几个映射类的半群结构及性质

献给张芷芬教授 90 华诞

李翠萍

北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191

E-mail: cuipingli@buaa.edu.cn

收稿日期: 2016-06-30; 接受日期: 2016-10-27; 网络出版日期: 2016-11-14

国家自然科学基金 (批准号: 61134005) 和中央院校基础科研业务费 (批准号: 30458805 和 30459201) 资助项目

摘要 本文考虑人口动力学中的几类常见的重要映射, 如 logistic 映射: $f(x) = rx(1-x)$ ($x \in \mathbb{R}, r > 0$ 为参数) 和具有 Allee 效应的单峰 Allee 映射、Sigmoid 映射等; 研究这几类映射的某些性质 (如不动点的个数、位置及其稳定性等) 在复合运算下的可保持性; 证明这些映射在复合运算下是封闭的, 即它们构成半群, 并给出例子说明理论结果.

关键词 适应性函数 Allee 映射 周期差分方程

MSC (2010) 主题分类 37B55, 37C05, 37E05, 39A30

1 引言

近数十年来, 一种称为 Allee 效应的生物现象重新引起了人们的兴趣 (参见文献 [1]). Allee 效应是人口动力学中的一个现象, 出自生物学家 Allee [2,3]. Allee 提出人均增长率会在低人口密度时下降. 在这种情形下, 低密度人口可能会走向灭绝. Stephens 等 [4] 把 Allee 效应定义为“同种群个体适应性与种群数量或密度成正关系”. 在古典动力学中, 我们有一个负密度依赖关系, 也就是适应性会随密度的增加而降低. 而 Allee 效应产生一个正的密度依赖关系, 那就是适应性会随密度增加而增加.

在具有 Allee 效应的各种单种群模型中, 适应性函数 $f(x)$ 一般具有如下性质: $f(x)$ 的图像过原点; 在原点附近位于对角线 $y = x$ 下方; 与对角线有两个交点 (图 1). 称第一个交点为 Allee 阈值 (A), 另一个交点为承载能力 (K). 例如, λ -Ricker 映射

$$R_p(x) = x^\lambda e^{p-x}, \quad \lambda > 1, \quad p > 0. \quad (1.1)$$

我们知道, 对 k -周期迭代映射

$$x_{n+1} = R_{p_n}(x_n), \quad (1.2)$$

如果映射 R_p 在复合运算下封闭, 则 (1.2) 的周期轨道

$$\{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\} \quad (1.3)$$

英文引用格式: Li C P. Semigroup structures and properties of some kinds of mappings (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 135–146, doi: 10.1360/N012016-00129

图 1 (a) λ -Ricker 映射; (b) Beverton-Holt 映射

的存在性及其稳定性等价于证明映射 $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 存在具有相同稳定性的不动点 s_0 , 其中

$$R = R_{p_{k-1}} \circ \cdots \circ R_{p_0},$$

这里 $R_{p_n}(x)$ 是具有某种性质的函数, p_n 为参数, 是一个 k -周期序列 $\{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$, $p_{i+k} = p_i$. 通常取承载能力作为参数. 例如, Cushing-Henson 猜想是说对周期变化的环境 $\{K_0, K_1, \dots, K_{p-1}, K_p = K_0\}$, Beverton-Holt 方程

$$x_{n+1} = \frac{\mu K x_n}{K + (\mu - 1)x_n} \quad (1.4)$$

有周期解 $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}\}$, 它吸引所有的正解, 并且平均值

$$Av(\bar{x}_n) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \bar{x}_i \quad (1.5)$$

满足 $Av(\bar{x}_n) < Av(K_n)$, 也就是说它是衰减的.

对 $p = 2$, Cushing 和 Henson [5, 6] 证明了这个猜想, 而 Elaydi 和 Sacker [7, 8] 及 Kocic [9, 10] 用不同的方法解决了一般的情形.

众所周知, 映射族的半群性质在周期差分方程 (1.2) 的研究中起到了关键的作用. 本文将考虑人口动力学模型中几类常见映射的半群性质, 也就是它们在复合运算下的封闭性质, 并对文献 [11, 定理 4.4] 给出新的证明.

为了叙述方便, 首先给出半群的定义.

定义 1.1 对于某非空集合 S , 若存在 S 上的二元运算 “ $*$ ” 使得对于任意的 $a, b \in S$, 有 $a * b \in S$ (运算封闭), 且 “ $*$ ” 在 S 上满足结合律, 即对任何 $a, b, c \in S$, 均有 $(a * b) * c = a * (b * c)$, 则称 $\{S, *\}$ 为一个半群.

2 Logistic 映射的半群性质

首先来考虑 logistic 映射 $f(x) = rx(1-x)$ ($x \in \mathbb{R}$), 其中 $r > 0$ 为参数. 我们知道, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个单峰凹 (上凸) 函数 (参见文献 [12]). 当 $r \neq 1$ 时, $f(x)$ 有唯一的非零不动点 $x_f = 1 - \frac{1}{r}$; 当 $1 < r \leq 3$ 时, 它是吸引的; 当 $0 < r < 1$ 和 $r > 3$ 时, 它是排斥的. 记函数类

$$\mathcal{F} = \{F_r(x) = rx(1-x); 0 < r \leq 2, x \in \mathbb{R}\}.$$

显然, 任何函数 $f(x) \in \mathcal{F}$ 都在点 $x = \frac{1}{2}$ 处取得最大值 $f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$. 关于 $\mathcal{F}$ 中函数的复合运算, 我们有下面的结果.

定理 2.1 假设 $f(x), g(x) \in \mathcal{F}$ 分别对应参数 r_f 和 r_g , 即

$$f(x) = r_f x(1-x), \quad g(x) = r_g x(1-x).$$

当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 存在非零不动点时, 它们的非零不动点分别记为 x_f 和 x_g , 则下面结论成立:

(i) $f \circ g$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单峰凹函数, 其最大值不超过 $\frac{1}{2}$; $f \circ g$ 有唯一的临界点 $x = \frac{1}{2}$, 它在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 上严格单调递增, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上严格单调递减.

(ii) 如果 $x_f \cdot x_g > 0$, 则 $f \circ g$ 有唯一非零的不动点 $x_{f \circ g}$. 当 $x_f \neq x_g$ 时, $x_{f \circ g}$ 位于以 x_f 和 x_g 为端点的开区间内, 并且与 x_f 或 x_g 有相同的稳定性; 当 $x_f = x_g$ 时, $x_{f \circ g} = x_f = x_g$.

(iii) 如果 $r_f = 1, r_g \neq 1$ (或者 $r_g = 1, r_f \neq 1$), 则 $f \circ g$ 有唯一非零的不动点 $x_{f \circ g}$, 且当 $r_g > 1$ 时, $x_{f \circ g} > 0$, 并且是吸引的; 而当 $r_g < 1$ 时, $x_{f \circ g} < 0$, 并且是排斥的.

(iv) 如果 $x_f \cdot x_g < 0$, 则当 $r_f \cdot r_g \neq 1$ 时, $f \circ g$ 有唯一非零不动点 $x_{f \circ g}$. 并且当 $r_f \cdot r_g > 1$ 时吸引, 当 $r_f \cdot r_g < 1$ 时排斥. 如果 $r_f \cdot r_g = 1$, 则 $f \circ g$ 没有非零不动点.

证明 (i) 对 $f(x), g(x) \in \mathcal{F}$, 我们有 $0 < r_f, r_g \leq 2$. 所以有

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}, \quad g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

以及

$$[f \circ g(x)]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

和

$$[f \circ g(x)]'' = f''(g(x)) \cdot [g'(x)]^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x) \leq 0. \quad (2.1)$$

这就证明了结论 (i).

(ii) 显然, $f \circ g(0) = 0$. 不妨设 $x_f > 0, x_g > 0$, 其他情形类似可证. 此时必有 $r_f, r_g \in (1, 2]$.

如果 $x_f > x_g > 0$, 则有

$$f(g(x_g)) = f(x_g) > x_g \quad (\text{因为当 } x \in (0, x_f) \text{ 时, } f(x) > x)$$

和

$$f(g(x_f)) < f(x_f) = x_f \quad (\text{因为 } x_f, g(x_f) \in (0, 1/2], \text{ 并且当 } x \notin (0, x_g) \text{ 时, } g(x) < x).$$

类似地, 如果 $0 < x_f < x_g$, 则有

$$f(g(x_g)) = f(x_g) < x_g \quad (\text{因为当 } x \notin (0, x_f) \text{ 时, } f(x) < x)$$

和

$$f(g(x_f)) > f(x_f) = x_f \quad (\text{因为 } x_f, g(x_f) \in (0, 1/2], \text{ 并且当 } x \in (0, x_g) \text{ 时, } g(x) > x).$$

根据介值定理和 (2.1) 立即得到, 复合函数 $f \circ g(x)$ 存在唯一的不动点 $x_{f \circ g}$, 它严格位于以 x_f 和 x_g 为端点的开区间内. 显然有 $x_{f \circ g} \leq \frac{1}{2}$.

另外, 因为 $f \circ g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凹 (上凸) 的, 所以有

$$f \circ g(x) \begin{cases} > x, & x \in (0, x_{f \circ g}), \\ < x, & x \notin (0, x_{f \circ g}). \end{cases}$$

这意味着不动点 $x_{f \circ g}$ 是吸引的 (参见文献 [13]), 即 $x_{f \circ g}$ 与 x_f 或 x_g 有相同的稳定性.

当 $x_f = x_g$ 时, 显然有 $x_{f \circ g} = x_f = x_g$ 成立. 这就证明了结论 (ii).

(iii) 如果 $r_f = 1, r_g \neq 1$, 则当 $x \neq 0$ 时, $f(x) < x$, 并且有

$$f(g(x_g)) = f(x_g) < x_g \quad \text{和} \quad [f(g(0))] = r_g.$$

于是, 存在 $x = 0$ 的某邻域 $(-\delta, +\delta)$ ($\delta > 0$), 满足

$$f \circ g(x) \begin{cases} > x, & x \in (0, +\delta), \quad \text{如果 } r_g > 1, \\ > x, & x \in (-\delta, 0), \quad \text{如果 } r_g < 1. \end{cases}$$

所以, 复合函数 $f \circ g(x)$ 存在唯一的不动点 $x_{f \circ g}$. 当 $r_g > 1$ 时, $x_{f \circ g} > 0$; 当 $r_g < 1$ 时, $x_{f \circ g} < 0$. $x_{f \circ g}$ 的稳定性证明类似于 (ii).

(iv) 由

$$[f(g(0))] = r_f \cdot r_g$$

及复合函数 $f \circ g$ 的上凸性质知, 当 $r_f \cdot r_g \neq 1$ 时, $f \circ g$ 存在唯一的不动点 $x_{f \circ g}$. 并且当 $r_f \cdot r_g > 1$ 时, $\frac{1}{2} > x_{f \circ g} > 0$, 所以它是吸引的. 当 $r_f \cdot r_g < 1$ 时, $x_{f \circ g} < 0$, 它显然是排斥的. 这就证明了结论 (iv). $\square$

例 2.1 如果 $r_n \in (0, 2]$, $\{r_n\}$ 是一个 2- 周期序列, 则非自治 logistic 映射

$$x_{n+1} = F_{r_n}(x_n) = r_n x_n (1 - x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

当 $r_0 \cdot r_1 \neq 1$ 时, 存在一个 2- 周期轨 $L = \{s_0, s_1\}$, 并且 L 在 $r_0 \cdot r_1 > 1$ 时是渐近稳定的; 当 $r_0 \cdot r_1 < 1$ 时, 是不稳定的; 如果 $r_0 \cdot r_1 = 1$, 则映射 (2.2) 没有周期轨.

证明 考虑映射

$$F = F_{r_1} \circ F_{r_0}. \quad (2.3)$$

由定理 2.1 知, 映射 (2.3) 当 $r_0 \cdot r_1 \neq 1$ 时存在唯一非零不动点 s_0 . 记 $s_1 = F_{r_1}(s_0)$, 则有

$$s_2 = F_{r_1}(s_1) = F_{r_1} \circ F_{r_0}(s_0) = s_0. \quad (2.4)$$

因此, $L = \{s_0, s_1\}$ 是映射 (2.3) 的一个 2- 周期轨, L 的稳定性与不动点 s_0 的稳定性相同. $\square$

3 Sigmoid 映射的半群性质

现在考虑 $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ 上的 Sigmoid 映射. 例如, Beverton-Holt 适应函数^[9, 14]

$$f_\delta(x) = \frac{ax^\delta}{1+x^\delta}, \quad a > 0, \quad \delta > 1$$

就是这样的映射.

定义 3.1 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $\mathbb{R}^+$ 上, 记

$$\mathcal{F}_0 = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid f(0) = 0, f(x) \text{ 在某区间 } [0, b_f] \text{ 上连续单调递增, 并且凸}\},$$

$$\mathcal{F}_A = \{f \in \mathcal{F}_0 \mid \text{存在 } x_1, x_2 \in [0, b_f], \text{ 满足 } f(x_1) < x_1, f(x_2) > x_2\}.$$

根据定义 3.1, 如果 $f \in \mathcal{F}_A$, 则 f 存在唯一的 Allee 不动点 $A_f \in (0, b_f)$. 我们有下面的结果:

定理 3.1 设 $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}_A$, 则对任何 $f, g \in \mathcal{U}$, 有 $f \circ g \in \mathcal{U}$, 即 $\mathcal{U}$ 在映射的复合运算下是一个半群. 当 $A_f \neq A_g$ 时, $A_{f \circ g}$ 位于以 A_f 和 A_g 为端点的区间内部; 当 $A_f = A_g$ 时, $A_{f \circ g} = A_f = A_g$.

证明 不妨设 $A_f \geq A_g$.

(1) 如果 $A_f = A_g$, 取

$$b_{f \circ g} = \sup\{x \in [0, b_g] \mid g(x) \leq b_f\} \geq A_g = A_f,$$

则有 $b_{f \circ g} \leq b_g$ 和 $g([0, b_{f \circ g}]) \subset [0, b_f]$. 显然, g 在 $[0, b_{f \circ g}]$ 上连续单调增并且凸, 所以, $f \circ g$ 在此区间内有相同的性质. 此外, 我们有

$$f \circ g(A_g) = f(A_g) = A_g = A_{f \circ g}.$$

因为存在 $x_1 < A_g$ 和 $b_{f \circ g} > x_2 > A_g$ 使得 $g(x_1) < x_1$ 和 $g(x_2) > x_2$, 所以有

$$\begin{aligned} f \circ g(x_1) &< f(x_1) < x_1, & x_1 &\in [0, b_{f \circ g}], \\ f \circ g(x_2) &> f(x_2) > x_2, & x_2 &\in [0, b_{f \circ g}]. \end{aligned}$$

这说明 $f \circ g \in \mathcal{U}$.

(2) 如果 $A_f > A_g$, 则有 $g(A_g) = A_g < A_f$, $g(A_f) > A_f$. 由介值定理知, 存在 $z \in (A_g, A_f)$ 使得 $g(z) = A_f$. 记

$$b_{f \circ g} = \sup\{x \in [0, b_g] \mid g(x) \leq b_f\},$$

则 g 在 $[0, b_{f \circ g}]$ 上连续单调增并且凸, 所以, $f \circ g$ 在此区间内有相同的性质. 由

$$\begin{aligned} f \circ g(A_g) &= f(A_g) < A_g, \\ f \circ g(z) &= f(A_f) = A_f > z, \end{aligned}$$

可知存在 $A_{f \circ g} \in (A_g, z) \subset (A_g, A_f)$ 满足

$$f \circ g(A_{f \circ g}) = A_{f \circ g}.$$

因此有 $f \circ g \in \mathcal{U}$.

$A_f < A_g$ 的情形类似可证. □

4 单峰 Allee 映射

首先给出单峰 Allee 映射的定义 (参见文献 [11]).

定义 4.1 设 $I = [0, b] \subset \mathbb{R}^+$. 一个连续函数 $f: I \rightarrow I$ 称为 Allee 映射, 如果它满足下列条件:

- (i) $f(0) = 0$;
- (ii) 存在正数 A_f 和 K_f , 使得

$$f(x) \begin{cases} < x, & x \in (0, A_f) \cup (K_f, b), \\ > x, & x \in (A_f, K_f). \end{cases}$$

注 4.1 b 可以取 $+\infty$.

定义 4.2 一个连续函数 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 称为单峰映射, 如果存在 $c \in \mathbb{R}^+$, 使得 f 在 $[0, c]$ 上严格递增, 在 $[c, +\infty)$ 上严格递减, 并且有 $f(0) = 0$.

注 4.2 由定义 4.2 可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M \in [0, f(c)).$$

下面定义一个函数类 $\mathcal{G}$ 为满足下列条件的函数的集合:

(A₁) $f \in C^1$ 是单峰 Allee 映射.

(A₂) 所有 $f \in \mathcal{G}$ 都有相同的临界点 $\gamma \in (0, \infty)$, f 在此处取到最大值. 因此, 当 $x < \gamma$ 时 f 递增; 当 $x > \gamma$ 时, f 递减.

(A₃) $\sup_{f \in \mathcal{G}} \{K_f\} < \gamma$.

(A₄) $\sup_{f \in \mathcal{G}} \{A_f\} < \inf_{f \in \mathcal{G}} \{K_f\}$. 定义

$$J_f = \{x \in (0, \gamma) \mid x \text{ 是 } f \text{ 的拐点}\}.$$

(A₅)

$$\sup_{f \in \mathcal{G}} \{A_f\} \leq \inf_{f \in \mathcal{G}} \inf J_f \leq \sup_{f \in \mathcal{G}} \sup J_f \leq \inf_{f \in \mathcal{G}} K_f, \quad (\text{A}_5\text{-1})$$

或者

$$\sup_{f \in \mathcal{G}} \sup J_f \leq \inf_{f \in \mathcal{G}} \{A_f\} \quad (\text{A}_5\text{-2})$$

成立.

注 4.3 由 (A₄) 知, (A₅-1) 中的不等式至少有一个是严格的.

定理 4.1^[11] 设 $f, g \in \mathcal{G}$, 则有

(i) 函数类 $\mathcal{G}$ 在映射的复合运算下构成半群, 即 $f \circ g \in \mathcal{G}$.

(ii) 如果 $A_f \neq A_g$, 则 $A_{f \circ g}$ 位于以 A_f 和 A_g 为端点的开区间内. 当 $A_f = A_g$ 时, $A_{f \circ g} = A_f = A_g$.

(iii) 如果 $K_f \neq K_g$, 则 $K_{f \circ g}$ 位于以 K_f 和 K_g 为端点的开区间内. 当 $K_f = K_g$ 时, $K_{f \circ g} = K_f = K_g$.

证明 任取 $f, g \in \mathcal{G}$, 我们按如下步骤来证明定理 4.1.

(1) 证明复合函数 $f \circ g$ 是单峰映射且满足 (A₂), 并且在区间 $[\gamma, +\infty)$ 上不存在不动点.

因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均满足条件 (A₁) 和 (A₂), 因此有

$$f'(\gamma) = g'(\gamma) = 0,$$

而条件 (A₃) 蕴含 $f(\gamma) < \gamma$ 和 $g(\gamma) < \gamma$. 所以, 对所有 $x > 0$, 有

$$f(x) < \gamma \quad \text{和} \quad g(x) < \gamma.$$

于是得到

$$[f \circ g(x)]' = f'(g(x))g'(x) \begin{cases} > 0, & x \in (0, \gamma), \\ = 0, & x = \gamma, \\ < 0, & x > \gamma. \end{cases}$$

这样, γ 就是 $f \circ g$ 的唯一临界点. $f \circ g$ 在 $x < \gamma$ 时单调递增, 在 $x > \gamma$ 时单调递减, 所以满足条件 (A₂).

对所有 $x > 0$, 有

$$f \circ g(x) < f(\gamma) < \gamma.$$

这说明 $f \circ g$ 与直线 $y = x$ 在 $x \geq \gamma$ 处没有交点, 也就是说 $f \circ g$ 在区间 $[\gamma, +\infty)$ 上不存在不动点.

(2) 证明复合函数 $f \circ g$ 存在不动点 $K_{f \circ g}$, 且当 $K_f \neq K_g$ 时, $K_{f \circ g}$ 位于以 K_f 和 K_g 为端点的开区间内; 而当 $K_f = K_g$ 时, $K_{f \circ g} = K_f = K_g$.

如果 $K_f < K_g$, 由 (A₄) 知, $K_f \in (A_g, K_g)$. 因此有

$$f \circ g(K_f) > f(K_f) = K_f \quad \text{和} \quad f \circ g(K_g) = f(K_g) < K_g.$$

所以至少存在一点 $K_{f \circ g} \in (K_f, K_g)$ 满足 $f \circ g(K_{f \circ g}) = K_{f \circ g}$.

如果 $K_f > K_g$, 由 (A₄) 知, $K_g \in (A_f, K_f)$. 因此有

$$f \circ g(K_f) < f(K_f) = K_f \quad \text{和} \quad f \circ g(K_g) = f(K_g) > K_g.$$

所以至少存在一点 $K_{f \circ g} \in (K_g, K_f)$ 满足 $f \circ g(K_{f \circ g}) = K_{f \circ g}$.

当 $K_f = K_g$ 时, $K_{f \circ g} = K_f = K_g$, 显然是 $f \circ g$ 的一个不动点.

(3) 证明复合函数 $f \circ g$ 是 Allee 映射, 并且满足条件 (A₁)–(A₅).

记

$$\bar{I} = \sup(J_f \cup J_g), \quad \underline{I} = \inf(J_f \cup J_g).$$

情形 I (A₅-1) 成立.

此时, 我们有

$$\max\{A_f, A_g\} \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \min\{K_f, K_g\} \quad (4.1)$$

和

$$g(x) \in (\bar{I}, \gamma), \quad x \in (\bar{I}, \gamma), \quad (4.2)$$

因为 $\bar{I} \in (A_g, K_g)$.

(I) 显然, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图形在区间 $(\bar{I}, \gamma)$ 上单调递增并且凸, 根据 (4.2) 可知, $f \circ g$ 的图形在此区间上也是凸的.

但是, 一条凸曲线与直线至多有两个交点. 而 $f(g(\bar{I})) \geq f(\bar{I}) > \bar{I}$ (因为 $\bar{I} \in (A_f, K_f)$) 及 $f \circ g$ 的凸性说明 $K_{f \circ g}$ 是 $f \circ g$ 在区间 $[\bar{I}, \gamma]$ 上唯一的不动点. 这就证明了结论 (iii) 和 (A₃).

此外, 我们还得到

$$\sup J_{f \circ g} \leq \bar{I} \leq \min\{K_f, K_g\} \leq K_{f \circ g} \quad (4.3)$$

和

$$\begin{cases} f \circ g(x) > x, & x \in [\bar{I}, K_{f \circ g}), \\ f \circ g(x) < x, & x \in (K_{f \circ g}, \gamma], \\ f \circ g(x) < \gamma < x, & x \in (\gamma, \infty). \end{cases} \quad (4.4)$$

(II) 显然, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图形在区间 $(0, \underline{I})$ 上单调递增并且凹.

下面根据 A_f 与 A_g 之间的关系分三个步骤来证明定理 4.1.

第 1 步 假设 $A_f \leq A_g \leq \underline{I}$.

此时, 对 $x \in (0, A_g)$, 有 $g(x) \in (0, \underline{I})$, 并且 $f(x)$ 单调递增, 所以, $f \circ g$ 的图形在区间 $(0, A_g)$ 上是凹的.

因为 f 和 g 都是 Allee 映射, 当 $A_f < A_g$ 时, 我们有

$$f \circ g(A_f) < f(A_f) = A_f$$

和

$$f \circ g(A_g) = f(A_g) > A_g,$$

这是因为 $A_g \in (A_f, K_f)$. 因此至少存在一点 $A_{f \circ g} \in (A_f, A_g)$ 使得 $f \circ g(A_{f \circ g}) = A_{f \circ g}$. 如果 $A_f = A_g$, 则显然有 $A_{f \circ g} = A_f = A_g$ 满足 $f \circ g(A_{f \circ g}) = A_{f \circ g}$.

我们知道凹曲线与直线至多相交两次. 根据 $f \circ g$ 的图形的凹性和 $f \circ g(0) = 0$ 立即得到 $A_{f \circ g}$ 是 $f \circ g$ 在区间 $(0, A_g]$ 上的唯一不动点. 此外, 我们还得到

$$\inf J_{f \circ g} \geq A_g \geq A_{f \circ g} \quad (4.5)$$

和

$$\begin{cases} f(g(x)) < x, & x \in (0, A_{f \circ g}), \\ f(g(x)) > x, & x \in (A_{f \circ g}, A_g]. \end{cases} \quad (4.6)$$

如果 $x \in (A_g, \bar{I})$, 则有 $A_f \leq A_g < x < \min\{K_f, K_g\}$, 因此有

$$f \circ g(x) > f(x) > x. \quad (4.7)$$

这蕴含 $f \circ g(x)$ 在 $(A_g, \bar{I})$ 上不存在不动点. 结合 (4.3)–(4.7) 的结论, 我们证明了 (ii) 和 (iii) 成立以及条件 (A₃)、(A₄)、(A₅-1) 和 (A₁) 都满足, 即

$$\begin{cases} f \circ g(x) < x, & x \in (0, A_{f \circ g}), \\ f \circ g(x) > x, & x \in (A_{f \circ g}, K_{f \circ g}), \\ f \circ g(x) < x, & x > K_{f \circ g}. \end{cases} \quad (4.8)$$

第 2 步 假设 $A_g < A_f \leq \underline{I}$, 并且 $g(A_f) \leq \underline{I}$.

因为当 $x \in (0, A_f)$ 时 $g(x) \in (0, \underline{I})$, 所以, $f \circ g$ 的图形在区间 $(0, A_f)$ 上凹. 类似于第 1 步, 我们可以证明 $f \circ g$ 在区间 $(0, A_f)$ 上有唯一的不动点 $A_{f \circ g} \in (A_g, A_f)$, 并且有

$$\begin{cases} f(g(x)) < x, & x \in (0, A_{f \circ g}), \\ f(g(x)) > x, & x \in (A_{f \circ g}, A_f] \end{cases} \quad (4.9)$$

和

$$\inf J_{f \circ g} \geq \underline{I} \geq A_f > A_{f \circ g}. \quad (4.10)$$

对 $x \in (A_f, \bar{I})$, 有 $A_g < A_f < x < \min\{K_f, K_g\}$, 因此,

$$f \circ g(x) > f(x) > x. \quad (4.11)$$

这蕴含 $f \circ g(x)$ 在区间 $(A_f, \bar{I})$ 上不存在不动点. 结合 (4.3)、(4.4) 和 (4.9)–(4.11), 我们证明了 (ii) 和 (iii) 成立以及条件 (A_3) 、 (A_4) 、 (A_5-1) 和 (A_1) 都满足, 也就是 (4.8) 成立.

第 3 步 假设 $A_g < A_f \leq \underline{I}$, 但是 $g(A_f) > \underline{I}$.

此时, 存在唯一的 $x_0 \in (A_g, A_f)$ 使得 $g(x_0) = \underline{I}$, 这是因为 $g(x)$ 在区间 $(0, A_f) \subset (0, \gamma)$ 上单调. 由于当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x) \in (0, \underline{I})$, 所以 $f \circ g(x)$ 的图形在区间 $(0, x_0)$ 上凹.

由 $\underline{I} \in (A_f, K_f)$ 和 $f \circ g(x_0) = f(\underline{I}) > \underline{I} \geq x_0$ 及 $f \circ g(A_g) = f(A_g) < A_g$ 和 $f \circ g$ 的凹性知, $f \circ g(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上存在唯一的不动点 $A_{f \circ g} \in (A_g, x_0) \subset (A_g, A_f)$, 并且有

$$\begin{cases} f(g(x)) < x, & x \in (0, A_{f \circ g}), \\ f(g(x)) > x, & x \in (A_{f \circ g}, x_0] \end{cases} \quad (4.12)$$

和

$$\inf J_{f \circ g} \geq x_0 > A_{f \circ g}. \quad (4.13)$$

对 $x \in (x_0, A_f]$, 有 $g(x) > g(x_0) = \underline{I} \in (A_f, K_f)$, 所以, $f \circ g(x) > f \circ g(x_0) = f(\underline{I}) > \underline{I} \geq x$. 而对 $x \in (A_f, \bar{I}) \subset (A_g, K_g)$, 有 $f \circ g(x) > f(x) > x$. 因此有

$$f \circ g(x) > x, \quad x \in (x_0, \bar{I}). \quad (4.14)$$

这说明 $f \circ g(x)$ 在区间 $(x_0, \bar{I})$ 上不存在不动点. 结合 (4.3)、(4.4) 和 (4.12)–(4.14), 我们证明了 (ii) 和 (iii) 成立以及条件 (A_3) 、 (A_4) 、 (A_5-1) 和 (A_1) 都满足, 也就是 (4.8) 成立.

情形 II (A_5-2) 成立.

此时, 我们有

$$\bar{I} \leq \min\{A_f, A_g\}. \quad (4.15)$$

显然, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图形在区间 $(\bar{I}, \gamma)$ 单调递增并且凸.

像在情形 I 中那样, 我们根据 A_f 与 A_g 之间的关系, 分三个步骤来证明定理 4.1.

第 1 步 假设 $\bar{I} \leq A_g \leq A_f$.

因为当 $x \in (A_g, \gamma)$ 时, $\gamma > g(x) > g(A_g) = A_g \geq \bar{I}$, 所以 $g(x) \in (\bar{I}, \gamma)$. 于是, $f \circ g$ 的图形在区间 (A_g, γ) 上是凸的. 因此, $f \circ g$ 在区间 (A_g, γ) 上至多有两个不动点.

因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 Allee 映射, 所以当 $A_g < A_f$ 时, 由 (A_4) 知 $A_g < A_f < K_g$, 于是有

$$f \circ g(A_f) > f(A_f) = A_f$$

和

$$f \circ g(A_g) = f(A_g) < A_g.$$

因此, 存在点 $A_{f \circ g} \in (A_g, A_f)$ 使得 $f \circ g(A_{f \circ g}) = A_{f \circ g}$.

如果 $A_g = A_f$, 则有 $A_{f \circ g} = A_g = A_f$ 满足 $f \circ g(A_{f \circ g}) = A_{f \circ g}$. 根据 $f \circ g$ 的图形的凸性知, $A_{f \circ g}$ 和 $K_{f \circ g}$ 是 $f \circ g$ 在区间 $[A_g, \gamma]$ 上仅有的不动点, 并且有

$$\begin{cases} f(g(x)) < x, & x \in [A_g, A_{f \circ g}) \cup (K_{f \circ g}, \gamma], \\ f(g(x)) > x, & x \in (A_{f \circ g}, K_{f \circ g}), \\ f(g(x)) < \gamma < x, & x > \gamma \end{cases} \quad (4.16)$$

和

$$\sup J_{f \circ g} \leq A_g < A_{f \circ g}. \quad (4.17)$$

当 $x \in (0, A_g) \subset (0, A_f)$ 时,

$$f \circ g(x) < f(x) < x. \quad (4.18)$$

所以, $f \circ g$ 在区间 $(0, A_g)$ 上不存在不动点. 结合 (4.16)–(4.18), 我们证明了 (ii) 和 (iii) 成立以及条件 (A_3) 、 (A_4) 、 (A_5-2) 和 (A_1) 都满足, 即

$$\begin{cases} f(g(x)) < x, & x \in (0, A_{f \circ g}), \\ f(g(x)) > x, & x \in (A_{f \circ g}, K_{f \circ g}), \\ f(g(x)) < x, & x > K_{f \circ g}. \end{cases} \quad (4.19)$$

第 2 步 假设 $\bar{I} \leq A_f < A_g$ 和 $g(A_f) \geq \bar{I}$.

因为当 $x \in (A_f, \gamma)$ 时, $g(x) \in (\bar{I}, \gamma)$, 所以, $f \circ g$ 的图形在区间 (A_f, γ) 上凸. 用类似于第 1 步中方法可以证明 $f \circ g$ 仅有两个不动点 $A_{f \circ g} \in (A_f, A_g)$ 和 $K_{f \circ g}$, 并且有

$$\sup J_{f \circ g} \leq A_f < A_{f \circ g} \quad (4.20)$$

和

$$\begin{cases} f(g(x)) < x, & x \in [A_f, A_{f \circ g}) \cup (K_{f \circ g}, \gamma], \\ f(g(x)) > x, & x \in (A_{f \circ g}, K_{f \circ g}), \\ f(g(x)) < \gamma < x, & x > \gamma. \end{cases} \quad (4.21)$$

当 $x \in (0, A_f) \subset (0, A_g)$ 时, 有

$$f \circ g(x) < f(x) < x. \quad (4.22)$$

结合 (4.20)–(4.22), 我们证明了 (ii) 和 (iii) 成立以及条件 (A_3) 、 (A_4) 、 (A_5-2) 和 (A_1) 都满足, 即 (4.19) 成立.

第 3 步 假设 $\bar{I} \leq A_f < A_g$, 但是 $g(A_f) < \bar{I}$.

此时, 存在唯一的 $x_1 \in (A_f, A_g)$ 满足 $g(x_1) = \bar{I}$. 所以有 $x \in (x_1, \gamma)$ 时, $g(x) \in (\bar{I}, \gamma)$. 这样, $f \circ g$ 的图形在区间 (x_1, γ) 上就是凸的. 利用证明 (4.12)–(4.14) 的方法可以证明 $f \circ g$ 仅有两个不动点 $A_{f \circ g} \in (x_1, A_g) \subset (A_f, A_g)$ 和 $K_{f \circ g}$, 并且有

$$\sup J_{f \circ g} \leq x_1 < A_{f \circ g} \quad (4.23)$$

和

$$\begin{cases} f(g(x)) < x, & x \in [x_1, A_{f \circ g}), \\ f(g(x)) > x, & x \in (A_{f \circ g}, K_{f \circ g}), \\ f(g(x)) < x, & x > K_{f \circ g}. \end{cases} \quad (4.24)$$

对 $x \in (0, A_f] \subset (0, A_g)$, 有

$$f(g(x)) < f(x) < x. \quad (4.25)$$

当 $x \in (A_f, x_1)$ 时, 有 $x > A_f > \bar{I}$. 所以,

$$f(g(x)) < f(g(x_1)) = f(\bar{I}) < \bar{I} < x. \quad (4.26)$$

这说明 $f \circ g$ 在区间 $(0, x_1)$ 上不存在不动点. 结合 (4.23)–(4.26) 各不等式, 我们证明了 (ii) 和 (iii) 成立以及条件 (A_3) 、 (A_4) 、 (A_5-2) 和 (A_1) 都满足, 即 (4.19) 成立.

至此, 我们完成了定理 4.1 的证明. $\square$

例 4.1 ^[11] 考虑 k -周期 λ -Ricker 映射

$$x_{n+1} = R_{p_n}(x_n) = x_n^\lambda e^{p_n - (\lambda-1)\ln(p_n) - x_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.27)$$

其中 $\lambda > 1$, $x_n, p_n \in \mathbb{R}^+$, p_n 是一个 k -周期序列 $\{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$, 即 $p_{i+k} = p_i$, $i \geq 0$. 文献 [11] 证明了当 $1 < \lambda < \lambda_0 \approx 3.08439$ 及 $p_n \in (S_\lambda, \lambda - \sqrt{\lambda}) \cup (S_{\lambda-\sqrt{\lambda}}, \lambda)$ 或者 $p_n \in [\lambda - \sqrt{\lambda}, S_{\lambda-\sqrt{\lambda}}] \setminus \{\lambda - 1\}$ 时, 映射 $R_p(x)$ 满足定理 4.1, 其中 $S_\lambda \neq \lambda$ 满足方程

$$u(S_x) = u(x), \quad u(x) = x - (\lambda - 1)\ln x. \quad (4.28)$$

所以, 对这样的 p_n , λ -Ricker 映射存在两个正的周期轨: 一个为不稳定轨道 $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\} \subset \{A_{\min}, A_{\max}\}$; 另一个为稳定轨道 $\beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}\} \subset \{K_{\min}, K_{\max}\}$, 其中

$$\begin{aligned} A_{\min} &= \min_{p_i, 0 \leq i \leq k-1} \{A_{p_i}\}, & A_{\max} &= \max_{p_i, 0 \leq i \leq k-1} \{A_{p_i}\}, \\ K_{\min} &= \min_{p_i, 0 \leq i \leq k-1} \{K_{p_i}\}, & K_{\max} &= \max_{p_i, 0 \leq i \leq k-1} \{K_{p_i}\}. \end{aligned}$$

注 4.4 我们上面讨论的几类映射在复合运算下的封闭性有许多重要的应用. 例如, 非自治差分方程周期轨的存在性和稳定性问题可以通过映射在复合运算下的半群性质来证明. 此外, 连续微分方程奇点和周期解的稳定性问题也可以利用相应的 Poincaré 映射来证明 (参见文献 [15, 16]), 我们在此就不一一举例了.

参考文献

- 1 Courchamp F, Berec L, Gascoigne J. Allee Effect. Oxford: Oxford Press, 2008
- 2 Allee W C. The Social Life of Animals. London: William Heinemann, 1938
- 3 Allee W C, Emerson A E, Park O, et al. Principles of Animals Ecology. Philadelphia: W.B. Saunders, 1949
- 4 Stephens P A, Sutherland W J, Freckleton R P. What is the Allee effect? Oikos, 1999, 87: 185–190
- 5 Cushing J M, Henson S M. Global dynamics of some periodically forced, monotone difference equations. J Difference Equ Appl, 2001, 7: 859–872
- 6 Cushing J M, Henson S M. A periodically forced Beverton-Holt equation. J Difference Equ Appl, 2002, 8: 1119–1120
- 7 Elaydi S, Sacker R J. Basin of attraction of periodic orbits of maps in the real line. J Difference Equ Appl, 2004, 10: 881–888
- 8 Elaydi S, Sacker R J. Nonautonomous Beverton-Holt equations and the Cushing-Henson conjectures. J Difference Equ Appl, 2005, 11: 337–347
- 9 Kocic V L. A note on the nonautonomous Beverton-Holt model. J Difference Equ Appl, 2005, 11: 415–422
- 10 Kocic V L. A note on attenuant cycles of population models with periodic carrying capacity. J Difference Equ Appl, 2004, 10: 791–793
- 11 Yang Y, Sacker R J. Periodic unimodal Allee maps, the semigroup property and the λ -Ricker map with Allee effect. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2014, 19: 589–606
- 12 张筑生. 数学分析新讲 (第二册). 北京: 北京大学出版社, 2003

- 13 Robinson C. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos, 2nd ed. Florida: CRC Press, 2000
- 14 Carren R J, Goldring K, Grogan F, et al. Difference equations with the Allee effect and the periodic sigmoid Beverton-Holt equation revisited. *J Biol Dyn*, 2012, 6: 1019–1033
- 15 Jia Y. Robust control with decoupling performance for steering and traction of 4WS vehicles under velocity-varying motion. *IEEE Trans Control Syst Tech*, 2000, 8: 554–569
- 16 Jia Y. Alternative proofs for improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty: A predictive approach. *IEEE Trans Automat Control*, 2003, 48: 1413–1416

Semigroup structures and properties of some kinds of mappings

LI CuiPing

Abstract In this paper, we consider several kinds of maps frequently appearing in the population dynamics, e.g., logistic mapping: $f(x) = rx(1 - x)$ ($x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ is a parameter), unimodel Allee maps with Allee effect and Sigmoid mapping, etc. We study the persistence of some properties for these maps such as the numbers of fixed point, their positions, stabilities and so on. We prove that they are closed under composition of maps. That means they form a semigroup. The examples are given to illustrate the results.

Keywords fitness function, Allee mapping, periodic difference equations

MSC(2010) 37B55, 37C05, 37E05, 39A30

doi: 10.1360/N012016-00129