调和 Bergman 空间上弱局部化算子的代数

献给史济怀教授 80 华诞

刘聪文*, 林秉文

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026
E-mail: cwliu@ustc.edu.cn, linbw@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2015-03-31; 接受日期: 2015-06-25; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171318 和 11471301) 资助项目

摘要 本文在 $\mathbb{R}^n$ 中开单位球的调和 Bergman 空间 b^p 上引入一类 (p, δ) -弱局部化算子, 这类算子构成一个代数并包含了 b^p 上的 Toeplitz 代数. 本文的主要结果还给出这类算子的一个紧性判据, 即 T 为 b^p 上的紧算子当且仅当存在 $k > 0$, 使得 $\limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| = 0$.

关键词 调和 Bergman 空间 (p, δ) -弱局部化算子 Toeplitz 算子

MSC (2010) 主题分类 32A36, 47B05, 47B35

1 引言

设 $0 < p \leq \infty$, 考虑空间 $L^p = L^p(\mathbb{B}_n, dV)$, 其中 $\mathbb{B}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开单位球, dV 是 $\mathbb{B}_n$ 上的标准化体积测度. 调和 Bergman 空间 b^p 是 L^p 的由实值调和函数组成的闭子空间. 当 $1 < p < \infty$ 时, 调和 Bergman 投影 Q 是 L^p 到 b^p 的有界算子, 它是如下的积分算子:

$$Qf(x) = \int_{\mathbb{B}_n} f(y)R(x, y)dV(y),$$

其中

$$R(x, y) := R_x(y) = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8x \cdot y - 2n-4)|x|^2|y|^2 + n}{n(1-2x \cdot y + |x|^2|y|^2)^{1+\frac{n}{2}}}$$

是 b^2 上的再生核, 称为调和 Bergman 核 (参见文献 [1, 第 179 页]). 对给定的 $u \in L^\infty$, 我们以 M_u 记乘法算子 $M_u: L^p \rightarrow L^p$, $f \mapsto uf$, 并记 $Q_u := QM_u$, 而调和 Bergman 空间 b^p 上的 Toeplitz 算子 $T_u: b^p \rightarrow b^p$ 定义为 Q_u 在 b^p 上的限制. 我们以 $\mathfrak{L}(b^p)$ 记 b^p 上有界线性算子的空间, 以 $\mathfrak{T}_p$ 记 b^p 上的 Toeplitz 代数, 即 $\{T_u: u \in L^\infty\}$ 生成的 $\mathfrak{L}(b^p)$ 的闭子代数.

在全纯空间上, 为了对尽可能大 (至少要包含 Toeplitz 代数) 的算子类用 Berezin 变换来刻画算子的紧性, 最近有多位学者提出“局部化”算子的概念. Xia 和 Zheng [2] 在 Bargmann-Fock 空间 $\mathcal{F}^2$ 上引入一类“充分局部化” (“sufficiently localized”) 算子. 进而, 在更近的一篇文献 [3] 中, 这一概念被 Isralowitz 等推广为全纯 Bergman 空间和 Bargmann-Fock 空间上更大的一类算子, 即弱局部化 (weakly localized) 算子. 限于篇幅, 我们在这里不引述这些概念的定义. 必须提到的是, 这些概念的原始想法来自 Suárez 的重要文献 [4].

本文的主要目的是引入和研究调和 Bergman 空间 b^p 上与上述弱局部化算子类似的一类算子.

对 $1 < p < \infty$, 记 $p^* = \min\{p, p'\}$, 其中 $p' := p/(p-1)$ 是 p 的共轭指标.

定义 1.1 设 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < p^*$. 我们称 b^p 上一个线性算子 T 是 (p, δ) -弱局部化的是指它满足以下四个条件:

$$\sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle Tr_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) < \infty, \quad (\text{H1})$$

$$\sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle T^* r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) < \infty, \quad (\text{H2})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x,k)^c} |\langle Tr_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) = 0, \quad (\text{H3})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x,k)^c} |\langle T^* r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) = 0, \quad (\text{H4})$$

这里 $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{B}_n} f(x)g(x)dV(x)$, $r_x = \|R_x\|_2^{-1}R_x$, $d\lambda(x) = (1-|x|^2)^{-n}dV(x)$ 是 $\mathbb{B}_n$ 上的 Möbius 不变测度, $D(x, k)$ 是在 Bergman 度量下以 x 为心、 k 为半径的开球, $D(x, k)^c = \mathbb{B}_n \setminus D(x, k)$ 是 $D(x, k)$ 在 $\mathbb{B}_n$ 中的补集. 为方便计, 我们把 b^p 上 (p, δ) -弱局部化算子全体记为 $\mathfrak{B}_{p,\delta}$.

我们的第一个主要结果如下.

定理 1.1 (1) 设 $1 < p < \infty$, 则 $\bigcup_{0 < \delta < p^*} \mathfrak{B}_{p,\delta} \subset \mathfrak{L}(b^p)$, 即 (p, δ) -弱局部化算子在 b^p 上有界;

(2) 对每个固定的 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < p^*$, $\mathfrak{B}_{p,\delta}$ 是一个代数, 并且 $\mathfrak{T}_p \subset \bigcap_{0 < \delta < p^*} \mathfrak{B}_{p,\delta}$.

由于技术上的困难, 我们还不能得到关于这类算子的用 Berezin 变换给出的紧性刻画. 但我们有如下与之类似的结果.

定理 1.2 若 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < p^*$, T 属于 $\mathfrak{B}_{p,\delta}$ 的范数闭包, 则存在 $k > 0$, 以及 $C, \tilde{C} > 0$ (依赖于 k), 使得

$$C \limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x,k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| \leq \|T\|_e \leq \tilde{C} \limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x,k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|,$$

这里 $\|T\|_e$ 是 T 作为 b^p 上有界算子的本性范数, 而 $r_x^{(p)} = \|R_x\|_2^{-\frac{2}{p'}}R_x$.

定理 1.1 和 1.2 分别是文献 [3] 中命题 2.2-2.3 和定理 2.6 在调和 Bergman 空间情形的对应结果. 根据定理 1.2, 得到如下推论.

推论 1.3 若 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < p^*$, T 属于 $\mathfrak{B}_{p,\delta}$ 的范数闭包, 则 T 为 b^p 上的紧算子当且仅当存在 $k > 0$, 使得

$$\limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x,k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| = 0.$$

2 预备知识

我们使用标准记号 $A \lesssim B$ 表示存在常数 $C > 0$ 使得 $A \leq CB$, 并且 $A \approx B$ 表示同时成立 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$. 在后文中, 我们有时也将再生核 $R(x, y)$ 记为 $\langle R_x, R_y \rangle$. 记 $\llbracket x, y \rrbracket$ 为 Ahlfors 括号,

$\llbracket x, y \rrbracket := (1 - 2x \cdot y + |x|^2 |y|^2)^{\frac{1}{2}}$. 容易验证, 对 $x, y \in \mathbb{B}_n$, 有

$$|R_x(y)| \leq \frac{4}{\llbracket x, y \rrbracket^n}, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{(1 - |x|^2)^{\frac{n}{2}}} \leq \|R_x\|_2 \leq \frac{2}{(1 - |x|^2)^{\frac{n}{2}}}, \quad (2.2)$$

$$|r_x(y)| \lesssim \frac{(1 - |x|^2)^{\frac{n}{2}}}{\llbracket x, y \rrbracket^n}. \quad (2.3)$$

对 $x \in \mathbb{B}_n$, 考虑映射

$$\varphi_x(y) = \frac{(1 - |x|^2)(x - y) + |x - y|^2 x}{\llbracket x, y \rrbracket^2}, \quad y \in \mathbb{B}_n,$$

这是 $\mathbb{B}_n$ 到自身的 Möbius 变换 (参见文献 [5, 第 25 页]). 于是, 对任意 $y \in \mathbb{B}_n$, 有

$$1 - |\varphi_x(y)|^2 = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{\llbracket x, y \rrbracket^2}, \quad \varphi_x(\varphi_x(y)) = y. \quad (2.4)$$

注意我们的定义与文献 [5] 相差一个负号. 在后文中可看到, φ_x 是否定向并不影响我们的结果, 且 φ_x 作为对合映射可以更方便地处理问题. $\mathbb{B}_n$ 上的伪双曲度量量和 Bergman 度量分别定义为

$$\rho(x, y) := |\varphi_x(y)| \quad \text{和} \quad \beta(x, y) := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \rho(x, y)}{1 - \rho(x, y)},$$

这两个度量在 Möbius 群的作用下是不变的.

对 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 用记号 ${}_2F_1(a, b; c; s)$ 表示 Gauss 超几何函数,

$${}_2F_1(a, b; c; s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{s^k}{k!}, \quad s \in (-1, 1),$$

其中 $c \neq 0, -1, -2, \dots$, 且 $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$, $k \geq 1$. 需要指出, 超几何函数通常是对复的参数和自变量来定义的, 而为本文需要, 我们仅考虑实参数和实变量的超几何函数.

引理 2.1 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $c > \max\{a, b, a+b, -1\}$. 若 $abc \geq 0$, 则函数 $s \mapsto {}_2F_1(a, b; c; s)$ 是从 $[0, 1)$ 映满 $[1, B)$ 的增函数; 否则, 它是从 $[0, 1)$ 映满 $(B, 1]$ 的减函数, 这里

$$B := \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

证明 注意到

$$\frac{d}{ds} {}_2F_1(a, b; c; s) = \frac{ab}{c} (1-s)^{c-a-b-1} {}_2F_1(c-a, c-b; c+1; s)$$

(结合文献 [6, (2.5.1)] 和 [6, 定理 2.2.5] 即得). 条件 $c > \max\{a, b, a+b, -1\}$ 使得右边的超几何函数的 Taylor 展开系数都是正的, 因此, 该函数在 $[0, 1)$ 上非负, 于是, 当 $abc \geq 0$ 时, 有 $\frac{d}{ds} {}_2F_1(a, b; c; s) \geq 0$, $\forall s \in [0, 1)$; 当 $abc < 0$ 时, 有 $\frac{d}{ds} {}_2F_1(a, b; c; s) < 0$, $\forall s \in [0, 1)$.

接下来, 由超几何函数的展开式可知, ${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$; 根据 Gauss 公式 (参见文献 [6, 定理 2.2.2]) 可得

$${}_2F_1(a, b; c; 1^-) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (2.5)$$

引理得证. □

下述引理是实单位球上的 Forelli-Rudin 型估计, 可参见文献 [7, 引理 4.4].

引理 2.2 设 $c \in \mathbb{R}$, $t > -1$, 对 $x \in \mathbb{B}_n$, 记

$$I_c(x) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|x - \zeta|^{n-1+c}} \quad \text{和} \quad J_{c,t}(x) := \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1 - |y|^2)^t dV(y)}{[x, y]^{n+t+c}},$$

则

$$I_c(x) \sim J_{c,t}(x) \sim \begin{cases} 1, & \text{若 } c < 0, \\ \log \frac{1}{1 - |x|^2}, & \text{若 } c = 0, \\ (1 - |x|^2)^{-c}, & \text{若 } c > 0, \end{cases}$$

这里记号 $a(x) \sim b(x)$ 表示 $\lim_{|x| \rightarrow 1^-} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$.

对于 $c < 0$, 我们还有以下的一致估计.

引理 2.3 设 $c < 0$, $t > -1$, 令

$$M_{c,t}(\rho) := \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{\rho < |y| < 1} \frac{(1 - |y|^2)^t}{[x, y]^{n+t+c}} dV(y), \quad \rho \in [0, 1),$$

则

$$M_{c,t}(\rho) \sim \begin{cases} (1 - \rho^2)^{1+t}, & \text{若 } 1 + t + c < 0, \\ (1 - \rho^2)^{1+t} \log \frac{1}{1 - \rho^2}, & \text{若 } 1 + t + c = 0, \\ (1 - \rho^2)^{-c}, & \text{若 } 1 + t + c > 0. \end{cases}$$

证明 极坐标下积分并应用文献 [8, 引理 2.1], 得

$$\begin{aligned} \int_{\rho < |y| < 1} \frac{(1 - |y|^2)^t}{[x, y]^{n+t+c}} dV(y) &= n \int_{\rho}^1 r^{n-1} (1 - r^2)^t \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|rx - \zeta|^{n+t+c}} \right) dr \\ &= \frac{n}{2} \int_{\rho^2}^1 r^{\frac{n}{2}-1} (1 - r)^t \Phi(r|x|^2) dr, \end{aligned}$$

其中

$$\Phi(s) = {}_2F_1\left(\frac{n+t+c}{2}, \frac{t+c}{2} + 1; \frac{n}{2}; s\right).$$

情形 1 $1 + t + c < 0$. 由引理 2.1 知, Φ 在 $[0, 1)$ 上是单调的. 由单调收敛定理, 得

$$M_{c,t}(\rho) = \frac{n}{2} \int_{\rho^2}^1 r^{\frac{n}{2}-1} (1 - r)^t \Psi(r) dr,$$

其中 $\Psi(r) := \max\{1, \Phi(r)\}$, $r \in (\rho^2, 1)$. 由 (2.5) 知, $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} M_{c,t}(\rho) = 0$, 从而, 由 L'Hôpital 法则得

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{M_{c,t}(\rho)}{(1 - \rho^2)^{1+t}} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(-1 - t - c)}{(1 + t) \Gamma(\frac{-t-c}{2}) \Gamma(\frac{n-t-c}{2} - 1)}, & \text{若 } c \in (-\infty, -n - t] \cup [-2 - t, -1 - t), \\ \frac{n}{2(1 + t)}, & \text{若 } c \in (-n - t, -2 - t). \end{cases}$$

情形 2 $1+t+c>0$. 此时 Φ 的 Taylor 展开的系数都是正的, 从而, Φ 在 $[0,1)$ 上单调增. 又

$$\Phi(r|x|^2) = (1-r|x|^2)^{-1-t-c} {}_2F_1\left(\frac{-t-c}{2}, \frac{n-t-c}{2}-1; \frac{n}{2}; r|x|^2\right),$$

故由单调收敛定理知,

$$M_{c,t}(\rho) = \frac{n}{2} \int_{\rho^2}^1 r^{\frac{n}{2}-1} (1-r)^{-1-c} {}_2F_1\left(\frac{-t-c}{2}, \frac{n-t-c}{2}-1; \frac{n}{2}; r\right) dr.$$

与情形 1 类似, 我们得到

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{M_{c,t}(\rho)}{(1-\rho^2)^{-c}} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(1+t+c)}{(-c)\Gamma(\frac{n+t+c}{2})\Gamma(\frac{t+c}{2}+1)}.$$

情形 3 $1+t+c=0$. 首先, 与情形 2 同理, 我们有

$$M_{c,t}(\rho) = \frac{n}{2} \int_{\rho^2}^1 r^{\frac{n}{2}-1} (1-r)^t {}_2F_1\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n}{2}; r\right) dr.$$

由渐近公式 (参见文献 [9, 第 299 页])

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\log \frac{1}{1-s} \right)^{-1} {}_2F_1(a, b; a+b; s) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

和事实: 若 $t > -1$, 则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^\delta x^t \log \frac{1}{x} dx = 0,$$

得 $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} M_{c,t}(\rho) = 0$. 再次由 L'Hôpital 法则,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \frac{M_{c,t}(\rho)}{(1-\rho^2)^{1+t} \log \frac{1}{1-\rho^2}} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\sqrt{\pi}(1+t)\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

证毕. □

推论 2.4 设 $c < 0, t > -1$, 则

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{\rho < |y| < 1} \frac{(1-|y|^2)^t}{\llbracket x, y \rrbracket^{n+t+c}} dV(y) = 0.$$

推论 2.5 设 $(n-2)/n < a < 1$, 则有

$$\sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_y\|_2^a} d\lambda(y) < \infty, \quad (2.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x,k)^c} |\langle r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_y\|_2^a} d\lambda(y) = 0. \quad (2.7)$$

证明 由 (2.1)–(2.3) 得

$$\int_{\mathbb{B}_n} |\langle r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_y\|_2^a} d\lambda(y) \lesssim (1-|x|^2)^{\frac{n}{2}(1-a)} \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|y|^2)^{\frac{n}{2}(a-1)}}{\llbracket x, y \rrbracket^n} dV(y),$$

于是, 根据引理 2.2 知 (2.6) 成立. 再由 (2.4) 和测度 $d\lambda$ 的 Möbius 不变性得

$$\int_{D(x,k)^c} |\langle r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_y\|_2^a} d\lambda(y) = \int_{D(0,k)^c} |\langle r_x, r_{\varphi_x(y)} \rangle| \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_{\varphi_x(y)}\|_2^a} d\lambda(y)$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \int_{D(0,k)^c} \frac{(1-|y|^2)^{\frac{n}{2}(a-1)}}{[x,y]^{na}} dV(y) \\ &= \int_{\tanh k \leq |y| < 1} \frac{(1-|y|^2)^{\frac{n}{2}(a-1)}}{[x,y]^{na}} dV(y). \end{aligned}$$

在上式中, 两边同时对 x 取上确界, 并令 $k \rightarrow \infty$, 则根据推论 2.4 知 (2.7) 成立. $\square$

3 定理 1.1 的证明

证明 (1) 对任一 $f \in b^p$, 我们有

$$|Tf(x)| = |\langle Tf, R_x \rangle| = |\langle f, T^*R_x \rangle| \leq \int_{\mathbb{B}_n} |\langle T^*R_x, R_y \rangle| |f(y)| dV(y).$$

从而只要证明以 $|\langle T^*R_x, R_y \rangle|$ 为核函数的积分算子在 L^p 上有界. 设 $h(y) = \|R_y\|_2^{\frac{2\delta}{p'p'n}}$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle T^*R_x, R_y \rangle| h(y)^{p'} dV(y) &= \int_{\mathbb{B}_n} |\langle T^*R_x, R_y \rangle| \|R_y\|_2^{\frac{2\delta}{p'n}} dV(y) \\ &\approx \|R_x\|_2^{\frac{2\delta}{p'n}} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle T^*r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) \lesssim h(x)^{p'}, \end{aligned}$$

这里用了条件 (H2). 类似可得 $\int_{\mathbb{B}_n} |\langle T^*R_x, R_y \rangle| h(x)^p dV(x) \lesssim h(y)^p$. 根据 Schur 检验 (参见文献 [10, 定理 2.9]), 这就完成了证明.

(2) 先证 $\mathfrak{B}_{p,\delta}$ 是一个代数. 显然, $\mathfrak{B}_{p,\delta}$ 是一个线性空间, 故只需证: 若 $T, S \in \mathfrak{B}_{p,\delta}$, 则 $TS \in \mathfrak{B}_{p,\delta}$. 我们只验证 TS 满足条件 (H3). 条件 (H4) 的验证同理, (H1) 与 (H2) 的验证类似且更简单. 首先, 由再生性和 Fubini 定理得

$$\begin{aligned} \int_{D(x,k)^c} |\langle TSr_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) &= \int_{D(x,k)^c} |\langle Sr_x, T^*r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) \\ &\lesssim \int_{D(x,k)^c} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle Sr_x, r_z \rangle| |\langle r_z, T^*r_y \rangle| d\lambda(z) \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) \\ &\leq \left(\int_{D(x, \frac{k}{2})} + \int_{D(x, \frac{k}{2})^c} \right) \int_{D(x,k)^c} |\langle Tr_z, r_y \rangle| \\ &\quad \times \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) |\langle Sr_x, r_z \rangle| d\lambda(z). \end{aligned}$$

我们先估计第一个积分. 注意到对 $z \in D(x, \frac{k}{2})$, 有 $D(x, k)^c \subset D(z, \frac{k}{2})^c$, 于是, 第一个积分不大于

$$\begin{aligned} &\int_{D(x, \frac{k}{2})} \int_{D(z, \frac{k}{2})^c} |\langle Tr_z, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) |\langle Sr_x, r_z \rangle| d\lambda(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{B}_n} \left(\int_{D(z, \frac{k}{2})^c} |\langle Tr_z, r_y \rangle| \frac{\|R_z\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) \right) |\langle Sr_x, r_z \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_z\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(z) \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle Sr_x, r_z \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_z\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(z) \sup_{z \in \mathbb{B}_n} \int_{D(z, \frac{k}{2})^c} |\langle Tr_z, r_y \rangle| \frac{\|R_z\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y); \quad (3.1)$$

对第二个积分, 我们看到它不大于

$$\begin{aligned} & \int_{D(x, \frac{k}{2})^c} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle Tr_z, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) |\langle Sr_x, r_z \rangle| d\lambda(z) \\ & \leq \sup_{z \in \mathbb{B}_n} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle Tr_z, r_y \rangle| \frac{\|R_z\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x, \frac{k}{2})^c} |\langle Sr_x, r_z \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_z\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(z). \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.1) + (3.2), 然后左边对 x 取上确界, 并令 $k \rightarrow \infty$, 就有

$$\sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x, k)^c} |\langle T Sr_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

再证 $\mathfrak{T}_p \subset \bigcap_{0 < \delta < p^*} \mathfrak{B}_{p, \delta}$. 只需证: 若 $u \in L^\infty$, 则对每个 $0 < \delta < p^*$, Toeplitz 算子 $T_u \in \mathfrak{B}_{p, \delta}$. 注意到 $T_u^* = T_u$, 与上文的验证类似, 我们只验证对任意 $(n-2)/n < a < 1$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x, k)^c} |\langle T_u r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_y\|_2^a} d\lambda(y) = 0.$$

一方面,

$$|T_u r_x(y)| = \left| \int_{\mathbb{B}_n} u(z) r_x(z) R(y, z) dV(z) \right| \lesssim \|u\|_\infty \|R_y\|_2 \int_{\mathbb{B}_n} |\langle r_x, r_z \rangle| |\langle r_z, r_y \rangle| d\lambda(z);$$

另一方面,

$$|T_u r_x(y)| = |\langle T_u r_x, R_y \rangle| = \|R_y\|_2 |\langle T_u r_x, r_y \rangle|,$$

于是,

$$\sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x, k)^c} |\langle T_u r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_y\|_2^a} d\lambda(y) \lesssim \|u\|_\infty \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x, k)^c} \int_{\mathbb{B}_n} |\langle r_x, r_z \rangle| |\langle r_z, r_y \rangle| d\lambda(z) \frac{\|R_x\|_2^a}{\|R_y\|_2^a} d\lambda(y).$$

接下去的证明可仿照 (3.3) 的导出, 最后证明上式当 $k \rightarrow \infty$ 时极限为 0 用到了推论 2.5. $\square$

4 定理 1.2 的证明

引理 4.1 对于 $k > 0$, 存在可数点集 $\{x_j\}$ 以及 $\mathbb{B}_n$ 的 Borel 子集 $\{F_j\}$, 满足

- (1) $D(x_j, \frac{1}{2}k) \subset F_j \subset D(x_j, k)$;
- (2) $\mathbb{B}_n = \bigcup_j F_j$;
- (3) 对 $j \neq i$, 有 $F_j \cap F_i = \emptyset$;
- (4) 对任意 $\gamma > 0$, 存在 J , 使得只要 $j > J$, 则 $F_j \subset \mathbb{B}_n \setminus D(0, \gamma)$.

该引理的证明可仿照文献 [11, 引理 2.6].

引理 4.2 对任意 $k > 0$, 都存在正整数 $N_k > 0$ 以及 $\mathbb{B}_n$ 的一个不交 Borel 覆盖 $\mathcal{F}_k = \{F_j\}$, 满足

- (1) $\mathbb{B}_n$ 中的任一点至多属于 N_k 个这样的集合 $G_j := \{x \in \mathbb{B}_n : \beta(x, F_j) \leq k\}$;

(2) 对任意 j , 有 $\text{diam}_\beta F_j \leq 2k$.

证明 由引理 4.1 可知, 对任意 $k > 0$, 存在点集 $\{x_j\} \in \mathbb{B}_n$ 和 Borel 集 $F_j \in \mathbb{B}_n$, 使得 $\mathcal{F}_k := \{F_j\}$ 是 $\mathbb{B}_n$ 的一个不交覆盖. 再根据引理 4.1(1), 我们有 $\text{diam}_\beta F_j \leq \text{diam}_\beta D(x_j, k) = 2k$, 这就证明了引理中的 (2).

接下来证明 (1), 即集合 $G_j = \{x \in \mathbb{B}_n : \beta(x, F_j) \leq k\}$ 具有有限重叠的性质. 因 $G_j \subset D(x_j, 2k)$, 故只要证相应的球 $D(x_j, 2k)$ 具有有限交的性质. 不妨设 $x \in \bigcap_{l=1}^N D(x_l, 2k)$, 这里 $1 \leq N \leq \infty$. 下证存在 N 的一个依赖于 k 的上界 $N_k < \infty$. 因 $(\mathbb{B}_n, \beta)$ 是一个度量空间, 故对任取的 $x_{l_0} \in \{x_l\}_{l=1}^N$, 有

$$\bigcup_{l=1}^N D\left(x_l, \frac{1}{2}k\right) \subset D\left(x_{l_0}, \frac{9}{2}k\right).$$

由 $\rho(x, y) = \rho(0, \varphi_x(y)) = |\varphi_x(y)|$ 以及测度 $d\lambda$ 的 Möbius 不变性可知, 对任意 $k > 0$ 和 j , 有

$$\lambda(D(x_j, k)) = \int_{D(x_j, k)} d\lambda(x) = \int_{D(0, k)} d\lambda(x) = \lambda(D(0, k)).$$

由引理 4.1(1) 和 4.1(3) 知,

$$D\left(x_j, \frac{1}{2}k\right) \cap D\left(x_i, \frac{1}{2}k\right) = \emptyset, \quad j \neq i.$$

于是,

$$N \cdot \lambda\left(D\left(0, \frac{1}{2}k\right)\right) = \sum_{l=1}^N \lambda\left(D\left(x_l, \frac{1}{2}k\right)\right) \leq \lambda\left(D\left(x_{l_0}, \frac{9}{2}k\right)\right) = \lambda\left(D\left(0, \frac{9}{2}k\right)\right),$$

从而取 $N_k := \left[\frac{\lambda(D(0, \frac{9}{2}k))}{\lambda(D(0, \frac{1}{2}k))}\right] + 1$ 即可, 其中 $[a]$ 是不超过 a 的最大整数. 这是一个只依赖于测度 $d\lambda$ 和 k 的有限常数, 因此引理成立. $\square$

命题 4.3 设 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < p^*$, 且 T 属于 $\mathfrak{B}_{p, \delta}$ 的范数闭包. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $k > 0$, 使得对于引理 4.2 的覆盖 $\mathcal{F}_k = \{F_j\}$, 有

$$\left\| TQ - \sum_j M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}} \right\|_{b^p \rightarrow L^p} < \epsilon,$$

其中 G_j 的定义见引理 4.2(1), 1_E 表示集合 E 的特征函数.

证明 由定理 1.1(2), 通过一个简单的逼近讨论, 我们不妨设 $T \in \mathfrak{B}_{p, \delta}$. 给定 $\epsilon > 0$, 只要 k 足够大, 就有

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x, k)^c} |\langle Tr_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1 - \frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1 - \frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) &< \frac{\epsilon}{4}, \\ \sup_{x \in \mathbb{B}_n} \int_{D(x, k)^c} |\langle T^* r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1 - \frac{2\delta}{pn}}}{\|R_y\|_2^{1 - \frac{2\delta}{pn}}} d\lambda(y) &< \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

固定 k , 对引理 4.2 中的 $\mathcal{F}_k = \{F_j\}$ 和 $\{G_j\}$, 定义算子 $S = TQ - \sum_j M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}}$, 则对任意 $f \in b^p$, 有

$$|Sf(x)| = \left| \sum_j (M_{1_{F_j}} TQ - M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}}) f(x) \right| = \left| \sum_j M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j^c}} f(x) \right|, \quad x \in \mathbb{B}_n.$$

对每个 j , 因 $M_{1_{G_j^c}} f \in L^p$ 和 $T^* R_x \in b^{p'}$, 故由 Fubini 定理知,

$$\begin{aligned} TQM_{1_{G_j^c}} f(x) &= \langle TQM_{1_{G_j^c}} f, R_x \rangle = \langle QM_{1_{G_j^c}} f, T^* R_x \rangle \\ &= \int_{\mathbb{B}_n} \left(\int_{\mathbb{B}_n} M_{1_{G_j^c}} f(z) R_y(z) dV(z) \right) T^* R_x(y) dV(y) \\ &= \int_{\mathbb{B}_n} M_{1_{G_j^c}} f(z) \left(\int_{\mathbb{B}_n} R_z(y) T^* R_x(y) dV(y) \right) dV(z) \\ &= \langle M_{1_{G_j^c}} f, QT^* R_x \rangle = \langle M_{1_{G_j^c}} f, T^* R_x \rangle, \end{aligned} \quad (4.1)$$

因此,

$$|Sf(x)| = \left| \sum_j M_{1_{F_j}} \langle M_{1_{G_j^c}} f, T^* R_x \rangle \right|.$$

对任意 $x \in \mathbb{B}_n$, 存在唯一的 j_0 使得 $x \in F_{j_0}$, 此时有 $D(x, k) \subset G_{j_0}$, 从而,

$$\begin{aligned} |Sf(x)| &= |\langle M_{1_{G_{j_0}^c}} f, T^* R_x \rangle| \leq \int_{\mathbb{B}_n} \mathbf{1}_{G_{j_0}^c}(y) |f(y)| |\langle T^* R_x, R_y \rangle| dV(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{B}_n} \mathbf{1}_{D(x, k)^c}(y) |\langle T^* R_x, R_y \rangle| |f(y)| dV(y). \end{aligned}$$

于是只需估计以 $\mathbf{1}_{D(x, k)^c}(y) |\langle T^* R_x, R_y \rangle|$ 为核函数的积分算子的范数. 设 $h(y) = \|R_y\|_2^{\frac{2\delta}{p'p'n}}$, 则由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_n} \mathbf{1}_{D(x, k)^c}(y) |\langle T^* R_x, R_y \rangle| h(y)^{p'} dV(y) &= \int_{D(x, k)^c} |\langle T^* R_x, R_y \rangle| \|R_y\|_2^{\frac{2\delta}{p'n}} dV(y) \\ &\leq 4 \|R_x\|_2^{\frac{2\delta}{p'n}} \int_{D(x, k)^c} |\langle T^* r_x, r_y \rangle| \frac{\|R_x\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}}{\|R_y\|_2^{1-\frac{2\delta}{p'n}}} d\lambda(y) \\ &< \epsilon \|R_x\|_2^{\frac{2\delta}{p'n}} = \epsilon h(x)^{p'}. \end{aligned}$$

类似可得

$$\int_{\mathbb{B}_n} \mathbf{1}_{D(x, k)^c}(y) |\langle T^* R_x, R_y \rangle| h(x)^p dV(x) < \epsilon h(y)^p.$$

根据 Schur 检验 (参见文献 [10, 定理 2.9]), 这就完成了证明. $\square$

引理 4.4 对 $(\mathbb{B}_n, \beta)$ 中的任一有界 Borel 集 G , M_{1_G} 是 b^p 到 L^p 的紧算子.

证明 因 G 是度量 β 下的有界集, 故存在有界开球 D , 使得 $G \Subset D \Subset \mathbb{B}_n$. 令 $\{f_j\} \subset b^p$ 是范数为 1 的函数列. 由 (2.1) 和引理 2.2 知, $\sup_{x \in D} \|R_x\|_{p'} < \infty$, 故存在不依赖于 j 的 M , 使得

$$\sup_{x \in D} |f_j(x)| = \sup_{x \in D} |\langle f_j, R_x \rangle| \leq \sup_{x \in D} \|R_x\|_{p'} \leq M.$$

于是, 由调和函数的 Montel 定理 (仿照经典的 Montel 定理易证) 知, 存在子列 $\{f_{j_k}\}$ 使得 $\{M_{1_{\overline{G}}} f_{j_k}\}$ 一致收敛. 从而, $\{M_{1_G} f_{j_k}\}$ 依 L^p 范数收敛. 这表明 M_{1_G} 是 b^p 到 L^p 的紧算子. $\square$

定理 1.2 的证明 先证右边的不等式. 因 $Q: L^p \rightarrow b^p$ 是有界算子, 故只需估计 $T = TQ$ 作为从 b^p 到 L^p 的算子的本性范数.

若 $\|TQ\|_e = 0$, 则不证自明, 因此, 我们不妨设 $\|TQ\|_e > 0$. 根据命题 4.3, 存在 $k > 0$, 使得对引理 4.2 中的覆盖 $\mathcal{F}_k = \{F_j\}$ 和集合列 $\{G_j\}$, 有

$$\left\| TQ - \sum_j M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}} \right\|_{b^p \rightarrow L^p} < \frac{1}{2} \|TQ\|_e.$$

对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 由引理 4.4 知, $\sum_{j < m} M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}}$ 是 b^p 到 L^p 的紧算子, 因此, 我们以如下方式估计 $\|TQ\|_e$ (作为从 b^p 到 L^p 的算子):

$$\begin{aligned} \|TQ\|_e &\leq \left\| TQ - \sum_{j < m} M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}} \right\|_{b^p \rightarrow L^p} \leq \left\| TQ - \sum_j M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}} \right\|_{b^p \rightarrow L^p} + \|T_m\|_{b^p \rightarrow L^p} \\ &< \frac{1}{2} \|TQ\|_e + \|T_m\|_{b^p \rightarrow L^p}, \end{aligned}$$

其中 $T_m = \sum_{j \geq m} M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}}$. 接下来只需证: 存在 $C' > 0$ (依赖于 k), 使得

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T_m\|_{b^p \rightarrow L^p} \leq C' \limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| + \frac{N_k^{\frac{1}{p}}}{2N_k^{\frac{1}{p}} + 1} \|TQ\|_e,$$

其中 N_k 来自引理 4.2(1).

设 $f \in b^p$ 满足 $\|f\|_p \leq 1$, 则

$$\|T_m f\|_p^p = \sum_{j \geq m} \|M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}} f\|_p^p = \sum_{j \geq m} \frac{\|M_{1_{F_j}} TQ M_{1_{G_j}} f\|_p^p}{\|M_{1_{G_j}} f\|_p^p} \|M_{1_{G_j}} f\|_p^p \leq N_k \sup_{j \geq m} \|M_{1_{F_j}} Tg_j\|_p^p,$$

其中 $g_j := \frac{QM_{1_{G_j}} f}{\|M_{1_{G_j}} f\|_p}$. 因此,

$$\|T_m\|_{b^p \rightarrow L^p} \leq N_k^{\frac{1}{p}} \sup_{j \geq m} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\{ \|M_{1_{F_j}} Tg_j\|_p : g_j = \frac{QM_{1_{G_j}} f}{\|M_{1_{G_j}} f\|_p} \right\}.$$

于是,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T_m\|_{b^p \rightarrow L^p} \leq N_k^{\frac{1}{p}} \limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\{ \|M_{1_{F_j}} Tg_j\|_p : g_j = \frac{QM_{1_{G_j}} f}{\|M_{1_{G_j}} f\|_p} \right\}.$$

现在选择函数列 $\{f_j\} \subset b^p$ 满足 $\|f_j\|_p \leq 1$, 使得

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\{ \|M_{1_{F_j}} Tg_j\|_p : g_j = \frac{QM_{1_{G_j}} f}{\|M_{1_{G_j}} f\|_p} \right\} - \frac{1}{2N_k^{\frac{1}{p}} + 1} \|TQ\|_e \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|M_{1_{F_j}} Th_j\|_p,$$

这里 $h_j = \frac{QM_{1_{G_j}} f_j}{\|M_{1_{G_j}} f_j\|_p}$. 下面只需证: 存在 $C'' > 0$ (依赖于 k), 使得

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|M_{1_{F_j}} Th_j\|_p^p \lesssim C'' \limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p.$$

根据 (4.1) 的证明和再生性可知, 对任意 j , 有

$$\|M_{1_{F_j}} Th_j\|_p^p = \frac{\int_{F_j} |TQ M_{1_{G_j}} f_j(x)|^p dV(x)}{\|M_{1_{G_j}} f_j\|_p^p} = \frac{\int_{F_j} |\langle M_{1_{G_j}} f_j, T^* R_x \rangle|^p dV(x)}{\|M_{1_{G_j}} f_j\|_p^p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_{F_j} |\int_{G_j} f_j(y) T^* R_x(y) dV(y)|^p dV(x)}{\|M_{1_{G_j}} f_j\|_p^p} \\
&\lesssim \frac{\int_{F_j} (\int_{G_j} |\langle f_j, r_y^{(p')} \rangle| |\langle T^* r_x^{(p')}, r_y^{(p)} \rangle| d\lambda(y))^p d\lambda(x)}{\int_{G_j} |\langle f_j, r_z^{(p')} \rangle|^p d\lambda(z)} \\
&= \int_{F_j} \left(\int_{G_j} |v_j(y)| |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| d\lambda(y) \right)^p d\lambda(x),
\end{aligned}$$

其中

$$v_j(y) := \frac{\langle f_j, r_y^{(p')} \rangle}{(\int_{G_j} |\langle f_j, r_z^{(p')} \rangle|^p d\lambda(z))^{\frac{1}{p}}}.$$

从引理 4.2 可以看到, (1) 若 $x \in F_j, y \in G_j$, 则 $\beta(x, y) \leq 3k$; (2) $\lambda(G_j) \leq L_k$, 其中 L_k 是不依赖于 j 的常数. 利用这些结论, 由 Hölder 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
\limsup_{j \rightarrow \infty} \|M_{1_{F_j}} T h_j\|_p^p &\lesssim \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{F_j} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p d\lambda(x) \left(\int_{G_j} 1 \cdot |v_j(y)| d\lambda(y) \right)^p \\
&\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{F_j} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p d\lambda(x) \left(\sup_j \lambda(G_j)^{\frac{p}{p'}} \int_{G_j} |v_j(y)|^p d\lambda(y) \right) \\
&\leq L_k^{\frac{p}{p'}} \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{F_j} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p d\lambda(x) \\
&\leq L_k^{\frac{p}{p'}} \lambda(D(0, k)) \limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in F_j} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p \\
&= C'' \lim_{J \rightarrow \infty} \sup_{j \geq J} \sup_{x \in F_j} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p \\
&\leq C'' \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{B}_n \setminus D(0, \gamma)} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p \\
&= C'' \limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, 3k)} |\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|^p,
\end{aligned}$$

其中 $C'' = L_k^{\frac{p}{p'}} \lambda(D(0, k))$, 倒数第二行的估计用到了引理 4.1(4). 于是, 右边的不等式成立.

再证左边的不等式. 任取一个从 b^p 到 b^p 的紧算子 P . 由三角不等式, 得

$$|\langle T r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| - |\langle P r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| \leq |\langle T r_y^{(p)} - P r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle|. \quad (4.2)$$

因 T 和 P 都是有界的, 故根据 Hölder 不等式和文献 [12, 引理 2],

$$|\langle T r_y^{(p)} - P r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| \leq \|T r_y^{(p)} - P r_y^{(p)}\|_p \|r_x^{(p')}\|_{p'} \lesssim \|T - P\|. \quad (4.3)$$

因 P 是 b^p 到 b^p 的紧算子, 故由文献 [12, 引理 3], 当 $|y| \rightarrow 1^-$ 时, 有 $\|P r_y^{(p)}\|_p \rightarrow 0$, 从而,

$$\begin{aligned}
\limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, k)} |\langle P r_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| &\leq \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{B}_n \setminus D(0, \gamma)} \sup_{y \in D(x, k)} \|P r_y^{(p)}\|_p \|r_x^{(p')}\|_{p'} \\
&\lesssim \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{B}_n \setminus D(0, \gamma-k)} \|P r_y^{(p)}\|_p \\
&= \limsup_{|y| \rightarrow 1^-} \|P r_y^{(p)}\|_p = 0.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

结合 (4.2)–(4.4) 可知, 存在常数 C , 使得

$$\limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| \leq \limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, k)} |\langle Pr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| + C \|T - P\| = C \|T - P\|.$$

这就证明了左边的不等式. □

参考文献

- 1 Axler S, Bourdon P, Ramey W. Harmonic Function Theory. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 137. New York: Springer-Verlag, 2001
- 2 Xia J, Zheng D. Localization and Berezin transform on the Fock space. J Funct Anal, 2013, 264: 97–117
- 3 Isralowitz J, Mitkovski M, Wick B D. Localization and compactness in Bergman and Fock spaces. ArXiv:1306.0316v4, 2013
- 4 Suárez D. The essential norm of operators in the Toeplitz algebra on $A^p(B_n)$. Indiana Univ Math J, 2007, 56: 2185–2232
- 5 Ahlfors L V. Möbius Transformations in Several Dimensions. [Http://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/137558](http://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/137558), 1981
- 6 Andrews G, Askey R, Roy R. Special Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- 7 Ren G. Harmonic Bergman spaces with small exponents in the unit ball. Collect Math, 2002, 53: 83–98
- 8 Liu C, Peng L. Boundary regularity in the Dirichlet problem for the invariant Laplacian Δ_r on the unit real ball. Proc Amer Math Soc, 2004, 132: 3259–3268
- 9 Whittaker E, Watson G. A Course of Modern Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- 10 Zhu K. Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. Graduate Texts in Mathematics 226. New York: Springer-Verlag, 2005
- 11 Arcozzi N, Rochberg R, Sawyer E. Carleson Measures and Interpolating Sequences for Besov Spaces on Complex Balls. Providence: Amer Math Soc, 2006
- 12 Miao J. Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces. Integral Equations Operator Theory, 1997, 27: 426–438

Algebra of the weakly localized operators on harmonic Bergman spaces

LIU CongWen & LIN BingWen

Abstract In this note, we introduce a class of the so-called weakly localized operators on the harmonic Bergman spaces, which forms an algebra and contains all Toeplitz operators with bounded symbols. Our main result gives a criterion of the compactness for this class of operators, i.e., T is a compact operator on b^p if and only if there exists $k > 0$, such that $\limsup_{|x| \rightarrow 1^-} \sup_{y \in D(x, k)} |\langle Tr_y^{(p)}, r_x^{(p')} \rangle| = 0$.

Keywords harmonic Bergman space, weakly localized operators, Toeplitz operators

MSC(2010) 32A36, 47B05, 47B35

doi: 10.1360/N012015-00147