想阵列流形存在偏差, 从而导致阵列高分辨技术 (如 MUSIC 算法) 的性能显著下降, 甚至失效. 因此, 阵列误

引用格式: 张学敬, 杨志伟, 廖桂生, 等. 存在互耦误差时的圆台共形阵列 DOA 估计. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1156–1170, doi: 10.1360/N112013-00195

图 1 任意几何结构阵列模型

Figure 1 Arbitrary structure array model

差的校正在阵列信号处理技术中具有重要的理论意义和实用价值. 在互耦误差校正方面, Friedlander 等^[11]利用子空间原理和等距线阵互耦矩阵的特殊结构特性, 提出了多维参数轮换迭代方法, 实现了等距线阵下互耦矩阵和 DOA 的联合估计; 王永良等在文献 [12] 中采用一种基于降秩的方法估计信号的波达方向和阵元的耦合系数, 该算法无需高维搜索, 简单易行, 但在低信噪比情况下稳定性较差; 文献 [13] 提出一种基于辅助阵元的误差估计与校正方法, 该方法既不需要额外的辅助信号源, 也避免了多维互耦参数估计, 仅需要对已有阵列的阵元位置进行合理设置和选取, 就可以有效地抑制阵元互耦对 MUSIC 算法的负面影响; 文献 [14] 和文献 [15,16] 分别利用等距圆阵和 L 型阵列的特殊互耦特性, 实现了对 DOA 和阵列互耦系数的解耦合; 文献 [17] 实现了等距六边形平面阵列的互耦校正. 这些文献大多利用互耦矩阵特殊结构特性进行互耦误差校正, 其中的互耦误差模型均是以互耦矩阵呈对称结构分布为前提建立的. 实际中, 当系统为非互易网络^[18]时, 根据互阻的特殊性质^[19], 导致互耦矩阵^[20]可以呈复共轭对称结构, 从而使得上述利用互耦矩阵特殊结构特性来实现互耦校正的方法失效. 另外, 前述算法均是基于典型的一维或二维阵列提出的, 当采用三维共形阵列时, 由于载体曲率的影响, 会引起各阵元方向图差异^[2], 使得共形阵列的互耦模型更加复杂, 上述方法不能得以应用. 共形阵列的互耦校正方面文献相对较少, 文献 [21] 通过精确设置辅助阵列, 将共形阵列的互耦误差转换为方向依赖的幅相误差, 通过求解方程组来得到互耦参数, 此方法不受阵列结构和互耦误差模型的限制, 但是对辅助阵列的设置要求较高. 此外, 在辅助阵列与原阵列相距较远时, 远场平面波假设对包含辅助阵列在内的整个阵列而言不再成立, 导致利用辅助阵列进行 DOA 估计时偏差较大, 最终会降低互耦参数估计性能. 文献 [22](称其为 CMS 算法) 将阵列互耦误差和幅相误差综合为一个误差矩阵, 在校正源精确已知基础上利用子空间原理校正阵列互耦误差和幅相误差. 虽然该算法不受互耦矩阵模型限制, 可以应用于共形阵列的互耦校正中, 但是它要求校正源方位精确已知, 且所需校正源较多. 另外, 即使校正源数目足够, 校正源方位选取不恰当也会使得算法性能恶化.

本文针对圆台型共形阵列, 以互耦矩阵呈复共轭对称分布为前提, 对其互耦误差特性进行详细分析, 推导出了圆台共形阵列的互耦矩阵模型. 利用互耦矩阵的特殊结构特性建立了两种互耦误差校正模型, 在此基础上分别将多维参数迭代估计方法应用于两种模型上, 实现了含互耦误差时的圆台共形阵列的 DOA. 文中对算法进行了理论分析和仿真验证, 可为共形阵列的工程应用提供参考.

2 共形阵列信号模型

对于包含 N 个阵元的任意几何结构阵列, 建立如图 1 所示的正交直角坐标系 $O-XYZ$. 假设在阵列远场 (θ_m, ϕ_m) ($m = 1, 2, \dots, M$) 处有 M 个窄带点源以平面波入射 (波长为 λ), 其中 θ_m 为空间信

图 2 圆台共形阵列模型

Figure 2 Truncated cone conformal array model

源的方位角, ϕ_m 为空间信源的俯仰角. 阵列接收的快拍数据可由式 (1) 表示为

$$x(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{a}(\theta_m, \phi_m) s_m(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A}(\theta, \phi) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1)$$

式中 $x(t)$ 为 $N \times 1$ 快拍矢量, $\mathbf{s}(t)$ 为 $M \times 1$ 信号复幅度矢量, $s_m(t)$ 为 $\mathbf{s}(t)$ 第 m 个元素, $\mathbf{n}(t)$ 为 $N \times 1$ 噪声矢量.

阵列导向矢量矩阵 $\mathbf{A}(\theta, \phi)$ 可表示为如式 (2)

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \phi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \phi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M, \phi_M)], \quad (2)$$

其中, $\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i)$ 为第 i 个信源的导向矢量, 可由式 (3) 表示为

$$\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i) = [g_1(\theta_i, \phi_i) \exp(jk \mathbf{r}_1^T \mathbf{v}_i), g_2(\theta_i, \phi_i) \exp(jk \mathbf{r}_2^T \mathbf{v}_i), \dots, g_N(\theta_i, \phi_i) \exp(jk \mathbf{r}_N^T \mathbf{v}_i)]^T, \quad (3)$$

其中, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, 其大小表示单位波长的周期数, $\mathbf{r}_n = [x_n, y_n, z_n]^T$ 为第 n 个阵元的坐标矢量 ($n = 1, 2, \dots, N$), $\mathbf{v}_i = [\sin \phi_i \cos \theta_i, \sin \phi_i \sin \theta_i, \cos \phi_i]^T$ 为第 i 个信源的空间方位矢量, $(\cdot)^T$ 为转置操作.

针对具体的圆台共形阵列, 图 2 给出了相应的阵元分布示意图. 设圆台阵列由 P 层均匀圆阵组合而成, 每个圆阵的阵元个数为 Q , 总的阵元数 $N = PQ$, 圆台高度为 H , 圆台斜边倾角为 γ , 圆台底面半径为 R . 圆台阵第 1 层圆阵分布在 XOY 平面内, 每层第 1 个阵元位于 X 轴正方向, 按照 XOY 平面内逆时针方向进行编号, 则可以计算出第 p 层、第 q 个阵元的空间笛卡尔坐标 x_{pq}, y_{pq}, z_{pq} 分别为

$$\begin{cases} x_{pq} = \left[R - \frac{H}{P-1} (p-1) \cot \gamma \right] \cos \left[\frac{2\pi}{Q} (q-1) \right], \\ y_{pq} = \left[R - \frac{H}{P-1} (p-1) \cot \gamma \right] \sin \left[\frac{2\pi}{Q} (q-1) \right], \\ z_{pq} = \frac{H}{P-1} (p-1), \end{cases} \quad (4)$$

式中, $p = 1, 2, \dots, P, q = 1, 2, \dots, Q$. 得到第 (p, q) 个阵元的位置坐标矢量为

$$\mathbf{r}_{pq} = [x_{pq}, y_{pq}, z_{pq}]^T. \quad (5)$$

图 3 圆台共形阵列俯视图

Figure 3 Topside view of the TCCA

考虑阵列远场 (θ, ϕ) 方向的某个信源, 则由前可知, 圆台阵列的导向矢量可表示为

$$\mathbf{a} = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1Q}, \dots, a_{pQ}, \dots, a_{PQ}]^T, \quad (6)$$

式中, $a_{pq} = g_{pq}(\theta, \phi) \exp(jk\mathbf{r}_{pq}^T \mathbf{v})$, $\mathbf{v}$ 为 (θ, ϕ) 方向的方位矢量. 由此得到圆台阵列的接收数据矢量为

$$\mathbf{x}_{tc}(t) = \mathbf{a}(\theta, \phi) s(t) + \mathbf{n}(t). \quad (7)$$

3 圆台共形阵列互耦模型

对于圆台共形阵列, 当其存在与方位无关的互耦误差时, 实际导向矢量 $\mathbf{a}_r(\theta, \phi)$ 可以表示为

$$\mathbf{a}_r(\theta, \phi) = \mathbf{Z}\mathbf{a}(\theta, \phi), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{Z}$ 为圆台阵列的互耦矩阵, 考虑互耦矩阵呈复共轭对称矩阵, 且满足 $z_{ii} = 1$. 简单起见, 设圆台阵列层数 $P = 3$, 每层的阵元数 $Q = 8$, 图 3 给出了此时圆台阵列的俯视图, 并按 XOY 平面内逆时针方向进行了编号, 其中 $p-q$ 表示第 p 层圆阵的第 q 个阵元.

将圆台共形阵列划分为 3 个子阵, 第 1 个子阵由第 1 层圆阵组成, 第 2 个子阵由第 2 层圆阵组成, 第 3 个子阵由第 3 层圆阵组成. 设 3 个子阵在 (θ, ϕ) 方向的理想导向矢量分别为 $\mathbf{a}_i(\theta, \phi)$ ($i = 1, 2, 3$), 则圆台阵列的理想导向矢量可表示为

$$\mathbf{a}(\theta, \phi) = [\mathbf{a}_1^T(\theta, \phi) \quad \mathbf{a}_2^T(\theta, \phi) \quad \mathbf{a}_3^T(\theta, \phi)]^T. \quad (9)$$

由阵列的俯视图可以看出, 圆台共形阵列的互耦矩阵可以由子阵内的互耦子矩阵和子阵间的互耦子矩阵组合而成. 设第 i 个子阵内的互耦子矩阵为 $\mathbf{Z}_i$, 第 i 个子阵与第 j 个子阵间的互耦子矩阵为 $\mathbf{C}_{ij}$ ($i \neq j, i < j$), 则上述圆台阵列的互耦矩阵 $\mathbf{Z}$ 可以表示为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{12}^* & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{13}^* & \mathbf{C}_{23}^* & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

容易看出, 只要各阵元特性一致, 由阵列的对称性即可得出 $\mathbf{Z}_i$ 结构应与均匀圆阵类似, 即呈循环复共轭对称 Toeplitz 分布, 可表示为

$$\mathbf{Z}_i = \text{Cir_her_sym_T}(\mathbf{z}_i), \quad (11)$$

其中 $\mathbf{z}_i$ 表示 $\mathbf{Z}_i$ 的循环矢量, $Cir_her_sym_T(\cdot)$ 表示得到某向量对应的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵. 下面以第 1 个子阵与第 3 个子阵为例, 对子阵间的互耦子矩阵的特性进行分析.

若将第 p 层圆阵的第 q 个阵元表示为阵元 $p-q$, 设阵元 $p-q$ 与阵元 $l-m$ 间的互耦系数为 $c_{p-q,l-m}$, 则第 1 个子阵中阵元 1-1 与第 3 个子阵之间的互耦向量可以表示为

$$[c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5} \quad c_{1-1,3-6} \quad c_{1-1,3-7} \quad c_{1-1,3-8}]. \quad (12)$$

由于第 3 个子阵相对于阵元 1-1 对称, 容易看出互耦向量中 $c_{1-1,3-2} = c_{1-1,3-8}$, $c_{1-1,3-3} = c_{1-1,3-7}$, $c_{1-1,3-4} = c_{1-1,3-6}$, 则阵元 1-1 与第 3 个子阵之间的互耦向量可以等价地表示为

$$[c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-2}]. \quad (13)$$

第 1 个子阵中阵元 1-2 与第 3 个子阵之间的互耦向量可以由阵元 1-1 与第 3 个子阵之间的互耦向量经循环移位得到, 可以表示为

$$[c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-3}]. \quad (14)$$

同理得到第 1 个子阵各阵元与第 3 个子阵之间的互耦向量, 最终得到第 1 个子阵与第 3 个子阵之间的互耦矩阵 $\mathbf{C}_{13}$, 其表达式如下:

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} \\ c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} \\ c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} \\ c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} \\ c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} \\ c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} \\ c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} \\ c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

可以看出 $\mathbf{C}_{13}$ 呈循环对称 Toeplitz 分布, 若设 $\mathbf{C}_{13}$ 的循环矢量为 $\mathbf{c}_{13}$, 满足 $\mathbf{c}_{13} = [c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5}]^T$, 则 $\mathbf{C}_{13}$ 可以表示为

$$\mathbf{C}_{13} = Cir_sym_T(\mathbf{c}_{13}), \quad (16)$$

其中 $Cir_sym_T(\cdot)$ 表示得到某向量对应的循环对称 Toeplitz 矩阵. 同理可以得到 $\mathbf{C}_{12}$, $\mathbf{C}_{23}$, $\mathbf{C}_{12}^*$, $\mathbf{C}_{13}^*$, $\mathbf{C}_{23}^*$ 均呈循环对称 Toeplitz 分布.

4 互耦校正的数学基础

设 $\mathbf{D}$ 为任意 $N \times N$ 维的循环对称 Toeplitz 矩阵, $\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_L]^T$ 为 $\mathbf{D}$ 的循环向量. 其中 $d_i = D_{1,i}$, $i = 1, 2, \dots, L$, L 为 $\mathbf{D}$ 的自由度, 满足

$$L = \begin{cases} N/2 + 1, & N \text{ 为偶数}, \\ (N+1)/2, & N \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

设 $\mathbf{D}_{\text{up}}$ 为与 $\mathbf{D}$ 对应的循环上三角 Toeplitz 矩阵, $\mathbf{D}_{\text{low}}$ 为 $\mathbf{D}_{\text{up}}$ 对应的循环下三角 Toeplitz 矩阵, $\mathbf{D}_{\text{neg}}$ 为与 $\mathbf{D}$ 对应的循环反对称 Toeplitz 矩阵, $\mathbf{D}_h$ 为与 $\mathbf{D}$ 对应的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵. 各矩阵分别满足:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\text{up}})_{ij} &= \begin{cases} (\mathbf{D})_{ij}, & j \geq i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} & (\mathbf{D}_{\text{low}})_{ij} &= \begin{cases} (\mathbf{D}_{\text{up}})_{ji}^*, & i > j, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \\ (\mathbf{D}_{\text{neg}})_{ij} &= \begin{cases} (\mathbf{D})_{ij}, & j \geq i, \\ -(\mathbf{D})_{ij}, & \text{其他}. \end{cases} & (\mathbf{D}_h)_{ij} &= \begin{cases} (\mathbf{D})_{ij}, & j \geq i, \\ (\mathbf{D})_{ij}^*, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

4.1 循环对称 Toeplitz 矩阵特性

已知任意一个 $N \times 1$ 维复向量 $\mathbf{X}$ 和一个任意 $N \times N$ 维循环对称 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{D}$, 则有下面等式成立^[11]:

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{T}[\mathbf{X}]\mathbf{d}, \quad (18)$$

其中 $\mathbf{T}[\mathbf{X}] = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ 是 $N \times L$ 维变换矩阵, 满足

$$\begin{aligned} [T_1]_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1}, & i+j \leq N+1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} & [T_2]_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1}, & i \geq j \geq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \\ [T_3]_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{X}_{N+1+i-j}, & i < j \leq k, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} & k &= \begin{cases} N/2, & N \text{ 为偶数}, \\ (N+1)/2, & N \text{ 为奇数}. \end{cases} \\ [T_4]_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1-N}, & 2 \leq j \leq k, i+j \geq N+2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

若将 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}^*$ 分别按实部加虚部形式展开, 即 $\mathbf{D} = \text{Re}(\mathbf{D}) + \text{jIm}(\mathbf{D})$, $\mathbf{D}^* = \text{Re}(\mathbf{D}) - \text{jIm}(\mathbf{D})$. 则对于任意 $N \times 1$ 维的复向量 $\mathbf{X}$, 有下式成立:

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}[\mathbf{X}] & \text{j}\mathbf{T}[\mathbf{X}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \triangleq T_{\text{sym-pos}}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{D}^*\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}[\mathbf{X}] & -\text{j}\mathbf{T}[\mathbf{X}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \triangleq T_{\text{sym-neg}}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

另外, $\mathbf{D}\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{D}^*\mathbf{X}$ 也可以表达为

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}[\mathbf{X}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix} \triangleq T_{\text{sym1}}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{D}^*\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}[\mathbf{X}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix} \triangleq T_{\text{sym2}}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix}. \quad (22)$$

4.2 循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵特性

设 $\mathbf{D}$ 为 $N \times N$ 维的循环对称 Toeplitz 矩阵, $\mathbf{D}_h$ 为与 $\mathbf{D}$ 对应的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵.

性质 1 $\mathbf{D}_h$ 按实部加虚部的形式展开, 即 $\mathbf{D}_h = \text{Re}(\mathbf{D}_h) + \text{jIm}(\mathbf{D}_h)$. 容易看出 $\text{Re}(\mathbf{D}_h)$ 为循环对称 Toeplitz 矩阵, $\text{Im}(\mathbf{D}_h)$ 为循环反对称 Toeplitz 矩阵. 若设与 $\text{Im}(\mathbf{D}_h)$ 对应的循环对称 Toeplitz 矩阵为 $\mathbf{D}_{\text{im}}$, 与 $\mathbf{D}_{\text{im}}$ 对应的循环上三角 Toeplitz 矩阵为 $\mathbf{D}_{\text{im-up}}$, 则 $\text{Im}(\mathbf{D}_h)$ 可表示为

$$\text{Im}(\mathbf{D}_h) = 2\mathbf{D}_{\text{im-up}} - \mathbf{D}_{\text{im}}. \quad (23)$$

则对于任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 $\mathbf{X}$, 下式成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h \mathbf{X} &= [\text{Re}(\mathbf{D}_h) + \text{j}(2\mathbf{D}_{\text{im-up}} - \mathbf{D}_{\text{im}})] \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}[\mathbf{X}] & \text{j}\{2\mathbf{T}_{\text{up}}[\mathbf{X}] - \mathbf{T}[\mathbf{X}]\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{h1}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

变换矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{up}}[\mathbf{X}] &= \mathbf{T}_{\text{up1}} + \mathbf{T}_{\text{up2}}, \quad [\mathbf{T}_{\text{up1}}]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1}, & i+j \leq N+1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ [\mathbf{T}_{\text{up2}}]_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{X}_{N+1+i-j} & \begin{cases} j \geq i+1, j < L, & N \text{为偶数}, \\ j \geq i+1, & N \text{为奇数}, \end{cases} \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

性质 2 若设 $\mathbf{D}_{\text{hup}}$ 为与 $\mathbf{D}_h$ 对应的循环上三角 Toeplitz 矩阵, 设 $\mathbf{D}_{\text{hlow}}$ 为与 $\mathbf{D}_{\text{hup}}$ 对应的循环下三角 Toeplitz 矩阵, 将 $\mathbf{D}_h$ 按上三角矩阵加下三角矩阵的形式展开, 即 $\mathbf{D}_h = \mathbf{D}_{\text{hup}} + \mathbf{D}_{\text{hlow}}$. 则对于任意 $N \times 1$ 维的复向量 $\mathbf{X}$, 下式成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h \mathbf{X} &= (\mathbf{D}_{\text{hup}} + \mathbf{D}_{\text{hlow}}) \mathbf{X} = \mathbf{D}_{\text{hup}} \mathbf{X} + \mathbf{D}_{\text{hlow}} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{up}}[\mathbf{X}] & \mathbf{T}_{\text{low}}[\mathbf{X}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\text{up}} \\ \mathbf{d}_{\text{low}} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{h2}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\text{up}} \\ \mathbf{d}_{\text{low}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

变换矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{low}}[\mathbf{X}] &= \mathbf{T}_{\text{low1}} + \mathbf{T}_{\text{low2}}, \quad [\mathbf{T}_{\text{low1}}]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i-j+1}, & i \geq j, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \\ [\mathbf{T}_{\text{low2}}]_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-N-1}, & \begin{cases} i+j \geq N+2, j < L, & N \text{为偶数}, \\ i+j \geq N+2, & N \text{为奇数}, \end{cases} \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

5 圆台阵互耦矩阵分解模型

由上可知, $P = 3, Q = 8$ 时, 圆台阵列的互耦矩阵 $\mathbf{Z}$ 可表示为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{12}^* & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{13}^* & \mathbf{C}_{23}^* & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中主对角子阵 $\mathbf{Z}_i$ 呈循环复共轭对称 Toeplitz 分布, 其余各子阵列均呈循环对称 Toeplitz 分布. 当阵列存在互耦时, 实际导向矢量 $\mathbf{a}_r$ 可以表示为 $\mathbf{a}_r = \mathbf{Z}\mathbf{a}$, 设 $\mathbf{a}(\theta, \phi) = [\mathbf{a}_1^T(\theta, \phi) \ \mathbf{a}_2^T(\theta, \phi) \ \mathbf{a}_3^T(\theta, \phi)]^T$, 其中 $\mathbf{a}_i(\theta, \phi)$ ($i = 1, 2, 3$) 分别为第 i 个子圆环阵列在 (θ, ϕ) 方向的理想导向矢量, 则实际导向矢量 $\mathbf{a}_r$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r(\theta, \phi) &= \mathbf{Z}\mathbf{a}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{12}^* & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{13}^* & \mathbf{C}_{23}^* & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta, \phi) \\ \mathbf{a}_2(\theta, \phi) \\ \mathbf{a}_3(\theta, \phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1\mathbf{a}_1(\theta, \phi) + \mathbf{C}_{12}\mathbf{a}_2(\theta, \phi) + \mathbf{C}_{13}\mathbf{a}_3(\theta, \phi) \\ \mathbf{C}_{12}^*\mathbf{a}_1(\theta, \phi) + \mathbf{Z}_2\mathbf{a}_2(\theta, \phi) + \mathbf{C}_{23}\mathbf{a}_3(\theta, \phi) \\ \mathbf{C}_{13}^*\mathbf{a}_1(\theta, \phi) + \mathbf{C}_{23}^*\mathbf{a}_2(\theta, \phi) + \mathbf{Z}_3\mathbf{a}_3(\theta, \phi) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

模型 1 由循环对称 Toeplitz 矩阵性质和循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵性质 1 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r(\theta, \phi) &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym-pos}}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{T}_{\text{sym-pos}}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym-neg}}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym-pos}}[\mathbf{a}_3] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym-neg}}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{T}_{\text{sym-neg}}[\mathbf{a}_2] \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ &\triangleq \mathbf{G}_1[\mathbf{a}(\theta, \phi)] \mathbf{v}_1, \end{aligned} \quad (28)$$

其中向量 $\mathbf{v}_1$ 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(z_1) \\ \text{Im}(z_1(2:L)) \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_2(2:L)) \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \text{Re}(z_3) \\ \text{Im}(z_3(2:L)) \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} \text{Re}(c_{12}) \\ \text{Im}(c_{12}) \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \text{Re}(c_{13}) \\ \text{Im}(c_{13}) \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \text{Re}(c_{23}) \\ \text{Im}(c_{23}) \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (29)$$

式中 L 为子互耦矩阵的自由度, 由 $Q = 8$ 得到 $L = 5$. $\mathbf{z}_i$ 表示 $\mathbf{Z}_i$ 的循环矢量, 且 $\mathbf{z}_i$ 的首元素为 1, $\mathbf{c}_{ij}$ 表示 $\mathbf{C}_{ij}$ 的循环矢量, $\mathbf{z}_i(2:L)$ 表示向量 $\mathbf{z}_i$ 中第 2 个至第 L 个元素组成的列向量. 考虑 $\text{Im}(\mathbf{z}_i)$ 的首元素为 0, 实际中通常选择 $\mathbf{z}_i$ 中的未知非零元素来构造待求解的互耦向量. 矩阵操作 $\tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\cdot] = \mathbf{T}_{h1}[\cdot]_{(:,L+1)=\emptyset}$, 即矩阵 $\tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\cdot]$ 与矩阵 $\mathbf{T}_{h1}[\cdot]$ 剔除第 $L+1$ 列之后的矩阵相同. $\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{v}_1$ 之间

满足:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \text{Cir_her_sym_T}(z_1) & \text{Cir_sym_T}(c_{12}) & \text{Cir_sym_T}(c_{13}) \\ \text{Cir_sym_T}(c_{12}^*) & \text{Cir_her_sym_T}(z_2) & \text{Cir_sym_T}(c_{23}) \\ \text{Cir_sym_T}(c_{13}^*) & \text{Cir_sym_T}(c_{23}^*) & \text{Cir_her_sym_T}(z_3) \end{bmatrix} \triangleq f_1[\mathbf{v}_1]. \quad (30)$$

模型 2 由循环对称 Toeplitz 矩阵性质和循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵性质 2 可以得到

$$\mathbf{a}_r(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym}1}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{T}_{\text{sym}1}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym}2}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym}1}[\mathbf{a}_3] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym}2}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{T}_{\text{sym}2}[\mathbf{a}_2] \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 \triangleq \mathbf{G}_2[\mathbf{a}(\theta, \phi)] \mathbf{v}_2, \quad (31)$$

其中向量 $\mathbf{v}_2$ 可表示为

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1\text{up}} \\ \mathbf{z}_{1\text{low}}(2:L) \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{2\text{up}} \\ \mathbf{z}_{2\text{low}}(2:L) \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{3\text{up}} \\ \mathbf{z}_{3\text{low}}(2:L) \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_{12}^* \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{13} \\ \mathbf{c}_{13}^* \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{23} \\ \mathbf{c}_{23}^* \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^T, \quad (32)$$

式中 $\mathbf{z}_{i\text{up}}$ 的首元素为 1, $\mathbf{z}_{i\text{low}}$ 的首元素为 0, 构造互耦向量时将其剔除, $\mathbf{c}_{ij}$ 表示 $\mathbf{C}_{ij}$ 的循环矢量, 矩阵操作 $\tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\cdot] = \mathbf{T}_{h2}[\cdot]_{(:,L+1)=[]}$. $\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{v}_2$ 之间满足:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \text{Cir_up_low}(\mathbf{z}_{1\text{up}}, \mathbf{z}_{1\text{low}}) & \text{Cir_sym_T}(c_{12}) & \text{Cir_sym_T}(c_{13}) \\ \text{Cir_sym_T}(c_{12}^*) & \text{Cir_up_low}(\mathbf{z}_{2\text{up}}, \mathbf{z}_{2\text{low}}) & \text{Cir_sym_T}(c_{23}) \\ \text{Cir_sym_T}(c_{13}^*) & \text{Cir_sym_T}(c_{23}^*) & \text{Cir_up_low}(\mathbf{z}_{3\text{up}}, \mathbf{z}_{3\text{low}}) \end{bmatrix} \triangleq f_2[\mathbf{v}_2], \quad (33)$$

其中 $\text{Cir_up_low}(\mathbf{z}_{i\text{up}}, \mathbf{z}_{i\text{low}})$ 表示由向量组 $(\mathbf{z}_{i\text{up}}, \mathbf{z}_{i\text{low}})$ 生成的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵.

6 互耦参数与 DOA 联合估计

设信源数为 M , 由子空间原理可定义如下代价函数:

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_r^H(\theta_m, \phi_m) \mathbf{U}_{\text{nr}} \mathbf{U}_{\text{nr}}^H \mathbf{a}_r(\theta_m, \phi_m) \\ &= \sum_{m=1}^M [\mathbf{Z} \mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)]^H \mathbf{U}_{\text{nr}} \mathbf{U}_{\text{nr}}^H [\mathbf{Z} \mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)] \\ &= \mathbf{v}_i^H \left\{ \sum_{m=1}^M G_i^H[a(\theta_m, \phi_m)] \mathbf{U}_{\text{nr}} \mathbf{U}_{\text{nr}}^H G_i[a(\theta_m, \phi_m)] \right\} \mathbf{v}_i, \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $i = 1, 2$ 分别对应两种模型, J_1 为第 1 个模型的代价函数, J_2 为第 2 个模型的代价函数, U_{nr} 表示阵列的实际噪声子空间. 由于模型 1 中, v_1 为实向量, 为了得到实数解, 将 J_1 做如下修正:

$$J_1 = v_i^H \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M G_i^H [\mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)] U_{nr} U_{nr}^H G_i [\mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)] \right\} v_i. \quad (35)$$

修正后的代价函数为实函数, 可以得到实数解. 由此分别令

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M G_1^H [\mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)] U_{nr} U_{nr}^H G_1 [\mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)] \right\}, \\ \Omega_2 &= \sum_{m=1}^M G_2^H [\mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)] U_{nr} U_{nr}^H G_2 [\mathbf{a}(\theta_m, \phi_m)]. \end{aligned}$$

当信源为真实方向时, 代价函数取最小值, 则上述互耦校正可以等价于下面的多点约束优化问题:

$$\begin{cases} \min_{v_i} v_i^H \Omega_i v_i, \\ \text{s.t. } v_i^H \mathbf{w} = \mathbf{F}^H, \end{cases} \quad (36)$$

其中 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$, 满足

$$\mathbf{w}_1 = \left[\underbrace{1, 0, \dots, 0}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{11L-3} \right]^T, \mathbf{w}_2 = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{2L-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{9L-2} \right]^T, \mathbf{w}_3 = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{4L-2}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{7L-1} \right]^T,$$

$\mathbf{F}$ 为约束矩阵, 满足 $\mathbf{F} = [1, 1, 1]^T$. 由式 (36) 可解得 v_i 的估计

$$\hat{v}_i = \Omega_i^{-1} \mathbf{w} (\mathbf{w}^T \Omega_i^{-1} \mathbf{w})^{-1} \mathbf{F}. \quad (37)$$

由 $\hat{v}_i$ 即可得到圆台共形阵列互耦矩阵估计值

$$\hat{\mathbf{Z}}_i = f_i [\hat{v}_i]. \quad (38)$$

由以上分析可知, 圆台共形阵列互耦参数的估计可以直接由信源 DOA 估计获得, 同时, 互耦参数重构出的互耦矩阵有助于得到更准确的 DOA 估计, 若将两种操作迭代进行, 在代价函数趋于收敛的过程中即可实现圆台共形阵列互耦参数与 DOA 的联合估计. 所以, 算法的实现流程可按如下步骤进行:

步骤 1 初始化 $l = 0$, 同时令 $\hat{\mathbf{Z}}_i^l = \mathbf{Z}_0$, 其中 $\mathbf{Z}_0$ 为根据先验知识得到的圆台阵列互耦矩阵初始值, 然后利用圆台阵列实际接收数据估计数据协方差矩阵, 将其进行特征值分解得到阵列实际的噪声子空间 U_{nr} .

步骤 2 由下式计算空间谱:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta, \phi) = \frac{1}{\left| U_{nr}^H \hat{\mathbf{Z}}_i^l \mathbf{a}(\theta, \phi) \right|^2}, \quad (39)$$

并进行谱峰搜索, 得到信源方位估计值进行 DOA 估计值 $(\hat{\theta}_m^l, \hat{\phi}_m^l) (m = 1, 2, \dots, M)$.

步骤 3 得到第 $l+1$ 次迭代的互耦向量的估计值 $\hat{v}_i^{l+1}$ 以及第 $l+1$ 次迭代的互耦矩阵估计值

$$\hat{v}_i^{l+1} = (\Omega_i^l)^{-1} \mathbf{w} [\mathbf{w}^T (\Omega_i^l)^{-1} \mathbf{w}]^{-1} \mathbf{F}, \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_i^{l+1} = f_i [\hat{v}_i^{l+1}]. \quad (41)$$

步骤 4 判断是否收敛, 若收敛则停止, 否则 $l = l+1$, 并跳转至步骤 2, 继续迭代, 收敛条件为 $\mathbf{J}_i^{(l-1)} - \mathbf{J}_i^{(l)} \leq \varepsilon$, 其中 $\mathbf{J}_i^{(l)} = (\hat{v}_i^{l+1})^H \Omega_i^l (\hat{v}_i^{l+1})$.

由上述步骤即可实现存在互耦误差时的圆台共形阵列的 DOA 估计. 两种模型中, 模型 1 经过代价函数修正后, 分别得到互耦向量实部和虚部的实向量解, 进而可以较准确地构造互耦矩阵. 而模型 2 对互耦向量共轭约束进行了松弛处理, 使得该模型下构造的互耦矩阵存在偏差. 所以模型 1 尽管丢弃了代价函数的部分信息, 但其性能却得到了改善, 即模型 1 性能优于模型 2. 另外由于所提的两种误差校正模型均基于矩阵分解原理, 这里将所提算法统称为 MF(matrix factoring) 算法, 模型 1、模型 2 对应的校正算法分别称为 MF1 算法、MF2 算法.

设信源个数为 M , 圆台阵列由 P 层均匀圆阵组合而成, 每个圆阵的阵元个数为 Q , 则由式 $\mathbf{a}_r(\theta, \phi) = \mathbf{G}_i[\mathbf{a}(\theta, \phi)]v_i$ 可知, 未知向量中参数的个数为 $2L(C_P^2 + P) - 2P$, 其中 L 为各子阵列互耦矩阵的自由度. M 个信源可得到的方程个数为 $2PQM$, 要解出向量 v_i , 需满足 $2L(C_P^2 + P) - 2P < 2PQM$, 解得信源个数 M 需满足:

$$M > \frac{L\left(\frac{P-1}{2} + 1\right) - 1}{Q}. \quad (42)$$

7 仿真实验

在仿真实验中, 采用图 2 所示结构的圆台共形阵列 (其俯视图如图 3 所示), 取圆台阵列层数 $P = 3$, 每个圆阵上的阵元个数 $Q = 8$, 圆台高度 $H = \lambda$, 圆台底面半径 $R = \lambda$, 圆台斜边倾角 $\gamma = 60^\circ$. 当系统工作于 L 波段时, 该参数下的阵列尺寸较小, 可能无法满足实际要求. 实际中只需结合需要对圆台共形阵列层数以及每层阵元个数进行修改, 此时互耦结构不会发生改变, 文中所提方法依然适用. 空间信源个数设为 4, 各信源方位分别为: $(\theta_1, \phi_1) = (57^\circ, 1^\circ)$, $(\theta_2, \phi_2) = (139^\circ, 37^\circ)$, $(\theta_3, \phi_3) = (34^\circ, 3^\circ)$, $(\theta_4, \phi_4) = (113^\circ, 1^\circ)$. 设圆台阵列中阵元 i 与阵元 j 间的互耦系数服从均值为 0, 方差为 $\sigma_{i,j}$ 的高斯分布, 其中 $\sigma_{i,j} = \sigma_{3-1,3-2}d_{3-1,3-2}/d_{i,j}$, $d_{i,j}$ 为阵元 i 与阵元 j 的间距, $\sigma_{3-1,3-2}$ 为阵元 3-1 与阵元 3-2 之间互耦系数的方差, 以 $\sigma_{3-1,3-2}$ 来衡量互耦误差的大小. 利用 CMS 算法进行实验对比时, 为了充分说明其误差校正性能, 选取两组校正源分别进行实验仿真. 第一组校正源其方位角在 $[10^\circ, 170^\circ]$ 内等 20° 间隔均匀分布, 俯仰角在 $[10^\circ, 70^\circ]$ 内等 20° 间隔均匀分布, 各校正源由方位角和俯仰角组合而成, 校正源个数为 36, 简单起见, 将利用第一组校正源进行的实验仿真记为 “CMS(1)”; 第二组校正源其方位角在 $[15^\circ, 165^\circ]$ 内等 15° 间隔均匀分布, 俯仰角在 $[15^\circ, 75^\circ]$ 内等 30° 间隔均匀分布, 各校正源由方位角和俯仰角组合而成, 校正源个数为 33, 简单起见, 将利用第二组校正源进行的实验仿真记为 “CMS(2)”.

实验中为了衡量互耦误差校正的性能, 用 $\rho = \frac{|\hat{\mathbf{a}}^H \tilde{\mathbf{a}}|}{\sqrt{|\hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}| \cdot |\tilde{\mathbf{a}}^H \tilde{\mathbf{a}}|}}$ 来衡量向量 $\hat{\mathbf{a}}$ 和向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 之间的相关系数, 其中 $\tilde{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{a}}$ 分别为 (θ, ϕ) 方位的实际导向矢量和估计得到的导向矢量, 满足 $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{Z}}\mathbf{a}(\hat{\theta}, \hat{\phi})$, $\hat{\mathbf{Z}}$ 和 $(\hat{\theta}, \hat{\phi})$ 分别为互耦矩阵估计值和信源方位估计值. 相关系数数值越大, 表示两个向量之间夹角越小或两个向量的方向越一致.

图 4 DOA 估计均方根误差和平均相关系数随信噪比变化曲线

Figure 4 RMSE of DOA estimation and average correlation coefficient versus SNR curves. (a) RMSE of DOA estimation; (b) average correlation coefficient

实验 1: 取互耦误差为 0.1, 将信噪比由 -10 dB 变化至 20 dB, 各信源方位不变, 考察方位 $(\theta, \phi) = (34^\circ, 3^\circ)$ 处信源的 DOA 估计性能和 4 个信源方位处的平均相关系数. 分别经过 1000 次独立的蒙特卡洛 (Monte Carlo) 实验, 得到校正前和经过 MF 方法、CMS 方法分别进行校正的 DOA 估计性能和平均相关系数随信噪比变化曲线, 如图 4 所示.

可以看出, 信噪比越大, 各种算法的 DOA 估计性能越好. 同一信噪比下, MF 算法的 DOA 估计性能均要好于校正前的 DOA 估计性能, 且 MF1 性能好于 MF2. 信噪比较低时, CMS(1) 的 DOA 估计性能要差于校正前, 随着信噪比的增大, 其 DOA 估计性能逐渐好于本文两种模型的性能. 而 CMS(2) 的 DOA 估计性能始终是最差的. 由此可以看出, 相对于 CMS 方法, MF 方法在 DOA 估计方面具有较低的信噪比门限.

导向矢量相关性方面, CMS 方法的平均相关系数受信噪比影响较大, 在低信噪比时估计出的导向矢量与实际导向矢量之间相关性较差. CMS(1) 的性能随信噪比增加而趋于最优, 而 CMS(2) 的整体性能均较差. 本文 MF1 方法的平均相关系数基本受信噪比影响, 且优于 MF2 方法. 高信噪比时, MF1 方法与 CMS(1) 方法性能接近, 而在低信噪比时, MF1 方法具有明显优势, 再次证实了本文算法具有较低的信噪比门限.

实验 2: 取信噪比为 20 dB, 将互耦误差由 0 变化至 0.2 , 其余条件同实验 1, 经过 1000 次独立的蒙特卡洛实验, 得到校正前和经过本文两种方法校正以及 CMS 方法在两种校正源配置下分别进行校正的 DOA 估计性能和平均相关系数随互耦误差变化曲线, 如图 5 所示.

DOA 估计方面, 若不进行互耦校正, 直接进行 DOA 估计的性能会随互耦误差的增大而迅速恶化. 利用 CMS 方法进行 DOA 估计的性能基本不随互耦误差变化, 但受校正源配置影响较大, 第一组校正源配置下的 DOA 估计性能较为优越, 而在第二组校正源配置下进行 DOA 估计其性能很差. 利用本文两种模型进行 DOA 估计, 其性能相比于校正前有所改善, MF1 的估计性能优于 MF2. 另外可以看出, 本文两种模型的 DOA 估计性能会受到互耦误差的影响, 且随互耦误差的增大而恶化, 这是由于互耦误差较大时, 算法由于初始 DOA 估计偏差较大而易导致最终收敛于局部最优点, 从而不能较好地实现 DOA 估计, 这也是一般自校正算法不可避免的缺点.

导向矢量相关性方面, 互耦误差校正前, 导向矢量相关性随互耦误差的增大而急剧恶化. CMS 方法校正后的导向矢量相关性基本不受互耦误差影响, CMS(1) 性能较为优越, 而 CMS(2) 性能较差. 利用 MF 方法进行误差校正其平均相关系数会受到互耦误差的影响, 互耦误差较小时, MF 方法的性能

图5 DOA 估计均方根误差和平均相关系数随互耦误差变化曲线

Figure 5 RMSE of DOA estimation and average correlation coefficient versus mutual coupling error curves. (a) RMSE of DOA estimation; (b) average correlation coefficient

同 CMS 方法在第一组校正源配置下的性能接近, 随着互耦误差增大, 本文方法得到的导向矢量相关性逐渐下降, 相比于 MF1 模型, 本文的 MF2 模型受互耦误差的影响较大, 但其平均相关系数要高于 CMS 方法在第二组校正源配置下的性能. 同样得出结论, 互耦误差较小时, MF 方法性能较优, 而随着互耦误差的增大, 两种模型的误差校正能力也会相应变差.

8 结论

本文通过对圆台阵列互耦特性进行分析, 推导出了圆台共形阵列的互耦模型, 在此模型下利用多维联合迭代方法实现了存在互耦误差时的圆台共形阵列 DOA 估计. 文中分析和仿真均是在圆台共形阵列下进行的, 由于圆柱阵列、圆锥阵列均可视为圆台阵列的特例, 使得本文方法在圆柱形、圆锥形共形阵列上依然适用. 理论分析和仿真实验表明所提算法可以改善信源的 DOA 估计性能, 使得估计得到的导向矢量更接近于实际导向矢量, 且所提算法具有较低的信噪比门限, 可为共形阵列的工程应用提供参考. 所提算法的缺点是, 当互耦误差较大时算法容易收敛至局部最优点而导致最终的 DOA 估计误差较大, 此时估计出的导向矢量与实际导向矢量之间相关性变差. 另外, 文中算法只能实现特定结构共形阵列存在互耦误差时的 DOA 估计, 当阵列一般为一般结构时如何进行互耦校正还需进一步探讨和研究.

参考文献

- 1 Mailloux R J. Conformal array antenna theory and design. IEEE Antennas Propag, 2007, 49: 126-127
- 2 Wang B H, Guo Y, Wang Y L, et al. Array manifold modeling for conformal array antenna. Acta Electron Sin, 2009, 37: 481-484 [王布宏, 郭英, 王永良, 等. 共形天线阵列流形的建模方法. 电子学报, 2009, 37: 481-484]
- 3 Blomberg A E A, Austeng A, Hansen R E. Adaptive beamforming applied to a cylindrical sonar array using an interpolated array transformation. IEEE J Oceanic Eng, 2012, 37: 25-34
- 4 Yang P, Yang F, Nie Z P, et al. Robust beamformer using manifold separation technique for semispherical conformal array. IEEE Antenn Wirel Propag Lett, 2011, 10: 1035-1038
- 5 Pan Z H, Li D J, Zhang Q J, et al. Airborne MMW InSAR interferometry based on time varying baseline and BP algorithm. In: Proceedings of 2012 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Munich, 2012.

- 7412–7415
- 6 Teng X, Li D J. Stationary targets imaging and moving targets detection based on airship conformal sparse array. In: Proceedings of 2011 3rd International Asia-Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar, Seoul, 2011. 1–4
 - 7 Belloni F, Richter A, Koivunen V. DoA estimation via manifold separation for arbitrary array structures. *IEEE Trans Signal Proces*, 2007, 55: 4800–4810
 - 8 Costa M, Richter A, Koivunen V. Unified array manifold decomposition based on spherical harmonics and 2-D Fourier basis. *IEEE Trans Signal Proces*, 2010, 58: 4634–4645
 - 9 Friedlander B. The root-MUSIC algorithm for direction finding with interpolated arrays. *Signal Process*, 1993, 30: 15–29
 - 10 Zou L, Lasenby J, He Z. Direction and polarisation estimation using polarised cylindrical conformal arrays. *IET Signal Process*, 2012, 6: 395–403
 - 11 Friedlander B, Weiss A J. Direction finding in the presence of mutual coupling. *IEEE Trans Antenn Propag*, 1991, 39: 273–284
 - 12 Wang B H, Wang Y L, Chen H, et al. Robust DOA estimation and array calibration in the presence of mutual coupling for uniform linear array. *Sci China Ser E: Tech Sci*, 2004, 34: 229–240 [王布宏, 王永良, 陈辉, 等. 均匀线阵互耦条件下的鲁棒 DOA 估计及互耦自校正. *中国科学 E 辑: 技术科学*, 2004, 34: 229–240]
 - 13 Ye Z F, Liu C. 2-D DOA estimation in the presence of mutual coupling. *IEEE Trans Antenn Propag*, 2008, 56: 3150–3158
 - 14 Lin M, Yang L X. Blind calibration and DOA estimation with uniform circular arrays in the presence of mutual coupling. *IEEE Antenn Wirel Propag Lett*, 2006, 5: 315–318
 - 15 Wu B, Chen H, Yang C H. Study of DOA estimation and self-calibration algorithm for L-shaped array in the presence of mutual coupling. *Acta Electron Sin*, 2010, 38: 1316–1322 [吴彪, 陈辉, 杨春华. 基于 L 型阵列的方位估计及互耦自校正算法研究. *电子学报*, 2010, 38: 1316–1322]
 - 16 Liang J, Zeng X, Wang W, et al. L-shaped array-based elevation and azimuth direction finding in the presence of mutual coupling. *Signal Process*, 2011, 91: 1319–1328
 - 17 Liu C, Ye Z, Zhang Y. Auto calibration algorithm for mutual coupling of planar array. *Signal Process*, 2010, 90: 784–794
 - 18 Carlin H J. On the physical reliability of linear non-reciprocal networks. *P IRE*, 1955, 43: 608–616
 - 19 Liang C H, Li L, Shi X W. Lossless constraint conditions of non-reciprocal networks. *J Electron Inform Technol*, 2003, 25: 1261–1267 [梁昌洪, 李龙, 史小卫. 非互易网络的无耗约束条件. *电子与信息学报*, 2003, 25: 1261–1267]
 - 20 Yu Y T, Hui T H. Design of a mutual coupling compensation network for a small receiving monopole array. *IEEE Trans Microw Theory*, 2011, 59: 2241–2245
 - 21 Wang B H, Hou Q S, Guo Y, et al. Mutual coupling calibration for conformal array antenna with instrumental sensors. *Acta Electron Sin*, 2009, 37: 1283–1288 [王布宏, 侯青松, 郭英, 等. 共形阵列天线互耦校正的辅助阵元法. *电子学报*, 2009, 37: 1283–1288]
 - 22 See C M S. Sensor array calibration in the presence of mutual coupling and unknown sensor gains and phases. *Electron Lett*, 1994, 30: 373–374

DOA estimation for truncated cone conformal array in the presence of mutual coupling

ZHANG XueJing^{1*}, YANG ZhiWei¹, LIAO GuiSheng¹ & HE Shun^{1,2}

1 *National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China;*

2 *College of Communication, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China*

*E-mail: xjzhang7@163.com

Abstract When mutual coupling error exists in the sensor array, the ideal steering vector differs from the actual steering vector, leading to degradation of the performance of some eigenstructure-based direction-finding methods. According to the truncated cone conformal array (TCCA) and on the premise of mutual coupling matrix (MCM) having a complex symmetric structure in this paper, we deduces the MCM model of TCCA by detailed analysis of its mutual coupling characteristics. We establish two models of mutual coupling error calibration, and realize the DOA estimation in the presence of mutual coupling by applying the multidimensional joint iteration method to these two models respectively. The correlation between the estimated steering vector and the actual steering vector becomes more closely, and these two proposed methods have an advantage of low signal-to-noise ratio (SNR) threshold. Theoretical analysis and extensive simulations verify the effectiveness of the proposed methods, and results of this paper can provide a reference for the engineering applications of conformal arrays.

Keywords truncated cone conformal array, mutual coupling calibration, DOA estimation, self-calibration, Toeplitz matrix

ZHANG XueJing was born in 1988. He received the B.S. degree in electrical engineering from the Huaqiao University, Xiamen, China, in 2011. Currently, He is working toward the M.S. degree in the Department of Electrical Engineering, Xidian University, Xi'an, China. His research interests include array signal processing and adaptive signal processing.

target indication algorithms for the space-borne SAR/GMTI systems.

YANG ZhiWei was born in 1980. He received the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering from Xidian University, Xi'an, China, in 2005 and 2008, respectively. He is currently an Associate Professor with the National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University. His research interests include adaptive array signal processing, space-time-polarimetric adaptive processing, and the ground moving

LIAO GuiSheng was born in 1963. He received the B.S. degree in mathematics from Guangxi University, Nanning, China, in 1985 and the M.S. degree in computer science and the Ph.D. degree in electronic engineering, both from Xidian University, Xi'an, China, in 1990 and 1992, respectively. He joined the National Laboratory of Radar Signal Processing of Xidian University in 1992, where he is currently a Full Professor and a Vice Director of the lab. His research interests are mainly in statistical and array signal processing, space-time adaptive processing, synthetic aperture radar (SAR), signal processing for radar and communication, and smart antenna for wireless communication. Dr. Liao is a senior member of Chinese Institute of Electronics.

HE Shun was born in 1980. She is working toward the Ph.D. degree in the Department of Electrical Engineering, Xidian University, Xi'an, China. Her research interest is adaptive signal processing.