无穷远点处与 Schrödinger 算子相关极细集性质的应用

乔蕾

河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046

E-mail: qiaocqu@163.com

收稿日期: 2017-02-04; 接受日期: 2017-12-11; 网络出版日期: 2018-06-04

国家自然科学基金 (批准号: 11301140 和 U1304102)、2017 年度河南省高等学校青年骨干教师培养计划 (批准号: 2017GGJS085) 和 2017 年度河南财经政法大学青年拔尖人才资助项目

摘要 设 u 是定义在锥中的超函数. 作为无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集判定准则和几何性质的应用, 本文证明锥中的例外集 $\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > V(r)\varphi(\Theta)\}$ 和 $\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > V(r)\}$ 分别是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集和稀薄集当且仅当与 u 相关的测度满足特定的积分条件.

关键词 超函数 Schrödinger 算子 极细集 Green-Sch 位势

MSC (2010) 主题分类 35J05, 35J10

1 引言

设 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_+$ 分别表示所有实数和正实数组成的集合, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维 Euclid 空间, 其中 $n \geq 2$. 点 $P = (X, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. $|P - Q|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中两点 P 和 Q 的 Euclid 距离. 特别地, $|P - O|$ 表示点 P 到 $\mathbb{R}^n$ 中原点 O 的距离, 记为 $|P|$. 如果集合 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则 ∂A 和 $\bar{A}$ 分别表示集合 A 的边界和闭包, χ_A 表示集合 A 的特征函数. 设 $P \in \mathbb{R}^n$ 且 $l \in \mathbb{R}_+$, 则 $B(P, l)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 P 为球心、 l 为半径的开球. 设 h_1 和 h_2 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的两个正函数, 若存在一个正常数 c , 使得 $h_1 \leq ch_2$, 则记为 $h_1 \lesssim h_2$. 若 $h_1 \lesssim h_2$ 且 $h_2 \lesssim h_1$, 则 $h_1 \approx h_2$. 在 $\mathbb{R}^n$ 中引入球面坐标系 (r, Θ) , 其中 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$, 它与 Descartes 坐标 (X, x_n) 相对应, 其中 $x_n = r \cos \theta_1$.

设区域 $D \subset \mathbb{R}^n$, 记 $\mathcal{A}_a$ 是 D 中非负径向位势 $a(P)$ ($P = (r, \Theta) \in D$) 的全体组成的集合, 即对于任意的 $P = (r, \Theta) \in D$, 有 $0 \leq a(P) = a(r)$, 使得 $a \in L^b_{\text{loc}}(D)$, 当 $n \geq 4$ 时, $b > n/2$; 当 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时, $b = 2$.

若记 Δ_n 是 Laplace 算子且 I 是恒等算子, 则稳态的 Schrödinger 算子可定义为

$$\text{Sch}_a = -\Delta_n + a(P)I,$$

英文引用格式: Qiao L. Applications of properties of minimally thin sets at infinity with respect to the Schrödinger operator (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 893–908, doi: 10.1360/N012017-00023

其中 $a \in \mathcal{A}_a$ (参见文献 [1, 第 323 页]). 该算子可以按通常的方法从 $C_0^\infty(D)$ 空间延拓到 $L^2(D)$ 空间上的自伴算子 (参见文献 [1, 第 326 页]), 记其为 Sch_a 算子. 后者在 D 中的 Green 函数, 因为与 Sch_a 算子相关, 故称其为 Green-Sch 函数, 记为 $G_D^a(\cdot, \cdot)$. 由文献 [1, 第 345 页] 知, $G_D^a(\cdot, \cdot)$ 在 D 上为正且内法向导数 $\partial G_D^a(P, Q)/\partial n_Q$ 为非负, 其中 $\partial/\partial n_Q$ 是在 Q 点沿着指向 D 的内法线的方向导数.

如果定义在 D 中的函数 u 同时满足下面 3 个条件, 则称 u 是 D 中与 Sch_a 算子相关的次调和函数, 简称为次函数 (参见文献 [1, 定义 11.2.1]):

- (i) $u \not\equiv -\infty$ 是区域 D 中的上半连续函数;
- (ii) $u \in [-\infty, \infty)$;
- (iii) 对于任意的点 $P \in D$, 有

$$u(P) \leq \int_{\partial B(P, l)} \frac{\partial G_{B(P, l)}^a(P, Q)}{\partial n_Q} u(Q) d\sigma_Q,$$

其中 $0 < l < l(P)$, $G_{B(P, l)}^a(P, Q)$ 是定义在球 $B(P, l)$ 中的 Green-Sch 函数且 $d\sigma_Q$ 是在球面 $\partial B(P, l)$ 的曲面测度. 关于次函数更多的性质, 读者可参见文献 [1, 定理 11.2.2]. 若 $-u$ 是次函数, 则称 u 是超函数. 若 u 既是次函数又是超函数, 则称 u 是与 Sch_a 相关的调和函数, 简称为广义调和函数. 将 D 中所有超函数和广义调和函数的全体组成的集合分别记为 $\text{SUP}(D)$ 和 $H(D)$.

将 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球记为 $\mathbf{S}^{n-1}$. 为了方便起见, 将 $(1, \Theta) \in \mathbf{S}^{n-1}$ 简记为 Θ , 用 w_n 表示 $\mathbf{S}^{n-1}$ 的曲面面积 $2\pi^{n/2}\{\Gamma(n/2)\}^{-1}$. 将 $\{\Theta; (1, \Theta) \in \Omega \subset \mathbf{S}^{n-1}\}$ 记为 Ω . 若 $\Xi \subset \mathbb{R}_+$ 且 $\Omega \subset \mathbf{S}^{n-1}$, 则将 $\{(r, \Theta) \in \mathbb{R}^n; r \in \Xi, (1, \Theta) \in \Omega\}$ 记为 $\Xi \times \Omega$. 锥 $C_n(\Omega) = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, 其中 $\Omega \subset \mathbf{S}^{n-1}$. 设 $I \subset \mathbb{R}$, 将 $I \times \Omega$ 记为 $C_n(\Omega; I)$, 称为截断锥. 将 $I \times \partial\Omega$ 记为 $S_n(\Omega; I)$. 当 $I = \mathbb{R}$ 时, 将 $S_n(\Omega; \mathbb{R})$ 记为 $S_n(\Omega)$. 设 $l > 0$, 将 $C_n(\Omega) \cap \partial B(O, l)$ 记为 $S_n(\Omega; l)$.

定义 1.1 设集合 $A \subset C_n(\Omega)$. 若存在一列球 $\{B_i(P_i, l_i)\}$, 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i(P_i, l_i)$, 则称集合 A 有一个覆盖 $\{l_i, R_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$), 其中点 P_i 为球 B_i 的球心且点 $P_i \in C_n(\Omega)$, l_i 是球 B_i 的半径, R_i 是球 B_i 的球心 P_i 到原点 O 的距离.

此后, 文中若无特殊的说明, 令 $D = C_n(\Omega)$, ϵ 是指充分小的正数, $c(n)$ 出现在不同的地方代表不同的与维数 n 有关的常数且它与问题中的变量无关. $G_{C_n(\Omega)}^a(P, Q)$ 、 $\text{SUP}(C_n(\Omega))$ 和 $H(C_n(\Omega))$ 分别简记为 $G_\Omega^a(P, Q)$ 、 $\text{SUP}(\Omega)$ 和 $H(\Omega)$.

定义

$$\frac{1}{s_n} \frac{\partial G_\Omega^a(P, Q)}{\partial n_Q}$$

为锥中的 Poisson-Sch 核, 记为 $\text{PI}_\Omega^a(P, Q)$, 其中

$$s_n = \begin{cases} 2\pi, & n = 2, \\ (n-2)w_n, & n \geq 3. \end{cases}$$

设 μ 和 ν 分别是定义在 $C_n(\Omega)$ 和 $S_n(\Omega)$ 中的测度, 则锥中的 Green-Sch 位势和 Poisson-Sch 积分可以分别定义为

$$G_\Omega^a \mu(P) = \int_{C_n(\Omega)} G_\Omega^a(P, Q) d\mu(Q) \quad \text{和} \quad \text{PI}_\Omega^a \nu(P) = \int_{S_n(\Omega)} \text{PI}_\Omega^a(P, Q) d\nu(Q).$$

设 $\Omega \subset \mathbf{S}^{n-1}$ 有光滑的边界且 Λ_n 是 Laplace 算子 Δ_n 的球面部分. 考虑 Dirichlet 问题 (参见文献 [2, 第 41 页])

$$\begin{aligned}(\Lambda_n + \lambda)\varphi &= 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \varphi &= 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.}\end{aligned}$$

记其最小的特征值为 λ , 与之相对应正的特征函数记为 $\varphi(\Theta)$ 且 $\int_{\Omega} \varphi^2(\Theta) d\Omega = 1$, 其中 $d\Omega$ 是 Ω 中的曲面面积元素. 为方便起见, 假定如果 $n \geq 3$, 则 $\Omega \subset \mathbf{S}^{n-1}$ 是 $C^{2,\varsigma}$ -区域 ($0 < \varsigma < 1$), 它能被有穷个互不相交的闭超曲面所覆盖 (关于 $C^{2,\varsigma}$ -区域的定义, 读者可参见文献 [3, 第 88 和 89 页]).

若 $a \in \mathcal{A}_a$, 则常微分方程 (参见文献 [4])

$$-\Pi''(r) - \frac{n-1}{r}\Pi'(r) + \left(\frac{\lambda}{r^2} + a(r)\right)\Pi(r) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (1.1)$$

有一组正基础解系 $\{V, W\}$, 其中 $V(r)$ 和 $W(r)$ 分别是关于 r 的非减函数和单调减函数 (关于它们更详细的性质可参文献 [1, 附录 A]).

若 $a \in \mathcal{A}_a$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 a(r) = k \in [0, \infty)$$

且

$$r^{-1}|r^2 a(r) - k| \in L(1, \infty),$$

则将满足上述条件的位势 a 的全体组成的集合记为 $\mathcal{B}_a$. 若 $a \in \mathcal{B}_a$, 则次 (超) 函数连续 (参见文献 [5]). 若无特殊说明, 本文此后一直假定 $a \in \mathcal{B}_a$. 令

$$\iota_k^{\pm} = \frac{2 - n \pm \sqrt{(n-2)^2 + 4(k+\lambda)}}{2},$$

则当 $r \rightarrow \infty$ 时, 方程 (1.1) 的两个解有下列渐近行为 (参见文献 [1, 附录 C]):

$$V(r) \approx r^{\iota_k^+} \quad \text{和} \quad W(r) \approx r^{\iota_k^-}. \quad (1.2)$$

上述渐近行为在次函数的 Phragmén-Lindelöf 定理证明过程中有着很重要的应用, 参见文献 [6–9].

由文献 [10, 第 44 页] 知, 锥中 Martin-Sch 边界是集合 $S_n(\Omega) \cup \{\infty\}$, 它中的每个点都是极小的 Martin-Sch 边界点. 对于任意的 $P \in C_n(\Omega)$ 和 $Q \in S_n(\Omega) \cup \{\infty\}$, 定义 Martin-Sch 核为 $M_{\Omega}^a(P, Q)$. 若锥中的参照点 $P = (r, \Theta)$ 选择恰当, 则有

$$M_{\Omega}^a(P, \infty) = V(r)\varphi(\Theta) \quad \text{和} \quad M_{\Omega}^a(P, O) = cW(r)\varphi(\Theta),$$

其中 c 是一个正常数.

受到文献 [11, 12] 的启发, 文献 [1, 第 4 节] 和 [10] 介绍了 3 种与 Sch_a 算子相关的例外集: 细集、极细集和稀薄集, 这些定义在研究 Schrödinger 方程解^[13–17] 和弱解^[18–24] 边界性质的时候都起到了重要的作用.

定义 1.2 设 $E \subset C_n(\Omega)$, 点 $P \in C_n(\Omega)$. 若存在点 P 的邻域 A , 使得 $A \cap (E \setminus \{P\}) = \emptyset$, 则称集合 E 是锥中点 P 处的细集. 否则, 称 E 不是点 P 处的细集.

定义 1.3 设 $E \subset C_n(\Omega)$, $\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, Q)}^E$ 是 $M_\Omega^a(\cdot, Q)$ 关于集合 E 的正则约化函数. 如果存在点 $P \in C_n(\Omega)$, 使得

$$\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, Q)}^E(P) \neq M_\Omega^a(P, Q),$$

则称集合 E 是在点 $Q \in S_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ 处与 Sch_a 算子相关的极细集. 若 $Q = \infty$, 则称集合 E 是无穷远点处与 Sch_a 算子相关的极细集.

定义 1.4 设 $E \subset C_n(\Omega)$. 若存在 $u(P) \in \text{SUP}(\Omega)$, 使得

$$\inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{u(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = 0$$

且

$$E \subset \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) \geq V(r)\},$$

则称集合 E 是无穷远点处与 Sch_a 算子相关的稀薄集.

此后, 为了方便起见, 我们将无穷远点处与 Sch_a 算子相关的极细集 (稀薄集) 简称为无穷远点处的极细集 (稀薄集).

设 $E \subset C_n(\Omega)$. 若 E 有界, 则 $\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, \infty)}^E$ 在锥中有界且 $\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, \infty)}^E$ 最大的广义调和弱函数为零. 设

$$\mathfrak{I}_E = \{P \in C_n(\Omega); \text{集合 } E \text{ 不是点 } P \text{ 处的细集}\},$$

由文献 [10, 第 46 页] 知, 对于任意的 $P \in C_n(\Omega)$, 存在一个唯一的定义在锥中的正测度 λ_E^a 且其集中于集合 $\mathfrak{I}_E$ 上, 使得

$$\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, \infty)}^E(P) = G_\Omega^a \lambda_E^a(P).$$

我们将测度 λ_E^a 称为集合 E 的基本分布且其在锥中的总量 $\lambda_E^a(C_n(\Omega))$ 简记为 $\lambda_\Omega^a(E)$. 锥中的又一测度 η_E^a 可以定义为 $d\eta_E^a(P) = M_\Omega^a(P, \infty)d\lambda_E^a(P)$, 其中 $P \in C_n(\Omega)$ (参见文献 [18]).

设 $E \subset C_n(\Omega)$. 锥中关于集合 E 的 Green-Sch 能量 $\gamma_\Omega^a(E)$ 可定义为

$$\gamma_\Omega^a(E) = \int_{C_n(\Omega)} G_\Omega^a \lambda_E^a d\lambda_E^a.$$

定义

$$E_j = E \cap C_n(\Omega; [2^j, 2^{j+1})),$$

其中 $j = 1, 2, \dots$

无穷远点处极细集和稀薄集的判定准则在文献 [10] 和 [18, 定理 1] 中都有详细的讨论.

定理 1.1 下面的命题是等价的:

- (i) 集合 E 是无穷远点处的极细集;
- (ii) $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_\Omega^a(E_j) V^{-1}(2^j) W(2^j) < \infty$;
- (iii) $\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{E_j}^a(C_n(\Omega)) V^{-1}(2^j) W(2^j) < \infty$.

定理 1.2 集合 E 是无穷远点处的稀薄集当且仅当

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_\Omega^a(E_j) W(2^j) < \infty.$$

注 1.1 在定理 1.1 和 1.2 中, 作者选择的阶为 2. 事实上, 对于任意的 $a > 1$, 若定义

$$E_j = E \cap C_n(\Omega; [a^j, a^{j+1})),$$

则上述结论依旧成立.

关于无穷远点处极细集 (参见文献 [18, 定理 2]) 和稀薄集 (参见文献 [21, 定理 2.3]) 的几何性质, 分别也有如下结论.

定理 1.3 若集合 E 是无穷远点处的极细集, 则 E 有一个覆盖 $\{l_i, R_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{l_i}{R_i} \right)^2 V \left(\frac{R_i}{l_i} \right) W \left(\frac{R_i}{l_i} \right) < \infty. \quad (1.3)$$

定理 1.4 若集合 E 是无穷远点处的稀薄集, 则 E 有一个覆盖 $\{l_i, R_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{l_i}{R_i} \right) V \left(\frac{R_i}{l_i} \right) W \left(\frac{R_i}{l_i} \right) < \infty. \quad (1.4)$$

关于 Poisson-Sch 积分 $\text{PI}_{\Omega}^a \nu$ 和 Green-Sch 位势 $\text{G}_{\Omega}^a \mu$ 的边界性质, 作者在文献 [13, 定理 1 和 3] 中已证明了下列结论.

定理 1.5 若 Poisson-Sch 积分 $\text{PI}_{\Omega}^a \nu$ 和 Green-Sch 位势 $\text{G}_{\Omega}^a \mu$ 均收敛, 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty, P=(r, \Theta) \in C_n(\Omega) \setminus E} \frac{\text{PI}_{\Omega}^a \nu(P) + \text{G}_{\Omega}^a \mu(P)}{V(r) \varphi(\Theta)} = 0$$

且

$$\lim_{r \rightarrow \infty, P=(r, \Theta) \in C_n(\Omega) \setminus F} \frac{\text{PI}_{\Omega}^a \nu(P) + \text{G}_{\Omega}^a \mu(P)}{V(r)} = 0,$$

其中 E 是无穷远点处的极细集且 F 是无穷远点处的稀薄集.

同时, 文献 [13, 定理 4] 给出了锥中正超函数的积分表示.

定理 1.6 设 $0 < u(P) \in \text{SUP}(\Omega)$, 则 $u(P)$ 具有下列积分表示:

$$u(P) = cV(r)\varphi(\Theta) + \text{PI}_{\Omega}^a \nu(P) + \text{G}_{\Omega}^a \mu(P),$$

其中 c 是一个常数, μ 是唯一一个定义在 $C_n(\Omega)$ 上的测度且 ν 是唯一一个定义在 $S_n(\Omega)$ 上的测度.

为了后面讨论问题方便, 我们给出下面的定义.

定义 1.5 设 $u(P) \in \text{SUP}(\Omega)$ 且具有下列表达式:

$$u(P) = \text{PI}_{\Omega}^a \nu(P) + \text{G}_{\Omega}^a \mu(P), \quad (1.5)$$

其中 μ 和 ν 是与 u 相关的且分别定义在 $C_n(\Omega)$ 和 $S_n(\Omega)$ 上的测度. 若它们满足

$$\int_{S_n(\Omega)} \frac{1}{1+tW^{-1}(t)} d\nu(Q) + \int_{C_n(\Omega; (0,1))} V(t)\varphi(\Phi) d\mu(Q) + \int_{C_n(\Omega; (1,+\infty))} W(t)\varphi(\Phi) d\mu(Q) < \infty,$$

则我们将这样的 u 的全体组成的集合记为 $\mathcal{F}_{\Omega}$.

由定理 1.5 和 1.6, 易知下面的定理成立.

定理 1.7 若 $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$, 则

(i) 存在无穷远点处的极细集 E , 使得

$$\lim_{r \rightarrow \infty, P=(r, \Theta) \in C_n(\Omega) \setminus E} \frac{u(P)}{V(r)\varphi(\Theta)} = 0;$$

(ii) 存在无穷远点处的稀薄集 F , 使得

$$\lim_{r \rightarrow \infty, P=(r, \Theta) \in C_n(\Omega) \setminus F} \frac{u(P)}{V(r)} = 0.$$

很自然地要问定理 1.7 的逆命题是否成立? 即设 $u(P)$ 是定义在锥中的函数. 若定义在锥中的例外集

$$\mathfrak{E} = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > V(r)\varphi(\Theta)\}$$

和

$$\mathfrak{F} = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > V(r)\}$$

分别是无穷远点处的极细集和稀薄集, 试问 $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$? 本文将解决此问题.

注 1.2 上面问题的提出是受到了文献 [25] 的启发. 在文献 [25] 中, 作者考虑的对象是热方程的解, 用此“逆定理”作为其中的一个重要工具之一, 作者不仅证明了此解的 Abelian-Tauberian 定理而且得到了其渐近性质. 本文采用了与文献 [25] 中截然不同的方法证明了锥中定义的超函数也有类似的“逆定理”成立.

本文余下部分具体的结构如下: 第 2 节将给出本文的主要结论: 定理 2.1–2.3; 第 3 节将给出本文证明过程需要用到的两个引理; 第 4 节将给出定理 2.3 的证明过程; 第 5 节将给出定理 2.1 和 2.2 的证明过程; 第 6 节将通过举例来说明本文所得主要结论的限制条件是最弱的.

2 主要结论

本节将叙述本文的主要结论: 定理 2.1–2.3, 其中定理 2.3 是定理 2.1 和 2.2 的一个特殊情况. 我们后面的证明将从这个特殊情况开始.

定理 2.1 设 $u(P) \in \text{SUP}(\Omega)$ 且具有形如 (1.5) 的表达式. 若存在无穷远点处的极细集 E_0 , 使得 $\mu(C_n(\Omega) \setminus E_0) = 0$, 则集合 $\mathfrak{E}$ 是无穷远点处的极细集当且仅当 $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$.

相似的结论对于无穷远点处的稀薄集而言是完全不同的, 为了能够更好地解释其中的差别, 我们需要给出下列注.

注 2.1 集合 $C_n(\Omega; (0, 1))$ 是无穷远点处的极细集 (参见文献 [21]).

注 2.2 设 $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ 是开集且 $S_n(\Omega) \subset \mathfrak{D}$, 则 $\mathfrak{D} \cap C_n(\Omega)$ 不是无穷远点处的稀薄集 (参见文献 [18]).

定理 2.2 设 $u(P) \in \text{SUP}(\Omega)$ 且具有形如 (1.5) 的表达式. 如果存在无穷远点处的稀薄集 $E_0 \subset C_n(\Omega)$ 使得 $\mu(C_n(\Omega) \setminus E_0) = 0$ 和集合 $F_0 \subset S_n(\Omega)$ 使得 $\mu(S_n(\Omega) \setminus F_0) = 0$ 且

$$\int_{F_0} (1+t)^{-1} V(1+t) W(1+t) dQ < \infty, \quad (2.1)$$

则集合 $\mathfrak{F}$ 是无穷远点处的稀薄集当且仅当 $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$.

定理 2.1 和 2.2 的特殊情况如下:

定理 2.3 设 $u(P) \in \text{SUP}(\Omega)$ 且具有形如 (1.5) 的表达式. 若与之相关的测度 μ 和 ν 是点式群体之和, 则

(i) 集合 $\mathfrak{E}$ 是无穷远点处的极细集当且仅当 $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$;

(ii) 集合 $\mathfrak{F}$ 是无穷远点处的稀薄集当且仅当 $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$.

推论 2.1 (i) $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$ 当且仅当存在正常数 c , 使得集合

$$\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > cV(r)\varphi(\Theta)\} \quad (2.2)$$

是无穷远点处的极细集;

(ii) $u(P) \in \mathcal{F}_\Omega$ 当且仅当存在正常数 c , 使得集合

$$\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > cV(r)\} \quad (2.3)$$

是无穷远点处的稀薄集.

注 2.3 若存在正常数 c , 使得集合 (2.2) 是无穷远点处的极细集, 则对于任意的正常数 c , 集合 (2.2) 也是无穷远点处的极细集. 若存在正常数 c , 使得集合 (2.3) 是无穷远点处的稀薄集, 则对于任意的正常数 c , 集合 (2.3) 也是无穷远点处的稀薄集 (参见文献 [10, 第 45 页]).

注 2.4 由注 2.3 可知, 推论 2.1 中的“存在”可以用“任意”来替代.

3 引理

作为定理 1.3 和 1.4 的应用, 我们将在本节得到两个引理. 为此, 设

$$X_j = \{P = (r, \Theta) \in \mathbb{R}^n; 4^j \leq r < 4^{j+1}\},$$

其中 $j = 1, 2, \dots$

定义

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_{2j}, \quad \nu_1 = \nu|_X, \quad \mu_1 = \mu|_X.$$

令

$$u_1 = \text{PI}_\Omega^a \nu_1 + \text{G}_\Omega^a \mu_1.$$

引理 3.1 设集合 $\mathfrak{E}$ 是无穷远点处的极细集, 则存在 $c(n) > 1$, 使得对于充分大的 j , 有

$$\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u_1(P) > c(n)V(r)\varphi(\Theta)\} \cap \partial B(O, 2 \cdot 4^{2j+1}) = \emptyset.$$

证明 因为集合 $\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u_1(P) > V(r)\varphi(\Theta)\}$ 是无穷远点处的极细集, 所以, 由定理 1.3 可知, 它有一个覆盖 $\{l_i, R_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) 满足 (1.3).

故存在 N , 使得

$$\sum_{\{i; B_i \cap (\bigcup_{j \geq N} X_j) \neq \emptyset\}} \left(\frac{l_i}{R_i}\right)^2 V\left(\frac{R_i}{l_i}\right) W\left(\frac{R_i}{l_i}\right) < \epsilon. \quad (3.1)$$

令 $H_j = S_n(\Omega; 2 \cdot 4^{2j+1})$. 观察可知它有一个覆盖 $\{l_i, R_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$), 其中 $l_i \geq 4^{2j-2}$ ($i \geq 1$). 设 $H_j = H_j^1 \cup H_j^2$, 其中集合 H_j^1 在 $S_n(\Omega)$ 附近, 有一个覆盖 $\{l_i^1, R_i^1\}$ ($i = 1, 2, \dots$) 且对于任意 $i \geq 1$, 有 $l_i^1 = 4^{2j}$ 且 $P_i^1 \in S_n(\Omega) \cap \bar{H}_j$.

对于集合 H_j^1 , 设球 $B(P_B, l_B)$ 为其覆盖 $\{l_i^1, R_i^1\}$ 中的一个球, 其中 $P_B \in S_n(\Omega)$. 由 (3.1) 可知, 当 $j > N$ 时, $\{l_i^1, R_i^1\}$ 并不是球 $B(P_B, l_B)$ 的一个覆盖. 故存在 $P = (r, \Theta) \in B(P_B, l_B)$, 使得

$$u_1(P) \leq c(n)V(r)\varphi(\Theta). \quad (3.2)$$

故对于覆盖 $\{l_i^1, R_i^1\}$ 中任意的点 $P = (r, \Theta)$, 都有 (3.2) 成立.

对于集合 H_j^2 , 它有一个覆盖 $\{l_i^2, R_i^2\}$ ($i = 1, 2, \dots$), 其中球心 $P_i^2 \in H_j$ 且 $l_i^2 = 4^{2j-1}$. 与上一步的证明类似, 对于充分大的 j , 存在 $P = (r, \Theta) \in B_i^2(P_i^2, l_i^2)$ ($i \geq 1$), 使得 (3.2) 成立.

因为 $B_i^2(P_i^2, 2l_i^2) \subset X_{2j+1}$ 且 $u_1 \in H(B_i^2(P_i^2, 2l_i^2))$, 故由与 Sch_a 算子相关的 Harnack 不等式^[10] 知, 对于覆盖 $\{l_i^2, R_i^2\}$ 中任意的点 $P = (r, \Theta)$, 也有 (3.2) 成立.

综上所述, 对于任意的 $P = (r, \Theta) \in H_j$ 都有 (3.2) 成立. 引理 3.1 得证. $\square$

引理 3.2 设集合 $\mathfrak{F}$ 是无穷远点处的稀薄集, 则存在 $c(n) > 1$, 使得对于充分大的 j , 有

$$\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u_1(P) > c(n)V(r)\} \cap \partial B(O, 2 \cdot 4^{2j+1}) = \emptyset.$$

证明 因为集合 $\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u_1(P) > V(r)\}$ 是无穷远点处的稀薄集, 故由定理 1.4 知, 它有一个覆盖 $\{l_i, R_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) 满足 (1.4). 故对于此覆盖 (1.3) 也成立.

该引理的证明与引理 3.1 的证明思路基本一致, 其中不同的地方我们沿用引理 3.1 证明过程中的记号来叙述.

设球 $B(P_B, l_B)$ 为覆盖 $\{l_i^1, R_i^1\}$ 中的一个球. 定义

$$B^* = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); |P - (P_B + 4^{2j-1}(2, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}))| < 4^{2j-1}\}.$$

易知 $B^* \subset B(P_B, l_B)$ 且当 j 充分大时, 覆盖 $\{l_i^1, R_i^1\}$ ($i = 1, 2, \dots$) 也不是 B^* 的一个覆盖. 由 $\varphi(\Theta)$ 的有界性和 (3.2) 可知, 存在 $P = (r, \Theta) \in B^*$, 使得 $u_1(P) \leq c(n)V(r)$. 余下的证明与引理 3.1 的证明类似, 故略去. 引理 3.2 证毕. $\square$

注 3.1 当 $n = 2$ 时, 引理 3.2 的证明完全可以简化. 若集合 $\{P = (r, \Theta) \in C_2(\Omega); u_1(P) > V(r)\}$ 是无穷远点处的稀薄集, 则由 (1.2) 和定理 1.4 知, 它有一个覆盖 $\{l_i, R_i\}$ 满足 $\sum_i (l_i/R_i) < \infty$. 故存在 $\{R_j\}$, 使得当 $j \rightarrow \infty$ 时 $R_j \rightarrow \infty$ 且 $\lim_{j \rightarrow \infty} R_j/4^j = 1$. 故对于任意的 j , 都有 $\{P = (r, \Theta) \in C_2(\Omega); u_1(P) > V(r)\} \cap \partial B(O, R_j) = \emptyset$.

4 定理 2.3 的证明

设 X 和 $\{X_j\}$ 如第 3 节所定义, 另定义

$$X' = \bigcup_{j=0}^{\infty} X_{2j+1}.$$

设 $u = u_1 + u_2$, 其中 u_1 是与测度 $\nu_1 = \nu|_X$ 和 $\mu_1 = \mu|_X$ 相关的函数. 故由 X' 的定义可知, u_2 是与测度 $\nu_2 = \nu|_{X'}$ 和 $\mu_2 = \mu|_{X'}$ 相关的函数.

因为定理 2.3 充分性可以由定理 1.7 直接得到, 故我们仅证明其必要性.

首先证明定理 2.3(i). 集合

$$\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u_1(P) > V(r)\varphi(\Theta)\}$$

和

$$\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u_2(P) > V(r)\varphi(\Theta)\}$$

分别是无穷远点处的极细集.

在此, 我们仅讨论 $u_1 = \text{PI}_\Omega^a \nu_1 + G_\Omega^a \mu_1$, 因为对于 u_2 我们可以得到类似的证明.

设 $c(n)$ 如引理 3.1 中所定义. 另定义

$$\mathfrak{G} = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); \text{PI}_\Omega^a \nu_1(P) > c(n)V(r)\varphi(\Theta)\}$$

和

$$\mathfrak{H} = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); G_\Omega^a \mu_1(P) > c(n)V(r)\varphi(\Theta)\},$$

易知 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{H}$ 都是开集且都是无穷远点处的极细集.

由引理 3.1 可知, 对于充分大的 j , 集合 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{H}$ 都可以分解成互不相交的子集如下:

$$\mathfrak{G}_j = \mathfrak{G} \cap C_n(\Omega; [2 \cdot 4^{2j-1}, 2 \cdot 4^{2j+1}]), \quad \mathfrak{H}_j = \mathfrak{H} \cap C_n(\Omega; [2 \cdot 4^{2j-1}, 2 \cdot 4^{2j+1}])$$

且对于任意的 $P = (r, \Theta) \in \partial \mathfrak{G}_j \cap C_n(\Omega)$, 有

$$\text{PI}_\Omega^a \nu_1(P) = c(n)V(r)\varphi(\Theta);$$

对于任意的 $P = (r, \Theta) \in \partial \mathfrak{H}_j \cap C_n(\Omega)$, 有

$$G_\Omega^a \mu_1(P) = c(n)V(r)\varphi(\Theta).$$

首先, 考虑集合列 $\{\mathfrak{G}_j\}$. 设 $\lambda_{\mathfrak{G}_j}^a$ 为集合 $\mathfrak{G}_j$ 上的基本分布. 因为 $\mathfrak{G}_j$ 是锥中的相对开集, 故

$$(\text{supp} \lambda_{\mathfrak{G}_j}^a) \cap C_n(\Omega) = \partial \mathfrak{G}_j \cap C_n(\Omega)$$

且 $\lambda_{\mathfrak{G}_j}^a(S_n(\Omega)) = 0$.

设 $f = \text{PI}_\Omega^a \nu_1$. 下面证明

$$\hat{R}_f^\mathfrak{G} = f. \quad (4.1)$$

设 $0 \leq v \in \text{SUP}(\Omega)$ 且在集合 $\mathfrak{G}$ 中是 f 的控制函数. 如果能够证明在锥中 v 也是 f 的控制函数, 则可知 (4.1) 成立.

因为测度 ν_1 是点式群体之和, 故设 f_j 为第 j 个量的 Poisson-Sch 积分. 定义集合

$$A_j = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); f_j(P) \geq c(n)V(r)\varphi(\Theta)\}.$$

因为 v 是 f 在集合 $\mathfrak{G}$ 上的控制函数, 故 v 是 f_j 在集合 A_j 上的控制函数. 又因为 f_j 在 $S_n(\Omega) \setminus A_j$ 上取值为零, 故 $0 \leq v - f_j \in \text{SUP}(\Omega)$. 令 $j \rightarrow \infty$, 得 $v - f \geq 0$, 即在锥中 v 也是 f 的控制函数. 故 (4.1) 得证.

定义

$$\Lambda_{\mathfrak{G}} = \{Q \in S_n(\Omega); \mathfrak{G} \text{ 不是锥中 } Q \text{ 点处与 } \text{Sch}_a \text{ 算子相关的极细集}\}.$$

由 (4.1) 可得 $\nu_1(S_n(\Omega) \setminus \Lambda_{\mathfrak{G}}) = 0$. 另由文献 [1, 第 354 页] 知, 对于任意的 $P \in \Lambda_{\mathfrak{G}} \cap \overline{\mathfrak{G}_j}$, 得

$$\text{PI}_{\Omega}^a * \lambda_{\mathfrak{G}_j}^a(P) = c(n) \int_{C_n(\Omega)} t\varphi(\Phi)V(|P-Q|)W(|P-Q|)|P-Q|^{-2}d\lambda_{\mathfrak{G}_j}^a(Q) = 1. \quad (4.2)$$

设 ν_j 是 ν_1 在 $\overline{\mathfrak{G}_j}$ 上的限制, 故由 (4.1)、(4.2) 和 $(\text{supp}\nu_1) \subset S_n(\Omega) \cap \overline{\mathfrak{G}}$, 得

$$\nu_j(S_n(\Omega)) = \nu_j(\Lambda_{\mathfrak{G}} \cap \overline{\mathfrak{G}_j}) \quad (4.3)$$

和

$$\begin{aligned} \nu_j(S_n(\Omega)) &= \int_{S_n(\Omega)} \text{PI}_{\Omega}^a * \lambda_{\mathfrak{G}_j}^a(Q) d\nu_1(Q) \\ &= \int_{C_n(\Omega)} \text{PI}_{\Omega}^a \nu_1(Q) d\lambda_{\mathfrak{G}_j}^a(Q) \\ &\leq c(n)\gamma_{\Omega}^a(\mathfrak{G}_j)V^{-1}(4^j)W(4^j). \end{aligned} \quad (4.4)$$

设 $\mathfrak{G}_0 = \bigcup_{j=N}^{\infty} \overline{\mathfrak{G}_j} \cap \Lambda_{\mathfrak{G}}$, 其中 N 充分大, 使得对于任意的 $j \geq N$, 都有引理 3.1 成立. 因为 $\mathfrak{G}$ 是无穷远点处的极细集, 故由 (4.3)、(4.4)、定理 1.1 和注 1.1, 得

$$\int_{\mathfrak{G}_0} \frac{1}{1+tW^{-1}(t)} d\nu_1(Q) \leq c(n)\gamma_{\Omega}^a(\mathfrak{G}_j)V^{-1}(4^j)W(4^j) < \infty.$$

故 $\text{PI}_{\Omega}^a \nu_1 \in \mathcal{F}_{\Omega}$.

然后, 考虑集合列 $\{\mathfrak{H}_j\}$. 因为测度 μ_1 是离散的且 $G_{\Omega}^a \mu_1$ 在测度 μ_1 集中的集合取值为无穷, 故测度 μ_1 集中在开集 $\mathfrak{H}$. 由引理 3.1 可知, 集合 $\mathfrak{H}_j$ 是开集. 设 $\lambda_{\mathfrak{H}_j}^a$ 是集合 $\mathfrak{H}_j$ 上的基本分布, 则对于任意的 $P = (r, \Theta) \in \mathfrak{H}_j$, 有 $G_{\Omega}^a \lambda_{\mathfrak{H}_j}^a(P) = V(r)\varphi(\Theta)$ 且 $\lambda_{\mathfrak{H}_j}^a$ 集中在 $\partial\mathfrak{H}_j \cap C_n(\Omega)$.

因此,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{H}_j} V(t)\varphi(\Phi)d\mu_1(Q) &= \int_{C_n(\Omega)} G_{\Omega}^a \lambda_{\mathfrak{H}_j}^a(Q) d\mu_1(Q) \\ &= \int_{\partial\mathfrak{H}_j \cap C_n(\Omega)} G_{\Omega}^a \mu_1(Q) d\lambda_{\mathfrak{H}_j}^a(Q) \\ &= \int_{\partial\mathfrak{H}_j \cap C_n(\Omega)} c(n)M_{\Omega}^a(Q, \infty) d\lambda_{\mathfrak{H}_j}^a(Q) \\ &\leq c(n)\eta_{\mathfrak{H}_j}^a(C_n(\Omega))V^{-1}(4^j)W(4^j). \end{aligned} \quad (4.5)$$

设 $\mathfrak{H}_0 = \bigcup_{j=N}^{\infty} \overline{\mathfrak{H}_j}$, 其中 N 充分大, 使得对于任意的 $j \geq N$, 都有引理 3.1 成立. 因为 $\mathfrak{H}$ 是无穷远点处的极细集, 故由 (4.5)、定理 1.1 和注 1.1, 得

$$\int_{\mathfrak{H}_0} V(t)\varphi(\Phi)d\mu_1(Q) + \int_{\mathfrak{H}_0} W(t)\varphi(\Phi)d\mu_1(Q) \leq c(n)\eta_{\mathfrak{H}_j}^a(C_n(\Omega))V^{-1}(4^j)W(4^j) < \infty.$$

又因为 $G_{\Omega}^a \mu_1 \in H(C_n(\Omega) \setminus \mathfrak{H})$, 故 $G_{\Omega}^a \mu_1 \in \mathcal{F}_{\Omega}$.

从而可得 $u_1 \in \mathcal{F}_{\Omega}$. 对 u_2 我们也有类似的证明.

故 $u \in \mathcal{F}_{\Omega}$, 即定理 2.3(i) 成立.

定理 2.3(ii) 的证明与定理 2.3(i) 的证明方法基本一致, 我们只需用引理 3.2 代替引理 3.1, 用定理 1.2 代替定理 1.1 即可. 为了便于读者阅读, 我们沿用定理 2.3(i) 中已使用过的记号, 仅写出其中与定理 2.3(i) 中证明不同的地方.

考虑集合

$$\mathfrak{G} = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); \text{PI}_{\Omega}^a \nu_1(P) > c(n)V(r)\}$$

和

$$\mathfrak{H} = \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); G_{\Omega}^a \mu_1(P) > c(n)V(r)\},$$

其中 $c(n)$ 如引理 3.2 中所定义. 对于定理 2.3(i) 中定义的 ν_j , 我们有下面的估计:

$$\begin{aligned} \nu_j(S_n(\Omega)) &= \int_{S_n(\Omega)} \text{PI}_{\Omega}^a * \lambda_{\mathfrak{G}_j}^a(Q) d\nu_1(Q) \\ &= \int_{C_n(\Omega)} \text{PI}_{\Omega}^a \nu_1(Q) d\lambda_{\mathfrak{G}_j}^a(Q) \\ &\leq c_n \lambda_{\Omega}^a(\mathfrak{G}_j) W(4^j). \end{aligned}$$

其余的证明与定理 2.3(i) 类似. 故定理 2.3(ii) 证毕.

5 定理 2.1 和 2.2 的证明

为了完成本文主要定理的证明, 我们需要构造下列修改的 Green-Sch 核函数:

$$K_{\Omega}^a(Q, P) = \begin{cases} \frac{G_{\Omega}^a(Q, P)}{t\varphi(\Phi)}, & C_n(\Omega) \times C_n(\Omega), \\ s_n V(r)\varphi(\Theta)|P - Q|^{-n}, & S_n(\Omega) \times C_n(\Omega). \end{cases}$$

若 $P \in C_n(\Omega)$, 则 $K_{\Omega}^a(\cdot, P)$ 在 $\overline{C_n(\Omega)} \setminus \{P\}$ 中连续.

若 $u(P) \in \text{SUP}(\Omega)$ 且 $u(P)$ 具有形如 (1.5) 的表达式, 则

$$u(P) = \int_{C_n(\Omega)} K_{\Omega}^a(Q, P) d\varsigma_{\Omega}^a(Q) = K_{\Omega}^a \varsigma_{\Omega}^a(P),$$

其中

$$d\varsigma_{\Omega}^a(Q) = \begin{cases} t\varphi(\Phi)d\mu(Q), & Q = (t, \Phi) \in C_n(\Omega), \\ d\nu(Q), & Q = (t, \Phi) \in S_n(\Omega). \end{cases}$$

首先, 我们给出定理 2.1 的证明.

定理 2.1 的证明 先证必要性. 设集合 $\mathfrak{E}$ 和 E_0 是无穷远点处的极细集. 由 Green-Sch 能量的次可加性, 定义 1.3 和注 2.1, 得 $E' = \mathfrak{E} \cup E_0 \cup C_n(\Omega; (0, 1))$ 也是无穷远点处的极细集. 故存在开集 $\mathcal{O} \subset C_n(\Omega)$, 使得 $E' \subset \mathcal{O}$ 且 $\mathcal{O}$ 是无穷远点处的极细集.

对于任意的 $Q \in \mathcal{O} \cup S_n(\Omega)$, 存在球 $B(Q, l(Q))$, 使得 $B(Q, l(Q)) \cap C_n(\Omega) \subset \mathcal{O}$, 其中 $0 < l(Q) < 1$. 易知 $\mathcal{O} \cup S_n(\Omega) \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{O} \cup S_n(\Omega)} B(Q, l(Q))$. 由 Besicovitch-Ahlfors-Landof 引理 (参见文献 [26, 第 197 页]) 可知, 存在 $\{B(Q, l(Q))\}$ 的子集族 $\{B(Q_i, l(Q_i))\}$, 使得在其中可以找到至多可数个球 $B(Q_i, l(Q_i))$, 有 $\mathcal{O} \cup S_n(\Omega) \subset \bigcup_i B(Q_i, l(Q_i))$ 且对于任意的 $Q \in \mathcal{O} \cup S_n(\Omega)$, 至多有 $N(n)$ 个球, 使得 $Q \in B(Q_i, l(Q_i))$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N(n)$.

对于任意的 $P \in C_n(\Omega) \setminus B(Q_i, l(Q_i))$ 和 $Q \in \overline{B(Q_i, l(Q_i))} \cap \overline{C_n(\Omega)}$, 有 (参见文献 [27])

$$K_\Omega^a(Q, P) \geq c(n)K_\Omega^a(Q_i, P). \quad (5.1)$$

上述不等式的反方向也成立, 参见文献 [28].

对于任意的 $Q_i \in C_n(\Omega)$, 点 Q_i 的质量 $\varsigma_\Omega^a(B(Q_i, l(Q_i))) \geq 0$. 设 $\varsigma_\Omega^{a,1}$ 为所有这些点的质量之和, 则 $u_1(P) = K_\Omega^a \varsigma_\Omega^{a,1}(P)$.

设 $P \in C_n(\Omega) \setminus \mathcal{O}$, 则由 (5.1) 得

$$\begin{aligned} u(P) &\geq \frac{1}{N(n)} \sum_i \int_{B(Q_i, l(Q_i))} K_\Omega^a(Q, P) d\varsigma_\Omega^a(Q) \\ &\geq \frac{c(n)}{N(n)} \sum_i K_\Omega^a(Q_i, P) \varsigma_\Omega^a(B(Q_i, l(Q_i))) \\ &= \frac{c(n)}{N(n)} u_1(P). \end{aligned}$$

故对于任意的 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega) \setminus \mathcal{O}$, 得

$$u_1(P) \leq c(n)u(P) \leq c(n)V(r)\varphi(\Theta),$$

即

$$\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u_1(P) > c(n)V(r)\varphi(\Theta)\} \subset \mathcal{O}.$$

因为 $\mathcal{O}$ 是无穷远点处的极细集, 故由推论 2.1 可知 $u_1 \in \mathcal{F}_\Omega$. 从而可得 $u \in \mathcal{F}_\Omega$.

充分性可以由定理 1.7(i) 直接得到. 定理 2.1 证毕. $\square$

接着, 我们给出定理 2.2 的证明.

定理 2.2 的证明 同理, 我们仅证明必要性. 因为充分性可以由定理 1.7(ii) 直接得到. 设集合 $\mathfrak{F}$ 和 E_0 是无穷远点处的稀薄集, 故 $E'' = \mathfrak{F} \cup E_0$ 也是无穷远点处的稀薄集. 故存在开集 $\mathcal{O}_1 \subset C_n(\Omega)$, 使得 $E'' \subset \mathcal{O}_1$ 且 $\mathcal{O}_1$ 是无穷远点处的稀薄集.

设 $\mathcal{O}_2$ 是 $S_n(\Omega)$ 中的相对开集, 使得 $F_0 \subset \mathcal{O}_2$ 且

$$\int_{\mathcal{O}_2} (1+t)^{-1} V(1+t) W(1+t) dQ < \infty.$$

对于任意的 $Q \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, 存在球 $B(Q, l(Q))$ ($0 < l(Q) < 1$), 使得 $B(Q, l(Q)) \subset \mathcal{O}_1$ ($Q \in \mathcal{O}_1$) 且 $B(Q, l(Q)) \cap S_n(\Omega) \subset \mathcal{O}_2$ ($Q \in \mathcal{O}_2$). 由 Besicovitch-Ahlfors-Landof 引理 (参见文献 [26, 第 197 页]) 可

知, 存在一列球 $\{B(Q_i, l(Q_i))\}$, 使得 $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \subset \bigcup_i B(Q_i, l(Q_i))$ 且对于任意的 $Q \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, 存在至多有 $N(n)$ 个球, 使得 $Q \in B(Q_i, l(Q_i))$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N(n)$.

故由 (2.1) 可得

$$\sum_{Q_i \in \mathcal{O}_2} \left(\frac{l(Q_i)}{R(Q_i)} \right) V \left(\frac{R(Q_i)}{l(Q_i)} \right) W \left(\frac{R(Q_i)}{l(Q_i)} \right) \approx \int_{\mathcal{O}_2} (1+t)^{-1} V(1+t) W(1+t) dQ < \infty$$

且集合 $\mathcal{O}_3 = \{(\bigcup_{Q_i \in \mathcal{O}_2} B(Q_i, l(Q_i))) \cap C_n(\Omega); Q_i \in \mathcal{O}_2\}$ 是无穷远点处的稀薄集.

令 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3$, 则 $\mathcal{O}$ 是无穷远点处的稀薄集. 由假设可知,

$$\mu(C_n(\Omega) \setminus \mathcal{O}) = \nu(S_n(\Omega) \setminus \mathcal{O}) = 0.$$

余下的证明与定理 2.1 的证明类似, 故略去. 定理 2.2 证毕. $\square$

6 举例

本节将通过 3 个例子来说明本文主要结论 (定理 2.1 和 2.2) 的限制条件是最弱的.

为此, 设

$$I_j = \{P = (r, \Theta) \in \overline{C_n(\Omega)}; s^j \leq r < s^{j+1}\},$$

其中 $j > 1$.

命题 6.1 设集合 E 不是无穷远点处的极细集, 存在一个定义在锥中的测度 τ 使得 $\text{supp} \tau \subset \overline{E}$. 若 $K_\Omega^a \tau = u$, 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty, P=(r, \Theta) \in C_n(\Omega)} \frac{u(P)}{V(r)\varphi(\Theta)} = 0. \quad (6.1)$$

但 $u \notin \mathcal{F}_\Omega$.

证明 在锥中定义在 $S_n(\Omega)$ 上取值 $V(r)\varphi(\Theta)$ ($(r, \Theta) \in S_n(\Omega)$) 的 Poisson-Sch 积分为 $\text{PI}_\Omega^a V$. 对于任意的 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$, 有 $\text{PI}_\Omega^a V(P) \approx V(r)\varphi(\Theta)$. 故对于任意的 $P \in E$, 有

$$\hat{R}_{M_\Omega^a(P, \infty)}^E(P) \lesssim \text{PI}_\Omega^a V(P).$$

从而可得 $\hat{R}_{M_\Omega^a(P, \infty)}^E \in \mathcal{F}_\Omega$.

定义测度 μ_0 如下:

$$\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, \infty)}^E = \int_{C_n(\Omega)} K_\Omega^a(Q, \cdot) d\mu_0(Q).$$

因为集合 E 不是无穷远点处的极细集, 故

$$\sum_j \mu_0(\bar{I}_j) V^{-1}(s^j) W(s^j) = \infty.$$

存在正的点列 $\{\epsilon_j\}$, 使得当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\epsilon_j \rightarrow 0$ 且

$$\sum_j \epsilon_j \mu_0(\bar{I}_j) V^{-1}(s^j) W(s^j) = \infty.$$

设 u_j 是 u_0 在 I_j 上的限制, 定义测度

$$\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j \mu_j.$$

存在 N 充分大, 使得当 $j > N$ 时, 有 $\epsilon_j \leq \epsilon$. 若 $K_{\Omega}^a \tau(P) = u(P)$, 则

$$u(P) \lesssim \sum_{j=1}^N \epsilon_j K_{\Omega}^a u_j(P) + \epsilon \text{PI}_{\Omega}^a V(P).$$

即

$$\limsup_{r \rightarrow \infty, P=(r, \Theta) \in C_n(\Omega)} \frac{u(P)}{V(r)\varphi(\Theta)} \lesssim \epsilon.$$

故 (6.1) 成立. 但 $u \notin \mathcal{F}_{\Omega}$. □

同理, 应用定理 1.3, 我们可以得到下面的结论.

命题 6.2 设集合 E 不是无穷远点处的稀薄集, 存在测度 τ 使得 $\text{supp } \tau \subset \overline{E}$. 若 $K_{\Omega}^a \tau = u$, 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty, P=(r, \Theta) \in C_n(\Omega)} \frac{u(P)}{V(r)} = 0. \quad (6.2)$$

但 $u \notin \mathcal{F}_{\Omega}$.

命题 6.3 设 $F_0 \subset S_n(\Omega)$ 是一个闭集使得

$$\int_{F_0} (1+t)^{-1} V(1+t) W(1+t) dQ = \infty. \quad (6.3)$$

存在定义在 $S_n(\Omega)$ 中的测度 ν , 使得 $\text{supp } \nu \subset F_0$. 若 $\text{PI}_{\Omega}^a \nu = u$, 则 (6.2) 成立. 但 $u \notin \mathcal{F}_{\Omega}$.

证明 设 ρ_j 是定义在 $S_n(\Omega; [2^{j-1}, 2^j]) \cap F_0$ 上的 $n-1$ 维测度. 由 (6.3) 可知,

$$\sum_j \rho_j W(2^j) = \infty.$$

存在正的点列 $\{\epsilon_j\}$, 使得当 $j \rightarrow \infty$ 时 $\epsilon_j \rightarrow 0$ 且

$$\sum_j \epsilon_j \rho_j W(2^j) = \infty. \quad (6.4)$$

在 $S_n(\Omega)$ 中定义测度 ν , 使得 $d\nu = f d\sigma$, 其中 σ 是定义在 $S_n(\Omega)$ 上的 $n-1$ 维测度且

$$f = \sum_j \epsilon_j \rho_j V(2^j) \chi_{S_n(\Omega; [2^{j-1}, 2^j]) \cap F_0}.$$

易知 $\text{supp } \nu \subset F_0$.

若令 $\text{PI}_{\Omega}^a \nu = u$, 则对于任意的 $P \in C_n(\Omega)$, 有 $u(P) \lesssim \text{PI}_{\Omega}^a \nu(P)$. 与命题 6.1 的证明类似, 存在充分大的 N , 使得当 $j > N$ 时, 有 $\epsilon_j \leq \epsilon$. 若令 $K_{\Omega}^a \tau(P) = u(P)$, 则

$$u(P) \lesssim \sum_{j=1}^N \epsilon_j V(2^j) \chi_{S_n(\Omega; [2^{j-1}, 2^j]) \cap F_0}(P) + \epsilon \text{PI}_{\Omega}^a V(P).$$

故 (6.2) 成立. 但由 (6.4) 知 $u \notin \mathcal{F}_{\Omega}$. □

致谢 本文是作者在 Southern Brittany 大学访问期间完成. 作者不仅要感谢 Southern Brittany 提供的舒心工作环境, 而且要感谢国家留学基金委所提供的一年经费支持.

参考文献

- 1 Levin B Y, Kheyfits A I. Asymptotic behavior of subfunctions of time-independent Schrödinger operators. In: Some Topics on Value Distribution and Differentiability in Complex and P-Adic Analysis. Mathematics Monograph Series, 11. Beijing: Science Press, 2008, 323–397
- 2 Rosenblum G, Solomyak M, Shubin M. Spectral Theory of Differential Operators. Moscow: VINITI, 1989
- 3 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1977
- 4 Verzhbinskii G M, Maz'ya V G. Asymptotic behavior of solutions of elliptic equations of the second order close to a boundary, I. Sibirsk Mat J, 1971, 12: 874–899
- 5 Simon B. Schrödinger semigroups. Bull Amer Math Soc (NS), 1982, 7: 447–527
- 6 Qiao L, Deng G. A theorem of Phragmén-Lindelöf type for subfunctions in a cone. Glasg Math J, 2011, 53: 599–610
- 7 Qiao L, Deng G. Integral representation for the solution of the stationary Schrödinger equation in a cone. Math Nachr, 2012, 285: 2029–2038
- 8 Qiao L, Pan G. Generalization of the Phragmén-Lindelöf theorems for subfunctions. Internat J Math, 2013, 24: 1350062
- 9 Qiao L, Pan G. Theorems of the Phragmén-Lindelöf type for subfunctions in a cone. Proc Edinb Math Soc (2), 2017, 60: 739–751
- 10 Long P. The characterizations of exceptional sets and growth properties in classical or nonlinear potential theory. PhD Thesis. Beijing: Beijing Normal University, 2013
- 11 Miyamoto I, Yoshida H. Two criterions of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cone. J Math Soc Japan, 2002, 54: 487–512
- 12 Miyamoto I, Yoshida H. On α -minimally thin sets at infinity in a cone. Hiroshima Math J, 2007, 37: 61–80
- 13 Qiao L, Deng G. Integral representations and growth properties for a class of superfunctions in a cone. Taiwanese J Math, 2011, 15: 2213–2233
- 14 Altun M, Goncharov A. On smoothness of the green function for the complement of a rarefied Cantor-type set. Constr Approx, 2011, 33: 265–271
- 15 Qiao L, Su B, Deng G. Growth properties for the solutions of the stationary Schrödinger equation in a cone. Taiwanese J Math, 2012, 16: 1733–1748
- 16 Qiao L, Pan G. Integral representations of generalized harmonic functions. Taiwanese J Math, 2013, 17: 1503–1521
- 17 Qiao L. Matsaev's type theorems for solutions of the stationary Schrödinger equation and its applications. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 5709–5720
- 18 乔蕾, 邓冠铁. 无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集. 中国科学: 数学, 2014, 44: 1247–1256
- 19 Qiao L, Zhao T. Boundary limits for fractional Poisson α -extensions of L^p boundary functions in a cone. Pacific J Math, 2014, 272: 227–236
- 20 Kim P, Song R, Vondraček Z. Minimal thinness with respect to symmetric Lévy processes. Trans Amer Math Soc, 2016, 368: 8785–8822
- 21 龙品红, 韩惠丽, 邓冠铁. 锥中无穷远处与稳态的薛定谔算子相关的稀疏集的覆盖性质. 数学物理学报, 2016, 36: 1082–1091
- 22 Nakayama H. Surface diffeomorphisms with connected but not path-connected minimal sets containing arcs. J Math Soc Japan, 2017, 69: 227–239
- 23 Qiao L. Weak solutions for the stationary Schrödinger equation and its application. Appl Math Lett, 2017, 63: 34–39
- 24 Qiao L. Asymptotic behaviors of Green-Sch potentials at infinity and its applications. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2017, 22: 2321–2338
- 25 Kheyfits A I, Lacay J B. Asymptotic behavior of solutions of the one-dimensional heat equation. Int J Evol Equ, 2010, 5: 103–108
- 26 Landkof N S. Foundations of Modern Potential Theory. Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 180. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1972
- 27 Cranston M, Fabes E, Zhao Z. Conditional gauge and potential theory for the Schrödinger operator. Trans Amer Math Soc, 1988, 307: 171–194
- 28 Cranston M. Conditional Brownian motion, Whitney squares and the conditional gauge theorem. In: Seminar on Stochastic Processes, 1988 (Gainesville, FL, 1988). Progress in Probability, vol. 17. Boston: Birkhäuser, 1989, 109–119

Applications of properties of minimally thin sets at infinity with respect to the Schrödinger operator

Lei Qiao

Abstract Let u be a superfunction in a cone. As applications of some criterions and geometrical properties of minimally thin sets at infinity with respect to the Schrödinger operator, in this paper we prove that the exceptional sets $\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > V(r)\varphi(\Theta)\}$ and $\{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); u(P) > V(r)\}$ in a cone are minimally thin set and rarefied set at infinity with respect to the Schrödinger operator respectively if and only the measures associated with u satisfy certain integral conditions.

Keywords superfunction, Schrödinger operator, minimally thin set, Green-Sch potential

MSC(2010) 35J05, 35J10

doi: 10.1360/N012017-00023