一类 Hartogs 域的极小外切 Hermite 椭球及其对极值问题的应用

王安^{①*}, AHN Heungju^②, PARK Jong-Do^③

① 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

② Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, Korea

③ School of Mathematics, Korea Institute for Advanced Study, Hoegiro 87, Dongdaemun-gu, Seoml 130-722, Korea

E-mail: wangan@mail.cnu.edu.cn, heungju@math.snu.ac.kr, jdpark@kias.re.kr

收稿日期: 2008-06-10; 接受日期: 2008-09-04

国家自然科学基金 (批准号: 10771144)、北京市自然科学基金 (批准号: 1082005)、北京市优秀博士学位论文指导教师基金 (批准号: YB20081002802) 资助项目和 The Korea Research Foundation Grant funded by Korea Government (MOEHRD, Basic Research Promotion Fund) (批准号: KRF-2005-070-C00007)

摘要 构造了一类 Hartogs 域的具有最小体积的外切 Hermite 椭球. 作为一个应用, 得到了从这类 Hartogs 域到单位球的 Carathéodory 极值映射. 并且给出了计算极值的显式公式.

关键词 Hartogs 域 极小外切 Hermite 椭球 极值问题

MSC(2000) 主题分类 32H02, 32F45

1 引言

设 Cartan 的第 1 类不可约有界对称域为 $\Re_I(m, n)$, 即 $\Re_I(m, n)$ 为 $m \times n$ 的复矩阵 Z 的集合, Z 满足 $I - Z\bar{Z}^T > 0$, 其中 I 为 m 阶单位方阵, $\bar{Z}^T$ 为 Z 的共轭转置矩阵, Hermite 方阵 $M > 0$ 表示 M 为正定. 对于 $(w, Y, Z) \in \mathbb{C}^N \times \Re_I(k, l) \times \Re_I(m, n)$, 我们用以下坐标表示:

$$\begin{aligned} w &= (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^N; \\ Y &= (y_{ij})_{k \times l} = (y_{11}, \dots, y_{1l}, y_{21}, \dots, y_{2l}, \dots, y_{kl}) \in \mathbb{C}^{kl}; \\ Z &= (z_{ij})_{m \times n} = (z_{11}, \dots, z_{1n}, z_{21}, \dots, z_{2n}, \dots, z_{mn}) \in \mathbb{C}^{mn}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

首先引入一类域, 本文中称为 Hartogs 域

$$\begin{aligned} W &= W(N; k, l, s_1; m, n, s_2) \\ &= \{ (w, Y, Z) \in \mathbb{C}^{N+kl+mn} : \|w\|^2 < \det(I - Y\bar{Y}^T)^{s_1} \cdot \det(I - Z\bar{Z}^T)^{s_2} \}, \end{aligned}$$

其中 $Y \in \Re_I(k, l)$, $Z \in \Re_I(m, n)$, s_1 和 s_2 为正实数.

其次定义 Hermite 椭球. Hermite 椭球指形如 $\{z \in \mathbb{C}^p : \sum_{j,k=1}^p a_{jk} z_j \bar{z}_k < 1\}$, 其中 $(a_{jk})_{p \times p}$ 为正定 Hermite 阵. 本文的第 1 个目的是给出 Hartogs 域的具有最小体积的外切

Hermite 椭球, 或称极小外切 Hermite 椭球的构造, 使其仅依赖于 Hartogs 域定义中的那些参数 N, k, l, s_1, m, n, s_2 . 事实上, 由于 W 为有界域, 已知其极小外切 Hermite 椭球存在唯一^[1, 2]; 本文的结果是给出 W 的极小外切 Hermite 椭球的具体构造. 作为这个构造的一个应用, 解决了所谓的 Carathéodory 极值问题. 令 $\text{Hol}(W, \mathbf{B})$ 为从 W 到单位球 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N+kl+mn}$ 的把原点映为原点的全纯映射集合, 则 Carathéodory 极值问题是求一个极值映射 $f \in \text{Hol}(W, \mathbf{B})$, 使得

$$|\det df(0)| = \sup\{|\det dg(0)| : g \in \text{Hol}(W, \mathbf{B})\}.$$

1932 年 Carathéodory 本人首次研究了这个问题^[3], 他研究了多圆盘和球之间的极值映射. 此后, Kubota^[4-7] 和 Travaglini^[8] 通过构造对称域的极小外切椭球而得到对称域与超球的极值映射的显式表达. 1997 年, Ma^[2] 也得到了广义复椭球和超球之间的极值映射的显式公式. 最近, 殷慰萍及其合作者^[9-12] 广泛研究了 Cartan-Hartogs 域上的 Carathéodory 极值问题. 本文处理较 Cartan-Hartogs 域更广的一类域上的极值问题.

在叙述主要定理之前, 先做一些准备和约定. 设 Hartogs 域 W 的定义中的常数 N, k, l, s_1, m, n, s_2 是不变的, 且 $k \leq l, m \leq n$. 令 $\beta = ms_2, \alpha = ks_1, E(a, b, c) := \{(w, Y, Z) \in \mathbb{C}^{N+kl+mn} : a\|w\|^2 + b\|Y\|^2 + c\|Z\|^2 < 1\}$. 这是一类特殊的 Hermite 椭球, 并且下文只关注 4 种特殊的 Hermite 椭球:

(i) $E_1 := E(a_1, b_1, c_1)$, 其中

$$a_1 = \left(\frac{\alpha N + kl}{\alpha(N + kl + mn)} \right)^\alpha \left(\frac{\beta N + kl}{\beta(N + kl + mn)} \right)^\beta \left(\frac{N}{N + kl + mn} \right)^{1-\alpha-\beta},$$

$$b_1 = \frac{\alpha N + kl}{k(N + kl + mn)}, \quad c_1 = \frac{\beta N + mn}{m(N + kl + mn)}.$$

(ii) $E_2 := E(a_2, b_2, c_2)$, 其中

$$a_2 = \left(\frac{\alpha N + kl}{\alpha(N + kl + mn)} \right)^\alpha \left(\frac{(1-\alpha)N + kl}{\beta(N + kl + mn)} \right)^{1-\alpha},$$

$$b_2 = \frac{\alpha N + kl}{k(N + kl + mn)}, \quad c_2 = \frac{(1-\alpha)N + mn}{m(N + kl + mn)}.$$

(iii) $E_3 := E(a_3, b_3, c_3)$, 其中

$$a_3 = \left(\frac{(1-\beta)N + kl}{\alpha(N + kl + mn)} \right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta N + kl}{\beta(N + kl + mn)} \right)^\beta,$$

$$b_3 = \frac{(1-\beta)N + kl}{k(N + kl + mn)}, \quad c_3 = \frac{\beta N + mn}{m(N + kl + mn)}.$$

(iv) $E_4 := E(a_4, b_4, c_4)$, 其中

$$a_4 = 1, \quad b_4 = \frac{l}{kl + mn}, \quad c_4 = \frac{n}{kl + mn}.$$

定理 1.1 W 的极小外切椭球 E 是下列 4 种情形之一:

1. 如果 $\alpha + \beta \leq 1$, 则 $E = E_1$.
2. 如果 $\alpha + \beta > 1$, 此时有 3 种可能情形,

$$E = \begin{cases} E_3, & \text{如果 } kl/(kl + mn) \leq 1 - \beta; \\ E_4, & \text{如果 } 1 - \beta \leq kl/(kl + mn) \leq \alpha; \\ E_2, & \text{如果 } kl/(kl + mn) \geq \alpha. \end{cases}$$

2 准备工作

本节要证明 W 的极小外切 Hermite 椭球具有特殊的形式: $E(a, b, c) = \{(w, Y, Z) \in \mathbb{C}^{N+kl+mn} : a\|w\|^2 + b\|Y\|^2 + c\|Z\|^2 < 1\}$. 这可由构造从 W 到 W 自身的一个特殊的全纯映射得到 [11].

命题 2.1 W 的极小外切 Hermite 椭球具有形式 $E(a, b, c)$.

我们用两个初等复线性变换来定义任意一个复线性映射,

$$I^{(j)} = j \text{ 阶单位矩阵}; \quad E_{\mu\nu}^{(j)} = (e_{\gamma\delta})_{j \times j}, \quad e_{\mu\nu} = 1, \quad \text{否则 } e_{\gamma\delta} = 0.$$

首先, 对于 $(w, Y, Z) \in W$, 定义以下 3 类 W 上的复线性变换:

$$\varphi_j^w(w, Y, Z) = (w(I^{(N)} - 2E_{jj}^{(N)}), Y, Z), \quad 1 \leq j \leq N; \quad (2.1)$$

$$\varphi_j^Y(w, Y, Z) = (w, (I^{(k)} - 2E_{jj}^{(k)})Y, Z), \quad 1 \leq j \leq k; \quad (2.2)$$

$$\varphi_j^Z(w, Y, Z) = (w, Y, (I^{(m)} - 2E_{jj}^{(m)})Z), \quad 1 \leq j \leq m; \quad (2.3)$$

$$\tilde{\varphi}_i^Y(w, Y, Z) = (w, Y(I^{(l)} - 2E_{ii}^{(l)}), Z), \quad 1 \leq i \leq l; \quad (2.4)$$

$$\tilde{\varphi}_i^Z(w, Y, Z) = (w, Y, Z(I^{(n)} - 2E_{ii}^{(n)})), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.5)$$

对于 $1 \leq \zeta < \eta \leq N$, $1 \leq \gamma < \delta \leq k$, 且 $1 \leq \mu < \nu \leq m$,

$$\psi_{\zeta\eta}^w(w, Y, Z) = (w(I^{(N)} - E_{\zeta\zeta}^{(N)} - E_{\eta\eta}^{(N)} + E_{\zeta\eta}^{(N)} + E_{\eta\zeta}^{(N)}), Y, Z); \quad (2.6)$$

$$\psi_{\gamma\delta}^Y(w, Y, Z) = (w, (I^{(k)} - E_{\gamma\gamma}^{(k)} - E_{\delta\delta}^{(k)} + E_{\gamma\delta}^{(k)} + E_{\delta\gamma}^{(k)})Y, Z); \quad (2.7)$$

$$\psi_{\mu\nu}^Z(w, Y, Z) = (w, Y, (I^{(m)} - E_{\mu\mu}^{(m)} - E_{\nu\nu}^{(m)} + E_{\mu\nu}^{(m)} + E_{\nu\mu}^{(m)})Z); \quad (2.8)$$

对于 $1 \leq \gamma < \delta \leq l$, 且 $1 \leq \mu < \nu \leq n$,

$$\tilde{\psi}_{\gamma\delta}^Y(w, Y, Z) = (w, Y(I^{(l)} - E_{\gamma\gamma}^{(l)} - E_{\delta\delta}^{(l)} + E_{\gamma\delta}^{(l)} + E_{\delta\gamma}^{(l)}), Z); \quad (2.9)$$

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu}^Z(w, Y, Z) = (w, Y, Z(I^{(n)} - E_{\mu\mu}^{(n)} - E_{\nu\nu}^{(n)} + E_{\mu\nu}^{(n)} + E_{\nu\mu}^{(n)})). \quad (2.10)$$

注意以上线性映射都是 W 到 W 自身的满射. 例如: φ_j^Y 除了把 Y 的第 j 行 $(y_{j1}, \dots, y_{jk})$ 变为 $-(y_{j1}, \dots, y_{jk})$, (w, Y, Z) 中其他变量恒同地映为自己; φ_1^w 把 $(w_1, w_2, \dots, w_N)$ 映为 $(-w_1, w_2, \dots, w_N)$, 把 (Y, Z) 恒同映为 (Y, Z) , $\psi_{\gamma\delta}^Y$ 交换矩阵 Y 的第 γ 行和第 δ 行, 把 (w, Y, Z) 中其他变量恒同映为自己; 线性映射 $\tilde{\psi}_{\mu\nu}^Z$ 交换矩阵 Z 的第 μ 列和第 ν 列等等.

设 S 是 W 的一个极小外切 Hermite 椭球. 即 Hermite 阵 A, B, C 的阶分别为 N, kl, mn , 定义 S 为

$$S = \left\{ (w, Y, Z) \in \mathbb{C}^{N+kl+mn} : (w, Y, Z) \begin{pmatrix} A & D & E \\ \overline{D}^T & B & F \\ \overline{E}^T & \overline{F}^T & C \end{pmatrix} (\bar{w}, \bar{Y}, \bar{Z})^T < 1 \right\},$$

其中, 使用的坐标如 (1.1) 式, 把 Y 和 Z 分别看成 $\mathbb{C}^{kl}$ 和 $\mathbb{C}^{mn}$ 中的行向量. 我们将证明对于某些正实数 a, b, c , 有 $S = E(a, b, c)$ 或等价地 $D = 0, E = 0, F = 0$ 且 A, B, C 分别是对角线元素为 a, b, c 的对角阵. 为此, 我们来证明下述简单的引理:

引理 2.1 [8, 11] 对于包含原点的有界域 D 和非异的线性映射 L , 若 $L(D) = D$, 则有 $L(P(D)) = P(D)$, 其中 $P(D)$ 是 D 的极小外切 Hermite 椭球.

证明 首先, 注意到若 $T : D \rightarrow \mathbf{B}$ 是复线性映射, 则 $T^{-1}(\mathbf{B})$ 是包含 D 的 Hermite 椭球. 且若 T 是极值映射, 即

$$|\det T| = \sup\{|\det t| : t(D) \subset \mathbf{B} \text{ 是复线性映照}\}, \quad (2.11)$$

则 $T^{-1}(\mathbf{B})$ 是 D 的极小外切 Hermite 椭球. 不妨设 $T(z) = Tz$, $z \in D$ (其中把 T 和 z 分别看成矩阵和列向量), 因为对于 $z \in D$, 立即得到 $T^{-1}(\mathbf{B}) = \{\sum a_{jk} z_j \bar{z}_k < 1\}$, 其中 $(a_{jk}) = \bar{T}^T T$, 因此 $T^{-1}(\mathbf{B})$ 是包含 D 的 Hermite 椭球. 另一方面, 因为 Hermite 椭球 $T^{-1}(\mathbf{B}) = \{\sum a_{jk} z_j \bar{z}_k < 1\}$ 的体积是 $1/\det(a_{ij}) = 1/|\det T|^2$ 的某个常数倍. 所以由 (2.11) 式, $T^{-1}(\mathbf{B})$ 是 D 的极小外切 Hermite 椭球.

其次, 假设 T 是一个极值映射. 因为 $L(D) = D$, 就有 $TL^{-1}(L(D)) \subset \mathbf{B}$ 且 TL^{-1} 是以下 Carathéodory 极值问题的一个解:

$$|\det TL^{-1}| = \sup\{|\det s| : s(L(D)) \subset \mathbf{B} \text{ 是复线性映照}\}.$$

因而, $P(L(D)) = (TL^{-1})^{-1}(\mathbf{B}) = LT^{-1}(\mathbf{B}) = L(T^{-1}(\mathbf{B}))$. 因为极小外切 Hermite 椭球是唯一的^[1] 且 $L(D) = D$, 从而有 $P(D) = L(P(D))$.

命题 2.1 的证明 由引理 2.1, 对 $1 \leq j \leq N$ 和 $1 \leq \gamma < \delta \leq N$. $\varphi_j^w(S) = S$ 和 $\psi_{\gamma\delta}^w(S) = S$, 因此 A 是对角线元素全部相同的对角矩阵, 且 D 和 E 的每个元素都为 0 (例如, 由 $\varphi_1(S) = S$ 就得到第 1 行形如 $(a_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{N+kl+mn}$). 类似地, 用 (2.2)–(2.5) 式定义的线性映射可知 B 和 C 是对角阵, F 的每个元素都为 0, 再由 (2.7)–(2.10) 式定义的线性映射, 可知 B 和 C 分别为所有对角线元素都相同的矩阵.

由命题 2.1, 可知 Hartogs 域 W 的极小外切的 Hermite 椭球的具体形式, 下面解释如何找到 W 的极小外切 Hermite 椭球 $E(a, b, c)$ 中 a, b, c 的具体值.

对于每个 $k \times l$ ($k \leq l$) 的矩阵 Y , 可以有 $Y = U\Lambda V$, 其中 U 和 V 分别为 $k \times k$ 和 $l \times l$ 阶酉矩阵, $k \times l$ 阶阵 Λ 形如

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\lambda}_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $0 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \cdots \leq \tilde{\lambda}_k$ ^[13]. $m \times n$ ($m \leq n$) 矩阵 Z 也可以表示为 $Z = G\Gamma H$ 形式, 其中 Γ 是一个 $m \times n$ 矩阵形状与 Λ 相同, 其对角元素是 $0 \leq \tilde{\mu}_1 \leq \cdots \leq \tilde{\mu}_m$. 因为 $I - Y\bar{Y}^T > 0$ 和 $I - Z\bar{Z}^T > 0$ 对于 $Y \in \mathfrak{R}_I(k, l)$, $Z \in \mathfrak{R}_I(m, n)$, 有 $0 \leq \tilde{\lambda}_j^2 < 1$, $1 \leq j \leq k$ 和 $0 \leq \tilde{\mu}_j^2 < 1$, $1 \leq j \leq m$, 从而有

$$\begin{aligned} \|Y\|^2 &= \text{trace}(Y\bar{Y}^T) = \tilde{\lambda}_1^2 + \cdots + \tilde{\lambda}_k^2 < k, \\ \|Z\|^2 &= \text{trace}(Z\bar{Z}^T) = \tilde{\mu}_1^2 + \cdots + \tilde{\mu}_m^2 < m. \end{aligned} \quad (2.12)$$

因为 $a\|w\|^2 < 1$, $b\|Y\|^2 < 1$, 且 $c\|Z\|^2 < 1$ 对于 $(w, Y, Z) \in W \subset E(a, b, c)$, 由 (2.12) 式可知, 若 $W \subset E(a, b, c)$, 则

$$0 < a \leq 1, \quad 0 < b \leq \frac{1}{k}, \quad 0 < c \leq \frac{1}{m}. \quad (2.13)$$

对于 W 的每个边界点 $(w, Y, Z) \in \partial W$, 有

$$\|w\|^2 = \det(I - Y\bar{Y}^T)^{s_1} \det(I - Z\bar{Z}^T)^{s_2} = [(1 - \tilde{\lambda}_1^2) \cdots (1 - \tilde{\lambda}_k^2)]^{s_1} [(1 - \tilde{\mu}_1^2) \cdots (1 - \tilde{\mu}_m^2)]^{s_2}.$$

于是在 W 的边界上, 有

$$\begin{aligned}
 & a\|w\|^2 + b\|Y\|^2 + c\|Z\|^2 \\
 &= [(1 - \tilde{\lambda}_1^2) \cdots (1 - \tilde{\lambda}_k^2)]^{s_1} [(1 - \tilde{\mu}_1^2) \cdots (1 - \tilde{\mu}_m^2)]^{s_2} + b \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i^2 + c \sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i^2 \\
 &\leq a \left(1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i^2\right)^{ks_1} \left(1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i^2\right)^{ms_2} + b \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i^2 + c \sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i^2 \\
 &= a(1 - \lambda)^\alpha (1 - \mu)^\beta + bk\lambda + cm\mu,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中 $\lambda = \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i^2/k$ 和 $\mu = \sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i^2/m$. 注意 $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. 为记号简单起见, 定义

$$g(x, y) = g_{(a,b,c)}(x, y) = ax^\alpha y^\beta + bk(1 - x) + cm(1 - y), \tag{2.15}$$

其中 $(x, y) \in I \times I = \{(s, t) : 0 \leq s, t \leq 1\}$.

下面是一个 Hermite 椭球 $E(a, b, c)$ 外切于域 W 的判别准则.

引理 2.2^[11] $E(a, b, c)$ 是 W 的外切 Hermite 椭球或 $W \subset E(a, b, c)$ 且 $\partial W \cap \partial E(a, b, c) \neq \emptyset$ 的充要条件是存在 $(x_0, y_0) \in I \times I$, 使得 $g(x_0, y_0) = \max_{I \times I} g(x, y) = 1$.

在以上引理的原证明中, 只用了单变量函数 $g(x, 1)$ 而非 $g(x, y)$, 因为他们处理的是不同的域 (Cartan-Hartogs 域) 但证明的实质是一致的, 故省略其证明. 利用引理 2.2, 我们将从 W 的外切 Hermite 椭球中找到体积极小的, 下节将解决这一问题.

3 定理 1.1 的证明

本节要找出使得 $g(x_0, y_0) = 1$ 的点 $(x_0, y_0) \in I \times I$ 的具体值. 然后, 在下列条件下,

$$g(x_0, y_0) = g_{(a,b,c)}(x_0, y_0) = 1, \quad 0 < a \leq 1, \quad 0 < b \leq \frac{1}{k}, \quad 0 < c \leq \frac{1}{m}, \tag{3.1}$$

要求出 a_0, b_0, c_0 , 使得函数 $f(a, b, c) = a^N b^{kl} c^{mn}$ 在 a_0, b_0, c_0 取到最大值. 事实上, 因为 $V(E(a, b, c)) = V(\mathbf{B})/f(a, b, c)$, 由引理 2.2, $E(a_0, b_0, c_0)$ 是 W 的极小外切 Hermite 椭球.

首先求出 g 的临界点, 先假定 $\alpha + \beta \neq 1, \alpha \neq 1, \beta \neq 1$. 因为

$$\nabla g(x, y) = (a\alpha x^{\alpha-1} y^\beta - bk, a\beta x^\alpha y^{\beta-1} - cm),$$

函数 $g(x, y)$ 只有一个临界点 (x_0, y_0) . 定义

$$A := \frac{bk}{a\alpha} = x_0^{\alpha-1} y_0^\beta, \quad B := \frac{cm}{a\beta} = x_0^\alpha y_0^{\beta-1},$$

于是

$$x_0 = A^{(1-\beta)/(\alpha+\beta-1)} B^{\beta/(\alpha+\beta-1)}, \quad y_0 = A^{\alpha/(\alpha+\beta-1)} B^{(1-\alpha)/(\alpha+\beta-1)}.$$

此时

$$g(x_0, y_0) = a(1 - \alpha - \beta) A^{\alpha/(\alpha+\beta-1)} B^{\beta/(\alpha+\beta-1)} + bk + cm. \tag{3.2}$$

其次, 求出定义在 $I \times I$ 上的 $g(x, y)$ 何时在 (x_0, y_0) 处取到极值, 因为 g 的实 Hesse 矩阵为

$$Hg(x, y) = \begin{pmatrix} a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & a\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ a\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & a\beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{pmatrix},$$

并且

$$\det Hg(x, y) = a\alpha\beta(1 - \alpha - \beta)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2},$$

若 $\alpha + \beta < 1$, 则 g 在 (x_0, y_0) 取到局部极大值. 若 $\alpha + \beta > 1$, 则 g 在 $I \times I$ 的内部无局部极大值, 即 g 在 $I \times I$ 的边界上有局部极大值.

剩下的情形是 $\alpha + \beta = 1$, 但是此情形简单得多. 注意到 $g(x, 0)$ 和 $g(0, y)$ 是线性递减的, $g(x, 1)$ 和 $g(1, y)$ 在 $I = \{0 \leq s \leq 1\}$ 上不是线性的, 现在来研究 $g(\cdot, 1)$ 和 $g(1, \cdot)$ 何时极值. 因为 $g'(x, 1)|_{x=x_0^*} = g'(1, y)|_{y=y_0^*} = 0$, 其中

$$x_0^* = A^{1/(\alpha-1)}, \quad y_0^* = B^{1/(\beta-1)},$$

所以 $g(\cdot, 1)$ 和 $g(1, \cdot)$ 在 x_0^* 和 y_0^* 处分别取到极值.

$$g(x_0^*, 1) = a(1 - \alpha)A^{\alpha/(\alpha-1)} + bk, \quad (3.3)$$

$$g(1, y_0^*) = a(1 - \beta)B^{\beta/(\beta-1)} + cm. \quad (3.4)$$

为求得 g 在 $I \times I$ 的整体极大值, 要求出 g 在何时取到极大值. 为此把 $g(\cdot, 1)$ 和 $g(1, \cdot)$ 取到整体极大值的条件用 A 和 B 表示, 而不再用 a, b, c . 对任意 $\alpha, \beta > 0, \alpha \neq 1$, 就有 $\beta \neq 1$,

$$g(1, 1) \geq g(0, 0) \iff \alpha A + \beta B \leq 1, \quad (3.5)$$

$$g(x_0^*, 1) \geq bk + cm \iff BA^{\alpha/(1-\alpha)} \leq \frac{1-\alpha}{\beta}, \quad (3.6)$$

$$g(1, y_0^*) \geq bk + cm \iff AB^{\beta/(1-\beta)} \leq \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (3.7)$$

在 (A, B) 平面上, 可知曲线 $\alpha A + \beta B = 1$ 分别与曲线 $BA^{\alpha/(1-\alpha)} = (1-\alpha)/\beta$, $AB^{\beta/(1-\beta)} = (1-\beta)/\alpha$ 仅切于 $(1, (1-\alpha)/\beta)$ 和 $((1-\beta)/\alpha, 1)$.

3.1 情形 I: $\alpha + \beta < 1$

在此情形下, g 只有在 (x_0, y_0) 点取到局部最大值. 根据 (x_0, y_0) 的位置, 分情形如下:

(i) 若 $A^{1-\beta}B^\beta > 1$, $A^\alpha B^{1-\alpha} > 1$, 则 (x_0, y_0) 在 $I \times I$ 内部, 有 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(x_0, y_0)$.

(ii) 若 $A^\alpha B^{1-\alpha} \leq 1$, $A \geq 1$, 则 $B^{1-\alpha} \leq A^{-\alpha} \leq 1$, $B \leq 1$. 此时 $0 \leq x_0^* \leq 1$, $y_0^* \geq 1$, 因此有 $\max_{I \times I} g(x, y) = \max\{g(x_0^*, 1), g(0, 0)\} = g(x_0^*, 1)$.

(iii) 若 $A^{1-\beta}B^\beta \leq 1$, $B \geq 1$, 则有 (ii) 类似的情形, 此时有 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(1, y_0^*)$.

(iv) 若 $A \leq 1$, $B \leq 1$, 则 $x_0^* \geq 1$, $y_0^* \geq 1$, 且有 $\max_{I \times I} g(x, y) = \max\{g(0, 0), g(1, 1)\} = g(1, 1)$.

综合上述 4 种情形, 可以找出 $f(a, b, c) = a^N b^{kl} c^{mn}$ 在约束条件 (3.1) 下的极大值点 (a_0, b_0, c_0) .

(i) 假定 $A^{1-\beta}B^\beta > 1$, $A^\alpha B^{1-\alpha} > 1$. 由于 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(x_0, y_0) = 1$, 由 (3.2) 式, 有

$$a = \left(\frac{1 - bk - cm}{1 - \alpha - \beta} \right)^{1-\alpha-\beta} \left(\frac{bk}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{cm}{\beta} \right)^\beta. \quad (3.8)$$

由于条件 $A^{1-\beta}B^\beta > 1$ 且 $A^\alpha B^{1-\alpha} > 1$ 等价于

$$\left(\frac{bk}{\alpha} \right)^{1-\beta} \left(\frac{cm}{\beta} \right)^\beta \geq a, \quad \left(\frac{bk}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{cm}{\beta} \right)^{1-\alpha} \geq a, \quad (3.9)$$

将 (3.8) 式代入 (3.9) 式, 有

$$\frac{bk}{\alpha} > \frac{1 - bk - cm}{1 - \alpha - \beta}, \quad \frac{cm}{\beta} > \frac{1 - bk - cm}{1 - \alpha - \beta}. \quad (3.10)$$

由 (3.8) 式, 3 个变量的 $f(a, b, c)$ 降为两个变量的函数, 即

$$f(a, b, c) = f_1(b, c) = \frac{(bk)^{\alpha N + kl} (cm)^{\beta N + mn} (1 - bk - cm)^{(1-\alpha-\beta)N}}{(1 - \alpha - \beta)^{(1-\alpha-\beta)N} \alpha^{\alpha N} \beta^{\beta N} k^{kl} m^{mn}}.$$

记 $\zeta = bk, \eta = cm$, 把问题简化为确定

$$h_1(\zeta, \eta) = \zeta^{\alpha N + kl} \eta^{\beta N + mn} (1 - \zeta - \eta)^{(1 - \alpha - \beta)N}$$

的极大值, 以求 f_1 的极大值.

把 (ζ, η) 限制

$$D_1(\alpha, \beta) := \left\{ (\zeta, \eta) : \eta > \frac{\beta}{1 - \alpha}(1 - \zeta), \quad \eta > \frac{1 - \beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{1 - \beta} - \zeta \right), \quad \eta < 1 - \zeta \right\}.$$

事实上, 域 $D_1(\alpha, \beta)$ 可以由重写 (3.10) 式在 ζ 和 η 的形式下得到. 由于 h_1 的极值点

$$(\zeta_0, \eta_0) = \left(\frac{\alpha N + kl}{N + kl + mn}, \frac{\beta N + mn}{N + kl + mn} \right) \quad (3.11)$$

在 $D_1(\alpha, \beta)$ 内, h_1 在 (ζ_0, η_0) 取到最大值.

为简化 f 的最大值, 我们定义下面的函数:

定义 3.1 任意 $\sigma, \tau > 0$, 定义

$$T(\sigma, \tau) = \left(\frac{\sigma N + \tau}{\sigma(N + kl + mn)} \right)^{\sigma N + \tau}.$$

由定义 3.1, 在条件 (3.10) 下, 直接计算可得

$$\max f(a, b, c) = f_1(\zeta_0, \eta_0) = \left(\frac{\alpha}{k} \right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m} \right)^{mn} T(\alpha, kl) T(\beta, mn) T(1, 0)^{1 - \alpha - \beta}.$$

(ii) 假设 $A^\alpha B^{1 - \alpha} \leq 1$ 和 $A \geq 1$. 由于 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(x_0^*, 1) = 1$, 由 (3.3) 式有

$$a = \left(\frac{bk}{\alpha} \right)^\alpha \frac{(1 - bk)^{1 - \alpha}}{(1 - \alpha)^{1 - \alpha}}. \quad (3.12)$$

由于条件 $A^\alpha B^{1 - \alpha} \leq 1, A \geq 1$ 等价于条件

$$\left(\frac{bk}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{cm}{\beta} \right)^{1 - \alpha} \leq a \leq \frac{bk}{\alpha}, \quad (3.13)$$

将 (3.12) 式代入 (3.13) 式, 得

$$\frac{cm}{\beta} \leq \frac{1 - bk}{1 - \alpha} \leq \frac{bk}{\alpha}. \quad (3.14)$$

由 (3.12) 式, 有

$$f(a, b, c) = f_2(b, c) = \frac{(bk)^{\alpha N + kl} (1 - bk)^{(1 - \alpha)N} (cm)^{mn}}{\alpha^{\alpha N} (1 - \alpha)^{(1 - \alpha)N} k^{kl} m^{mn}}.$$

下面寻找限制 (ζ, η) 在

$$D_2(\alpha, \beta) := \left\{ (\zeta, \eta) : \eta \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}(1 - \zeta), \zeta \geq \alpha \right\}$$

上函数 $h_2(\zeta, \eta) = \zeta^{\alpha N + kl} (1 - \zeta)^{(1 - \alpha)N} \eta^{mn}$ 的极大值.

由于 h_2 在 $D_2(\alpha, \beta)$ 内无极值点, h_2 在 $D_2(\alpha, \beta)$ 的边界上取到极大值, 注意到 $kl/(kl + mn) \geq \alpha$, 在 $D_2(\alpha, \beta)$ 边界的一部分上, 更准确地说, 在直线 $\eta = \beta(1 - \zeta)/(1 - \alpha)$ 上, h_2 有局部最大值, 在 (ζ_0, η_0) 点上,

$$(\zeta_0, \eta_0) = \left(\frac{\alpha N + kl}{N + kl + mn}, \frac{\beta(\alpha N + kl)}{(1 - \alpha)(N + kl + mn)} \right).$$

考虑 $D_2(\alpha, \beta)$ 的全部边界, 根据 $kl/(kl + mn)$ 的值域, 在条件 (3.14) 约束下有以下两种可能:

1. 若 $kl/(kl + mn) \leq \alpha$, 则有

$$\max f(a, b, c) = f_2\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{m}\right) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn};$$

2. 若 $kl/(kl+mn) \geq \alpha$, 则有

$$\max f(a, b, c) = f_2\left(\frac{\zeta_0}{k}, \frac{\eta_0}{m}\right) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl)T(1-\alpha, mn).$$

(iii) 若 $A^{1-\beta}B^\beta \leq 1$, $B \geq 1$, 则 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(1, y_0^*) = 1$. 与 (ii) 一样的讨论步骤, 有以下两种可能:

1. 若 $kl/(kl+mn) \leq 1-\beta$, 则有

$$\max f(a, b, c) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\beta, mn)T(1-\beta, kl).$$

2. 若 $kl/(kl+mn) \geq 1-\beta$, 则有

$$\max f(a, b, c) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn}.$$

(iv) 若 $A \leq 1$, $B \leq 1$ 则 $\max_{I \times I} g(x, y) = a = 1$. 情形 $A \leq 1$ 和 $B \leq 1$ 等价于 $bk \leq \alpha$, $cm \leq \beta$. 所以有

$$f(a, b, c) = b^{kl}c^{mn} \leq \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn}.$$

表 1 情形 I: $\alpha + \beta < 1$

	$\frac{kl}{kl+mn} \leq \alpha$	$\alpha \leq \frac{kl}{kl+mn} \leq 1-\beta$	$1-\beta \leq \frac{kl}{kl+mn}$
(i)		$(\frac{\alpha}{k})^{kl} (\frac{\beta}{m})^{mn} T(\alpha, kl)T(\beta, mn)T(1, 0)^{1-\alpha-\beta}$	
(ii)	$(\frac{\alpha}{k})^{kl} (\frac{\beta}{m})^{mn}$	$(\frac{\alpha}{k})^{kl} (\frac{\beta}{m})^{mn} T(\alpha, kl)T(1-\alpha, mn)$	
(iii)		$(\frac{\alpha}{k})^{kl} (\frac{\beta}{m})^{mn} T(\beta, mn)T(1-\beta, kl)$	$(\frac{\alpha}{k})^{kl} (\frac{\beta}{m})^{mn}$
(iv)		$(\frac{\alpha}{k})^{kl} (\frac{\beta}{m})^{mn}$	

综合以上结果 (i)–(iv) 发现, 表 1 中 f 的最大值依赖于 $kl/(kl+mn)$ 的值域. 现在将利用表 1, 证明 f 中的最大值依赖于 $kl/(kl+mn)$ 的值域, 为了做到这点, 引入以下两个有用的引理.

引理 3.1 设 a, b, c, d 是正数, 且 $a+c=b+d$. 则下式成立:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a \left(\frac{c}{d}\right)^c \geq 1. \quad (3.15)$$

证明 考虑函数 $h(x, y) := x^a y^b$, 其中 $x+y=a+c$ 且 $x, y > 0$. 因为 $h(x) := h(x, a+c-x) = x^a(a+c-x)^b$, 于是有 $h(x) \leq h(a) = a^a c^b$, 这就证明了不等式 (3.15).

引理 3.2 以下不等式成立:

(i) $T(\alpha, kl)T(1-\alpha, mn) \geq 1$, $0 < \alpha < 1$;

(ii) $T(\beta, mn)T(1-\beta, kl) \geq 1$, $0 < \beta < 1$;

更进一步, 假设 $\alpha + \beta < 1$, 则有

(iii) $T(\alpha, kl)T(1, 0)^{1-\alpha-\beta} \geq T(1-\beta, kl)$;

(iv) $T(\beta, mn)T(1, 0)^{1-\alpha-\beta} \geq T(1-\alpha, mn)$.

证明 应用 (3.15) 式直接推出 (i) 和 (ii). 当 $1-\alpha > \beta$ 时, 事实上函数 $((x+kl)/x)^{x+kl}$ 关于 x 递减, 故 (iii) 和 (iv) 成立.

应用引理 3.2 可以发现, 和 $kl/(kl+mn)$ 的取值无关, 总有

$$\max f(a, b, c) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl)T(\beta, mn)T(1, 0)^{1-\alpha-\beta},$$

此时由 (3.8) 和 (3.11) 式, f 在 (a_1, b_1, c_1) 取到最大值.

3.2 情形 II: $\alpha + \beta > 1$ 且 $0 < \alpha, \beta < 1$

此时, 由于 g 在 $I \times I$ 的内部无局部最大值, 只需考虑 g 在 $I \times I$ 的边界上取最大值即可. 注意 $g(x, 1)$ 和 $g(1, y)$ 分别在 $x_0^* = A^{-1/(1-\alpha)}$ 和 $y_0^* = B^{-1/(1-\beta)}$ 有局部最大值. 根据 (x_0^*, y_0^*) 的位置, 是由变量 A 和 B 而不是 a, b, c 表示的. 于是就有以下四种可能性:

- (i) 若 $\alpha A + \beta B \leq 1, A \leq 1, B \leq 1$, 有 $\max_{I \times I} g(x, y) = a$;
- (ii) 若 $BA^{\alpha/(1-\alpha)} \leq (1-\alpha)/\beta, A \geq 1$, 则 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(x_0^*, 1)$;
- (iii) 若 $AB^{\beta/(1-\beta)} \leq (1-\beta)/\alpha, B \geq 1$, 则 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(1, y_0^*)$;
- (iv) 其他情形, $\max_{I \times I} g(x, y) = bk + cm$.

下面对这 4 种可能分别进行讨论.

(i) 假定 $\alpha A + \beta B \leq 1$ 且 $A \leq 1, B \leq 1$, 则 $\max_{I \times I} g(x, y) = a$, 即 $a = 1$ 且 $f(a, b, c) = (bk)^{kl}(cm)^{mn}/(k^{kl}m^{mn})$. 设 $\zeta = bk$ 和 $\eta = cm$. 用 ζ 和 η 重写 $\alpha A + \beta B \leq 1$ 和 $A \leq 1, B \leq 1$, 把问题简化求解 $h_1(\zeta, \eta) := \zeta^{kl}\eta^{mn}$ 在 $D_1(\alpha, \beta) := \{(\zeta, \eta) : 0 \leq \zeta + \eta \leq 1, \zeta \leq \alpha, \eta \leq \beta\}$ 内的最大值. 由于 h_1 在 $D_1(\alpha, \beta)$ 的内部无临界点, 则只需在 $D_1(\alpha, \beta)$ 的边界上寻找 h_1 的最大值点, 考虑到 $D_1(\alpha, \beta)$ 的边界, 关于 $kl/(kl + mn)$ 的值域, 可以有下列 3 种可能:

- 1. 若 $kl/(kl + mn) < 1 - \beta$, 有

$$\max f(a, b, c) = f\left(1, \frac{1-\beta}{k}, \frac{\beta}{m}\right) = \frac{(1-\beta)^{kl}\beta^{mn}}{k^{kl}m^{mn}}.$$

- 2. 若 $1 - \beta \leq kl/(kl + mn) \leq \alpha$, 有

$$\max f(a, b, c) = \max f\left(1, \frac{l}{kl + mn}, \frac{n}{kl + mn}\right) = \left(\frac{l}{kl + mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl + mn}\right)^{mn}.$$

- 3. 若 $kl/(kl + mn) \geq \alpha$, 有

$$\max f(a, b, c) = \max f\left(1, \frac{\alpha}{k}, \frac{1-\alpha}{m}\right) = \frac{\alpha^{kl}(1-\alpha)^{mn}}{k^{kl}m^{mn}}.$$

- (ii) 假定 $BA^{\alpha/(1-\alpha)} \leq (1-\alpha)/\beta$ 且 $A \geq 1$. 因为 $g(x_0^*, 1) = 1$, 有

$$a = \left(\frac{bk}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-bk}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \quad (3.16)$$

由于 $BA^{\alpha/(1-\alpha)} \leq (1-\alpha)/\beta$ 且 $A \geq 1$ 等价于不等式

$$\left(\frac{bk}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{cm}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \leq a \leq \frac{bk}{\alpha}, \quad (3.17)$$

由 (3.16) 式, 可以确定在条件 (3.17) 约束下的最大值

$$f(a, b, c) = f_2(b, c) = \frac{(bk)^{\alpha N + kl}(1-bk)^{(1-\alpha)N}(cm)^{mn}}{\alpha^{\alpha N}(1-\alpha)^{(1-\alpha)N}k^{kl}m^{mn}}.$$

简单地说, 只需要找到 $h_2(\zeta, \eta) := \zeta^{\alpha N + kl}(1-\zeta)^{(1-\alpha)N}\eta^{mn}$ 在 $D_2(\alpha) := \{(\zeta, \eta) : \zeta + \eta \leq 1, \zeta \geq \alpha\}$ 上的最大值. 事实上, $D_2(\alpha)$ 可以通过把 (3.16) 式代入 (3.17) 式, 并设 $\zeta = bk, \eta = cm$ 得到. 由于 h_2 在 $D_2(\alpha)$ 内部无临界点, 故只需考虑在 $D_2(\alpha)$ 边界上 h_2 的最大值即可, 于是有

- 1. 若 $kl/(kl + mn) \leq \alpha$, 则

$$\max f(a, b, c) = f_2(\alpha, 1-\alpha) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn};$$

2. 若 $\alpha \leq kl/(kl+mn)$, 则

$$\begin{aligned}\max f(a, b, c) &= f_2\left(\frac{\alpha N + kl}{N + kl + mn}, \frac{(1-\alpha)N + mn}{N + kl + mn}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl)T(1-\alpha, mn).\end{aligned}$$

(iii) 若 $AB^{\beta/(1-\beta)} \leq (1-\beta)/\alpha$ 且 $B \geq 1$, 则 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(1, y_0^*) = 1$. 类似于 (ii), 有

1. 若 $kl/(kl+mn) \leq 1-\beta$, 有

$$\max f(a, b, c) = \left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn};$$

2. 若 $1-\beta \leq kl/(kl+mn)$, 有

$$\max f(a, b, c) = \left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\beta, mn)T(1-\beta, kl).$$

(iv) 最后处理剩下的情形, 这等价于以下条件:

$$\begin{aligned}BA^{\alpha/(1-\alpha)} &\geq \frac{1-\alpha}{\beta}, \quad A \geq 1; \quad AB^{\beta/(1-\beta)} \geq \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B \geq 1; \\ \alpha A + \beta B &\geq 1, \quad \frac{1-\beta}{\alpha} \leq A \leq 1.\end{aligned}$$

用 a, b, c 重写以上条件,

$$\begin{aligned}BA^{\alpha/(1-\alpha)} &\geq \frac{1-\alpha}{\beta} \iff a \leq \left(\frac{bk}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{cm}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}, \\ AB^{\beta/(1-\beta)} &\geq \frac{1-\beta}{\alpha} \iff a \leq \left(\frac{cm}{\beta}\right)^{\beta} \left(\frac{bk}{1-\beta}\right)^{1-\beta}, \\ \alpha A + \beta B &\geq 1 \iff bk + cm \geq a.\end{aligned} \quad (3.18)$$

此时, 由 $\max_{I \times I} g(x, y) = bk + cm = 1$, 令 $bk = \zeta$ 和 $cm = 1 - bk = 1 - \zeta$, 有

$$f(a, b, c) = h_4(\zeta, a) = \frac{a^N \zeta^{kl} (1-\zeta)^{mn}}{k^{kl} m^{mn}},$$

把 (ζ, a) 限制在 $D := D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 上, 其中

$$\begin{aligned}D_1 &= \left\{ (\zeta, a) : a \leq \frac{\zeta^{\alpha} (1-\zeta)^{1-\alpha}}{\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}}, a \leq \frac{\zeta}{\alpha} \right\}, \\ D_2 &= \left\{ (\zeta, a) : a \leq \frac{(1-\zeta)^{\beta} \zeta^{1-\beta}}{\beta^{\beta} (1-\beta)^{1-\beta}}, a \leq \frac{1-\zeta}{\beta} \right\}, \\ D_3 &= \left\{ (\zeta, a) : a \leq 1, 1-\beta \leq \frac{\zeta}{a} \leq \alpha \right\}.\end{aligned}$$

将 (3.18) 式用 ζ 和 a 改写, 并将 $A = bk/(a\alpha)$, $B = cm/(a\beta)$ 代入, 可以分别得到 D_1, D_2, D_3 . 由于 h_4 在 D 内部无临界点, h_4 的最大值只在 D 边界上取到. D 的边界由 4 条曲线构成. 比较 h_4 在曲线 (利用引理 3.2) 上的最大值, 有

1. 若 $kl/(kl+mn) \leq 1-\beta$, 则

$$\max_D f(a, b, c) = \left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\beta, mn)T(1-\beta, kl);$$

2. 若 $1-\beta \leq kl/(kl+mn) \leq \alpha$, 则

$$\max_D f(a, b, c) = \left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn};$$

3. 若 $\alpha \leq kl/(kl+mn)$, 则

$$\max_D f(a, b, c) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(1-\alpha, mn).$$

现在总结 (i)–(iv) 的结果, 就可以把 f 的极大值和 $kl/(kl+mn)$ 的值域的关系整理得到表 2.

表 2 情形 II: $\alpha + \beta > 1$ 且 $0 < \alpha, \beta < 1$

	$\frac{kl}{kl+mn} \leq 1-\beta$	$1-\beta \leq \frac{kl}{kl+mn} \leq \alpha$	$\frac{kl}{kl+mn} \geq \alpha$
(i)	$\left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn}$	$\left(\frac{l}{kl+mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl+mn}\right)^{mn}$	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn}$
(ii)	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn}$	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn}$	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(1-\alpha, mn)$
(iii)	$\left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\beta, mn) T(1-\beta, kl)$	$\left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn}$	$\left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn}$
(iv)	$\left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn}$	$\left(\frac{l}{kl+mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl+mn}\right)^{mn}$	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn}$

当 $kl/(kl+mn) \leq 1-\beta$ 时, 由表 2 可见, 情形 (i) 或 (iv) 中的 f 的极大值不小于情形 (ii), 情形 (iii) 中 f 的极大值不小于情形 (i). 理由如下: 首先注意引理 3.2 的 (ii), 其次由 (3.15) 式, 若 $kl/(kl+mn) \leq 1-\beta$, 则有

$$\frac{((1-\beta)/k)^{kl} (\beta/m)^{mn}}{(\alpha/k)^{kl} ((1-\alpha)/m)^{mn}} = \left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{kl} \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^{mn} \geq \left\{ \left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^{\alpha} \right\}^{kl+mn} \geq 1.$$

当 $1-\beta \leq kl/(kl+mn) \leq \alpha$ 时, 由表 2 可见, f 在情形 (i) 或 (iv) 的极大值不小于在情形 (ii) 或 (iii). 事实上由 (3.15) 式可见

$$\frac{(l/(kl+mn))^{kl} (n/(kl+mn))^{mn}}{(\alpha/k)^{kl} ((1-\alpha)/m)^{mn}} = \left(\frac{kl}{\alpha(kl+mn)}\right)^{kl} \left(\frac{mn}{(1-\alpha)(kl+mn)}\right)^{mn} \geq 1.$$

当 $\alpha \leq kl/(kl+mn)$ 时, 由表 2, f 在情形 (ii) 的极大值是 4 种情形中最大的, 因此 f 的最大值和最大值点 (a, b, c) 依赖于 $kl/(kl+mn)$ 的值域: (i)–(iv)

1. 若 $kl/(kl+mn) \leq 1-\beta$, 则有

$$\max f(a, b, c) = f(a_3, b_3, c_3) = \left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\beta, mn) T(1-\beta, kl).$$

2. 若 $1-\beta \leq kl/(kl+mn) \leq \alpha$, 则有

$$\max f(a, b, c) = f(a_4, b_4, c_4) = \left(\frac{l}{kl+mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl+mn}\right)^{mn}.$$

3. 若 $\alpha \leq kl/(kl+mn)$, 则有

$$\max f(a, b, c) = f(a_2, b_2, c_2) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(1-\alpha, mn).$$

3.3 情形 III: $0 < \alpha < 1$ 且 $\beta \geq 1$

因为 g 在 $I \times I$ 的内部无局部最大值, 所以只要考虑 g 在 $I \times I$ 的边界上的极大值就够了. 注意 $g(x, 1)$ 在 $x_0^* = A^{-1/(1-\alpha)}$ 有局部极大值, $g(1, y)$ 在 $y_0^* = B^{-1/(1-\beta)}$ 有局部极大值. 若 $\beta = 1$, 则 $g(1, y)$ 无局部极小值. 但这是无关的, 因为要找的是 g 的最大值. 根据 (x_0^*, y_0^*) 的取值, 只是用变量 A 和 B 而不用 a, b, c , 那么 g 的最大值只有 3 种可能

$$\max_{I \times I} g(x, y) = \begin{cases} a, & \text{若 } \alpha A + \beta B \leq 1, A \leq 1; \\ g(x_0^*, 1), & \text{若 } BA^{\alpha/(1-\alpha)} \leq (1-\alpha)/\beta, A \geq 1; \\ bk + cm, & \text{其他.} \end{cases}$$

(i) 假定 $\alpha A + \beta B \leq 1$ 且 $A \leq 1$. 由于此等价于

$$bk + cm \leq 1, \quad bk \leq \alpha, \quad (3.19)$$

且 $\max_{I \times I} f(x, y) = a = 1$, 所以要找到在条件 (3.19) 限制下, $f(a, b, c) = f(1, b, c) = b^{kl}c^{mn}$ 的最大值. 如前面假设 $\zeta = bk, \eta = cm$, 则此问题就化为寻找 $h_1(\zeta, \eta) = \zeta^{kl}\eta^{mn}$ 的极大值, 其中 h_1 的定义域为

$$D_1 = \{(\zeta, \eta) : \zeta, \eta > 0, \zeta + \eta \leq 1, \zeta \leq \alpha\}.$$

因为 h_1 在 D_1 的内部无临界点, 故 h_1 在 D_1 的边界上有最大值. 考虑 D_1 的边界, 即 $\zeta + \eta = 1$ 和 $\zeta \leq \alpha$, 可见当 $kl/(kl + mn) \leq \alpha$ 时, h_1 在点 $(kl/(kl + mn), mn/(kl + mn))$ 取到最大值. 当 $kl/(kl + mn) \geq \alpha$ 时, 在 $(\alpha, 1 - \alpha)$ 处取到最大值, 从而有两种可能

1. 若 $kl/(kl + mn) \leq \alpha$, 有

$$\max f(a, b, c) = f\left(1, \frac{l}{kl + mn}, \frac{n}{kl + mn}\right) = \left(\frac{l}{kl + mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl + mn}\right)^{mn};$$

2. 若 $kl/(kl + mn) \geq \alpha$, 有

$$\max f(a, b, c) = f(1, \alpha, 1 - \alpha) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1 - \alpha}{m}\right)^{mn}.$$

(ii) 假定 $BA^{\alpha/(1-\alpha)} \leq (1 - \alpha)/\beta$ 且 $A \geq 1$. 因为 $\max_{I \times I} g(x, y) = g(x_0^*, 1) = 1$ 等价于

$$a = \left(\frac{bk}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{1 - bk}{1 - \alpha}\right)^{1-\alpha}, \quad (3.20)$$

有

$$f(a, b, c) = f_2(b, c) = \frac{(bk)^{\alpha N + kl}(1 - bk)^{(1-\alpha)N}(cm)^{mn}}{\alpha^{\alpha N}(1 - \alpha)^{(1-\alpha)N}k^{kl}m^{mn}}.$$

由 (3.20) 式可见, $BA^{\alpha/(1-\alpha)} \leq (1 - \alpha)/\beta$ 且 $A \geq 1$ 等价于

$$bk + cm \leq 1, \quad bk \geq \alpha. \quad (3.21)$$

为了求得 f 在约束 (3.21) 下的最大值, 只需要考虑 $h_2(\zeta, \eta) = \zeta^{\alpha N + kl}(1 - \zeta)^{(1-\alpha)N}\eta^{mn}$ 在 $D_2 = \{(\zeta, \eta) : \zeta, \eta \geq 0, \zeta + \eta \leq 1, \zeta \geq \alpha\}$ 情形就够了. 因为 h_2 在 D_2 的内部无局部极大值, 故 h_2 在 D_2 的边界上有最大值, 即在线段 $\zeta + \eta = 1$ ($\zeta \geq \alpha$) 上. 事实上, $h_2(\zeta, 1 - \zeta) = \zeta^{\alpha N + kl}(1 - \zeta)^{(1-\alpha)N + mn}$ 在 $\zeta_0 = (\alpha N + kl)/(N + kl + mn)$ 上有局部极大值, 从而有

1. 若 $kl/(kl + mn) \leq \alpha$, 则 h_2 在 $(\zeta, \eta) = (\alpha, 1 - \alpha)$ 处取得最大值, 或

$$\max f(a, b, c) = f_2(\alpha, 1 - \alpha) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1 - \alpha}{m}\right)^{mn};$$

2. 若 $kl/(kl + mn) \geq \alpha$, 则 h_2 在 $(\zeta_0, 1 - \zeta_0)$ 处取得最大值, 或

$$\max f(a, b, c) = f_2(\zeta_0, 1 - \zeta_0) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1 - \alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl)T(1 - \alpha, mn).$$

(iii) 余下的情形, 可以假定

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B &\geq 1, \quad A \leq 1; \\ BA^{\alpha/(1-\alpha)} &\geq \frac{1 - \alpha}{\beta}, \quad A \geq 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

在条件 (3.22) 下, $\max_{I \times I} g(x, y) = bk + cm = 1$. 如前所设 $\zeta = bk, \eta = cm$, 则由于条件 (3.22) 又可写成

$$a \leq 1, \quad a \geq \frac{\zeta}{\alpha}; \quad a \leq \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{1 - \zeta}{1 - \alpha}\right)^{1-\alpha}, \quad a \leq \frac{\zeta}{\alpha}. \quad (3.23)$$

设

$$h_3(\zeta, a) = f\left(a, \frac{\zeta}{k}, \frac{1-\zeta}{m}\right) = \frac{a^N \zeta^{kl} (1-\zeta)^{mn}}{k^{kl} m^{mn}},$$

要找出 h_3 在条件 (3.23) 下的最大值. 注意到由条件 (3.23) 定义的域的内部无临界点, 因此只要找到 h_3 在两条曲线 $\Gamma_1 = \{(\zeta, 1) : 0 \leq \zeta \leq \alpha\}$ 和 $\Gamma_2 = \{(\zeta, 1) : a = (\zeta/\alpha)^\alpha ((1-\zeta)/(1-\alpha))^{1-\alpha}\}$ 上的最大值就够了, 因为 h_3 在 Γ_2 的点 $\zeta_0 = (\alpha N + kl)/(N + kl + mn)$ 上有局部最大值, 从而有:

1. 若 $kl/(kl + mn) \leq \alpha$, 则

$$\max f(a, b, c) = h_3(1, kl/(kl + mn)) = \left(\frac{l}{kl + mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl + mn}\right)^{mn};$$

2. 若 $kl/(kl + mn) \geq \alpha$, 则

$$\max f(a, b, c) = h_3(\zeta_0, a_0) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(1-\alpha, mn),$$

其中 $(\zeta_0, a_0) \in \Gamma_2$.

表 3 情形 III: $0 < \alpha < 1$ 且 $\beta > 1$

	$\frac{kl}{kl+mn} \leq \alpha$	$\frac{kl}{kl+mn} \geq \alpha$
(i)	$\left(\frac{l}{kl+mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl+mn}\right)^{mn}$	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn}$
(ii)	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn}$	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(1-\alpha, mn)$
(iii)	$\left(\frac{l}{kl+mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl+mn}\right)^{mn}$	$\left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(1-\alpha, mn)$

现在总结 (i)–(iii) 的结果, 有 f 的最大值和 $kl/(kl + mn)$ 值域关系如表 3. 由引理 3.2 和表 3, 可见 f 的最大值和最大值点 (a, b, c) 如下所示:

1. 若 $kl/(kl + mn) \leq \alpha$, 则

$$\max f(a, b, c) = f\left(1, \frac{l}{kl + mn}, \frac{n}{kl + mn}\right) = \left(\frac{l}{kl + mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl + mn}\right)^{mn}.$$

2. 若 $kl/(kl + mn) \geq \alpha$, 则

$$\max f(a, b, c) = f(a_2, b_2, c_2) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{1-\alpha}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(1-\alpha, mn).$$

3.4 情形 IV: $0 < \beta < 1$ 且 $\alpha \geq 1$

因为此情形同情形 III 完全类似, 故略去细节, 只给出结果. f 的最大值和最大值点 (a, b, c) 如下所示:

1. 若 $kl/(kl + mn) \leq 1 - \beta$, 则

$$\max f(a, b, c) = f(a_3, b_3, c_3) = \left(\frac{1-\beta}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(1-\beta, kl) T(\beta, mn).$$

2. 若 $kl/(kl + mn) \geq 1 - \beta$, 则

$$\max f(a, b, c) = f\left(1, \frac{l}{kl + mn}, \frac{n}{kl + mn}\right) = \left(\frac{l}{kl + mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl + mn}\right)^{mn}.$$

3.5 情形 V: $\alpha, \beta > 1$

因为 $g(x, 1)$ 和 $g(1, y)$ 在 $I = \{0 \leq t \leq 1\}$ 的内部无局部极大值, 故 g 的最大值可分类如下:

$$\max_{I \times I} g(x, y) = \begin{cases} a, & \text{若 } \alpha A + \beta B \leq 1; \\ bk + cm, & \text{其他.} \end{cases}$$

(i) 假定 $\alpha A + \beta B \leq 1$. 因为 $\alpha A + \beta B \leq 1$ 等价于 $bk + cm \leq 1$ 和 $\max_{I \times I} g(x, y) = a = 1$, 设 $\zeta = bk$, $\eta = cm$, 要找到 $h_1(\zeta, \eta) := \zeta^{kl} \eta^{mn}$ 在 $D_1 = \{(\zeta, \eta) : \zeta + \eta \leq 1\}$ 中的最大值 (注意: $f(a, b, c) = f(1, b, c) = b^{kl} c^{mn}$). 因为 h_1 在 D_1 的内部无临界点, 只要找到 $\tilde{h}(\zeta) := h_1(\zeta, 1 - \zeta) = \zeta^{kl} (1 - \zeta)^{mn}$ ($0 \leq \zeta \leq 1$) 的局部最大值即可.

注意 $\tilde{h}$ 在 $\zeta_0 = kl/(kl + mn)$ 处有局部极大值, 从而有

$$\max f(a, b, c) = f\left(1, \frac{l}{kl + mn}, \frac{n}{kl + mn}\right) = \left(\frac{l}{kl + mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl + mn}\right)^{mn}.$$

(ii) 假定 $\alpha A + \beta B \geq 1$. 因为 $\max_{I \times I} g(x, y) = bk + cm = 1$, $\alpha A + \beta B \geq 1$ 等价于 $a \leq 1$, 因此, 要求得 $bk + cm = 1$ 时 $f(a, b, c)$ 的最大值

$$f(1, b, c) = b^{kl} c^{mn} = \frac{(bk)^{kl} (cm)^{mn}}{k^{kl} m^{mn}},$$

这同 (i) 是完全一样的. 从而有

$$\max f(a, b, c) = f\left(1, \frac{l}{kl + mn}, \frac{n}{kl + mn}\right) = \left(\frac{l}{kl + mn}\right)^{kl} \left(\frac{n}{kl + mn}\right)^{mn}.$$

3.6 情形 VI: $\alpha + \beta = 1$

此时 g 在 $I \times I$ 中的临界点不是孤立的. 回忆我们有 $A = bk/(a\alpha)$ 和 $B = cm/(a\beta)$, 由直接计算得出

$$A^\alpha B^\beta = 1 \quad (3.24)$$

且 g 的临界点集是直线 $y = Ax/B$, 可见

$$\max_{I \times I} g(x, y) = bk + cm = 1. \quad (3.25)$$

由 (3.24) 式, 有

$$f(a, b, c) = \frac{(bk)^{\alpha N + kl} (cm)^{\beta N + mn}}{\alpha^{\alpha N} \beta^{\beta N} k^{kl} m^{mn}}.$$

令 $\zeta = bk$, $\eta = cm$. 把 (3.25) 代入上面的方程, 就得到一个单变量函数

$$h_6(\zeta) = \frac{\zeta^{\alpha N + kl} (1 - \zeta)^{\beta N + mn}}{\alpha^{\alpha N} \beta^{\beta N} k^{kl} m^{mn}}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

因为 h_6 在 $\zeta_0 = (\alpha N + kl)/(N + kl + mn)$ 处达到最大值, 故

$$\max f(a, b, c) = f(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{kl} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{mn} T(\alpha, kl) T(\beta, mn).$$

4 对 Carathéodory 极值问题的一个应用

本节用第 3 节中构造出的 W 的极小外切 Hermite 椭球得到了一个极值映射 $f \in \text{Hol}(W, \mathbf{B})$, 使得

$$|\det df(0)| = \sup\{|\det dg(0)| : g \in \text{Hol}(W, \mathbf{B})\},$$

其中 $\text{Hol}(W, \mathbf{B})$ 是从 W 到单位球 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N+kl+mn}$ 的将原点映为原点的全纯映射所成之集合. 事实上, 总可把极值映射取为一个复线性映射且使单位球在这个映射下的原像是 W 的极小外切的 Hermite 椭球. 我们简单解释一下为何取极值映射为一个复线性映射, 以及怎样找到这样的映射, 详情请参阅文献 [2].

首先注意到 W 是平衡的 (即: 只要 $z \in W, t \in \mathbb{C}, |t| \leq 1$, 有 $tz \in W$) 且是全纯的. 其次定义 W 的 Kobayashi 标线为

$$I_0(W) = \{ \xi \in T_0 W : K(0, \xi) < 1 \},$$

其中 K 是 W 上的 Kobayashi-Royden 无穷小度量. 因为 W 是平衡全纯域, 而且 Kobayashi-Royden 无穷小度量在全纯映射下缩小, $I_0(W) = W^{[2]}$, $dg(0)(W) \subset \mathbf{B}$. 若 f 为极值映射, 则

$$|\det df(0)| = \sup \{ |\det L(0)| : L \text{ 复线性映射}, L(W) \subset \mathbf{B} \}.$$

由引理 2.1 的证明可知, 如果选取一复线性映射 $T : W \rightarrow \mathbf{B}$, 使得 $T^{-1}(\mathbf{B})$ 为 W 的极小外切 Hermite 椭球, 则 T 是极值映射且 $\det T$ 就是一个极值. 由定理 1.1, 可这样选取 T , 例如若 $\alpha + \beta \leq 1$, 则极值映射为

$$T(w, Y, Z) = (a_1^{1/2} w, b_1^{1/2} Y, c_1^{1/2} Z),$$

极值为 $\det T = a_1^{N/2} b_1^{kl/2} c_1^{mn/2}$.

参考文献

- 1 John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*, New York: Interscience Publishers, Inc., 1948, 187–204
- 2 Ma D W. Carathéodory extremal maps of ellipsoids. *J Math Soc Japan*, **49**(4): 723–739 (1997)
- 3 Carathéodory C. Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden. *Math Z*, **34**(1): 758–792 (1932)
- 4 Kubota Y. An extremal problem on the classical Cartan domains. *Kodai Math J*, **4**(2): 278–287 (1981)
- 5 Kubota Y. An extremal problem on the classical Cartan domains. II. *Kodai Math J*, **5**(2): 218–224 (1982)
- 6 Kubota Y. An extremal problem on the classical Cartan domains. III. *Kodai Math J*, **5**(3): 402–407 (1982)
- 7 Kubota Y. An extremal problem on bounded symmetric domains. *Bull London Math Soc*, **15**(2): 126–130 (1983)
- 8 Travaglini G. An analogue of the Schwarz lemma for bounded symmetric domains. *Proc Amer Math Soc*, **88**(1): 85–88 (1983)
- 9 Su J B, Yin W P. Extremal problems on the Hua domain of the first type. *Sci China Ser A-Math*, **48**(suppl): 343–354 (2005)
- 10 Su J B, Yin W P. Extremal problems on the generalized Hua domain of the first type. *Progr Natur Sci (English Ed)*, **16**(4): 352–358 (2006)
- 11 Yin W P, Su J B. Extremal problems on super-Cartan domain of the first type. *Complex Var Theory Appl*, **48**(5): 441–452 (2003)
- 12 Wang A, Zhao X, Liu Z Y. Extremal problems on the Cartan-Hartogs domains. *J Korean Math Soc*, **44**(6): 1291–1312 (2007)
- 13 Hua L K. Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains. In: *Translations of Mathematical Monographs*, Vol 6. Providence, RI: American Mathematical Society, 1979