非线性复微分方程的亚纯解

张建军¹, 徐新萍¹, 廖良文^{2*}

1. 江苏第二师范学院数学与信息技术学院, 南京 210013;

2. 南京大学数学系, 南京 210093

E-mail: zhangjianjun1982@163.com, xxp3268@sina.com, maliao@nju.edu.cn

收稿日期: 2016-03-07; 接受日期: 2016-12-02; 网络出版日期: 2017-03-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671191)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK20140767)、江苏省高校优秀中青年骨干教师和校长境外研修计划和江苏省高校青蓝工程资助项目

摘要 本文主要考虑下列形式的非线性微分方程的超越亚纯解:

$$f^n f' + Q_d(z, f) = p_1(z)e^{\alpha_1(z)} + p_2(z)e^{\alpha_2(z)},$$

其中 $n \geq 3$ 是一个整数, $Q_d(z, f)$ 是一个关于 f 的次数 $d \leq n-2$ 且以有理函数为系数的微分多项式, p_1 和 p_2 是非零的有理函数, α_1 和 α_2 是非常数的多项式. 进一步地, 本文给出了上述方程存在亚纯解时 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 所满足的条件. 这些结果推广并改进了一些已知的结果.

关键词 复微分方程 亚纯解 极点

MSC (2010) 主题分类 34A34, 30D35

1 引言和主要结果

设 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数. 假定读者熟悉 Nevanlinna 理论的标准概念及相应的记号, 如 $T(r, f)$ 、 $m(r, f)$ 和 $N(r, f)$ 等, 具体可参见文献 [1, 2].

在过去的 10 年里, 人们对下列形式的复微分方程产生了极大的兴趣:

$$f^n + Q_d(z, f) = p_1(z)e^{\alpha_1(z)} + p_2(z)e^{\alpha_2(z)}, \quad (1.1)$$

其中 $Q_d(z, f)$ 表示 f 的次数 $d \leq n-1$ 且以 f 的小函数为系数的微分多项式, $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$ 是有理函数, $\alpha_1(z)$ 和 $\alpha_2(z)$ 是非常数的多项式.

2006 年, Li 和 Yang^[3] 研究了方程 (1.1) 整函数解的存在性并获得了下列结果.

定理 1^[3] 设 $n \geq 4$ 是一个整数, $Q_d(z, f)$ 表示 $f(z)$ 的次数 $d \leq n-3$ 且以 f 的小函数为系数的微分多项式. 设 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$ 是两个非零的多项式, α_1 和 α_2 是两个非零的常数且满足 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 是非有理数, 那么方程

$$f^n(z) + Q_d(z, f) = p_1(z)e^{\alpha_1 z} + p_2(z)e^{\alpha_2 z}$$

没有超越整函数解.

英文引用格式: Zhang J J, Xu X P, Liao L W. Meromorphic solutions of nonlinear complex differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 919–932, doi: 10.1360/SCM-2016-0159

2011 年, 对特定的 $\alpha_1(z)$ 和 $\alpha_2(z)$, Li^[4] 给出了方程 (1.1) 亚纯解的形式.

定理 2 设 $n \geq 2$ 是一个整数, $Q_d(z, f)$ 是 $f(z)$ 的次数 $d \leq n-2$ 且以 f 的小函数为系数的代数微分多项式, p_1 、 p_2 、 α_1 和 α_2 是非零的常数且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$. 若 f 是下列方程的一个超越亚纯解:

$$f^n(z) + Q_d(z, f) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z},$$

且满足 $N(r, f) = S(r, f)$, 那么下列之一成立:

- (1) $f(z) = c_0 + c_1 e^{\frac{\alpha_1 z}{n}}$;
- (2) $f(z) = c_0 + c_2 e^{\frac{\alpha_2 z}{n}}$;
- (3) $f(z) = c_1 e^{\frac{\alpha_1 z}{n}} + c_2 e^{\frac{\alpha_2 z}{n}}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$,

其中 c_0 是 $f(z)$ 的一个小函数, c_1 和 c_2 是满足 $c_1^n = p_1$ 和 $c_2^n = p_2$ 的常数.

2013 年, Liao 等^[5] 研究了当 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$ 是有理函数, $\alpha_1(z)$ 和 $\alpha_2(z)$ 是多项式时, 方程 (1.1) 的精确亚纯解. 事实上, 他们获得了下列结果.

定理 3 设 $n \geq 3$ 是一个整数, $Q_d(z, f)$ 是 f 的次数为 d 且以有理函数为系数的微分多项式. 设 p_1 和 p_2 是有理函数, α_1 和 α_2 是多项式. 如果 $d \leq n-2$, 微分方程

$$f^n + Q_d(z, f) = p_1(z) e^{\alpha_1(z)} + p_2(z) e^{\alpha_2(z)}$$

有一个仅有有限多个极点的亚纯解, 那么 $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}$ 是一个有理数. 进一步地, 仅有下列四种情形之一成立:

- (1) $f(z) = q(z) e^{P(z)}$, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = 1$, 其中 $q(z)$ 是一个有理函数, $P(z)$ 是一个多项式且满足 $nP'(z) = \alpha'_1 = \alpha'_2$;
- (2) $f(z) = q(z) e^{P(z)}$, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{k}{n}$ 或 $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{n}{k}$, 其中 $q(z)$ 是一个有理函数, k 是一个整数且满足 $1 \leq k \leq n$, $P(z)$ 是一个多项式且满足 $nP'(z) = \alpha'_1$ 或 $nP'(z) = \alpha'_2$;
- (3) f 满足一阶线性微分方程 $f' = (\frac{1}{n} \frac{p'_2}{p_2} + \frac{1}{n} \alpha'_2) f + \psi$, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{n-1}{n}$ 或者 f 满足一阶线性微分方程 $f' = (\frac{1}{n} \frac{p'_1}{p_1} + \frac{1}{n} \alpha'_1) f + \psi$, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{n-1}{n-1}$, 其中 ψ 是一个有理函数;
- (4) $f(z) = \gamma_1(z) e^{\beta_1(z)} + \gamma_2(z) e^{-\beta_1(z)}$, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = -1$, 其中 γ_1 和 γ_2 是有理函数, $\beta_1(z)$ 是一个多项式且满足 $n\beta'_1 = \alpha'_1$ 或 $n\beta'_1 = \alpha'_2$.

在方程 (1.1) 中, 如果项 f^n 被 $f^n f'$ 取代, 那么寻找方程的精确亚纯解将比较困难. 最近, Liao^[6,7] 得到了下列结果.

定理 4 设 $Q_d(z, f)$ 是 f 的次数为 d 且以有理函数为系数的微分多项式, u 是一个非零的有理函数, v 是一个非常数的多项式. 如果 $d \leq n-1$, 微分方程

$$f^n f' + Q_d(z, f) = u(z) e^{v(z)}$$

有一个只有有限多个极点的超越亚纯解, 那么, f 有下列形式:

$$f(z) = s(z) e^{\frac{v(z)}{n+1}} \quad \text{且} \quad Q_d(z, f) \equiv 0,$$

其中 $s(z)$ 是一个有理函数且满足 $s^n((n+1)s' + v's) = (n+1)u$.

本文的主要结果如下.

定理 5 设 $n \geq 3$ 是一个整数, $Q_d(z, f)$ 是 f 的次数为 d 且以有理函数为系数的微分多项式, p_1 和 p_2 是非零的有理函数, α_1 和 α_2 是非常数的多项式. 如果 $d \leq n-2$, 微分方程

$$f^n f' + Q_d(z, f) = p_1(z) e^{\alpha_1(z)} + p_2(z) e^{\alpha_2(z)} \quad (1.2)$$

有一个只有有限多个极点的超越亚纯解, 那么, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}$ 是一个有理数, $f(z)$ 有下列形式:

$$f(z) = q(z)e^{P(z)},$$

其中 $q(z)$ 是一个有理函数, $P(z)$ 是一个非常数的多项式. 进一步地, 只有下列两种情形成立:

- (1) $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = 1$, $Q_d(z, f) \equiv 0$ 且 $(n+1)P'(z) = \alpha'_1 = \alpha'_2$;
- (2) $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{n+1}{k}$, k ($1 \leq k \leq d$) 是一个整数, $Q_d(z, f) \equiv p_2(z)e^{\alpha_2(z)}$ 且 $(n+1)P'(z) = \alpha'_1$, 或 $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{k}{n+1}$, k ($1 \leq k \leq d$) 是一个整数, $Q_d(z, f) \equiv p_1(z)e^{\alpha_1(z)}$ 且 $(n+1)P'(z) = \alpha'_2$.

根据定理 5, 很容易得到下列结果.

推论 1 设 $n \geq 3$ 是一个整数, $Q_d(z, f)$ 是 f 的次数为 d 且以有理函数为系数的微分多项式, p_1 和 p_2 是非零的有理函数, α_1 和 α_2 是非零的常数. 如果 $d \leq n-2$ 且微分方程

$$f^n f' + Q_d(z, f) = p_1(z)e^{\alpha_1 z} + p_2(z)e^{\alpha_2 z}$$

有一个只有有限多个极点的超越亚纯解, 那么, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 是一个有理数且 $f(z)$ 有下列形式:

$$f(z) = q(z)e^{P(z)},$$

其中 $q(z)$ 是一个有理函数, $P(z)$ 是一个非常数的多项式. 进一步地, 只有下列两种情形成立:

- (1) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1$, $Q_d(z, f) \equiv 0$ 且 $(n+1)P'(z) = \alpha_1 = \alpha_2$;
- (2) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{n+1}{k}$, k ($1 \leq k \leq d$) 是一个整数, $Q_d(z, f) \equiv p_2(z)e^{\alpha_2 z}$ 且 $(n+1)P'(z) = \alpha_1$, 或 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{k}{n+1}$, k ($1 \leq k \leq d$) 是一个整数, $Q_d(z, f) \equiv p_1(z)e^{\alpha_1 z}$ 且 $(n+1)P'(z) = \alpha_2$.

推论 2 设 $n \geq 3$ 是一个整数, p_1 和 p_2 是非零的有理函数, α_1 和 α_2 是非常数的多项式. 如果 $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} \neq 1$, 那么微分方程

$$f^n f' = p_1(z)e^{\alpha_1(z)} + p_2(z)e^{\alpha_2(z)}$$

没有超越亚纯解.

注 1 $f(z) = \frac{1}{z}e^z$ 满足微分方程

$$f^3 f' + f'' = \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)e^{4z} + \left(\frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z}\right)e^z,$$

其中 $n=3$, $d=k=1$, $\alpha_1(z)=4z$, $\alpha_2(z)=z$. 因此, 定理 5 中的第二种情形会发生.

注 2 定理 5 中的限制条件 $d \leq n-2$ 是必要的. 例如, $f_1(z) = -\frac{1}{2}e^{iz} + \frac{1}{2}e^{iz}$, $f_2(z) = \frac{1}{2}e^{iz} - \frac{1}{2}e^{-iz}$, $f_3(z) = -\frac{1}{2}e^{iz} + \frac{1}{2}e^{-iz}$, $f_4(z) = \frac{1}{2}e^{iz} - \frac{1}{2}e^{-iz}$ 满足下列微分方程:

$$8f^3 f' + 4if f' = \frac{i}{2}e^{4iz} - \frac{i}{2}e^{-4iz},$$

其中 $n=3$, $d=2$, $d=n-1$. 但是, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = -1$ 且方程有一些解的形式不是 $q(z)e^{P(z)}$, 其中 $q(z)$ 是一个有理函数, $P(z)$ 是一个非常数的多项式.

设 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \neq 0$ 是一个有理函数, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是不可约多项式. 定义 R 在 ∞ 的次数为 $\deg_{\infty} R = \deg P - \deg Q$. 若 $R(z) \equiv 0$, 则定义 $\deg_{\infty} R = -\infty$. 若 $R(z)$ 是一个非零的多项式, 则 $\deg_{\infty} R = \deg R$. 容易验证, 若 $R(z)$ 是一个非常数的有理函数, 则 $\deg_{\infty} \frac{R'}{R} = -1$. 因此, 若 $R(z)$ 是一个非零的有理函数, 则 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{R'(z)}{R(z)} = 0$. 若 R_1 和 R_2 是两个非零的有理函数, 则

$$\deg_{\infty} \frac{R_1}{R_2} = \deg_{\infty} R_1 - \deg_{\infty} R_2.$$

2 引理

引理 1 ^[8] 如果代数微分方程

$$P(z, f) = 0, \quad (2.1)$$

其中 $P(z, f)$ 是关于 f 的系数为亚纯函数且仅有一个控制项的代数微分多项式, 那么方程 (2.1) 没有满足条件 $N(r, f) = S(r, f)$ 的可允许亚纯解.

引理 2 ^[9] 设 $f(z)$ 是一个非常数的亚纯函数. 若 f 是有穷级, 则

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r), \quad r \rightarrow \infty;$$

若 $f(z)$ 是无穷级, 则

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log(rT(r, f))), \quad r \rightarrow \infty,$$

可能除去一个 r 的有限线性测度的例外集 E .

下列结果可以很容易地从 Clunie 引理的证明过程中得到, 参见文献 [2, 10].

引理 3 设 $f(z)$ 是一个超越亚纯函数且满足

$$f^n(z)P(z, f) = Q(z, f),$$

其中 $P(z, f)$ 和 $Q(z, f)$ 是 $f(z)$ 的以有理函数为系数的微分多项式, $Q(z, f)$ 的次数至多为 n . 若 f 是有穷级, 则

$$m(r, P(z, f)) = O(\log r), \quad r \rightarrow \infty;$$

若 $f(z)$ 是无穷级, 则

$$m(r, P(z, f)) = O(\log(rT(r, f))), \quad r \rightarrow \infty,$$

可能除去一个 r 的有限线性测度的例外集 E .

引理 4 (参见文献 [9] 或 [11, 引理 5.1]) 设 $a_j(z)$ 是有限级且级 $\leq \rho$ 的整函数, $g_j(z)$ 是整函数且 $g_k(z) - g_j(z)$ ($j \neq k$) 是超越整函数或次数大于 ρ 的多项式, 那么,

$$\sum_{j=1}^n a_j(z)e^{g_j(z)} = a_0(z)$$

成立仅当

$$a_0(z) = a_1(z) = \cdots = a_n(z) \equiv 0.$$

3 定理的证明

证明 设 f 是方程 (1.2) 的一个至多只有有限多个极点的超越亚纯解. 若 $\rho(f) = +\infty$, 则 $p_1(z)e^{\alpha_1(z)} + p_2(z)e^{\alpha_2(z)}$ 是 $f(z)$ 的一个小函数. 从而, $f(z)$ 是方程 (1.2) 的一个可允许亚纯解, 这与引理 1 矛盾. 因此, f 是有限级.

若 f 至多只有有限多个零点, 则 f 的形式一定是 $f(z) = q(z)e^{P(z)}$, 其中 $q(z)$ 是一个有理函数, $P(z)$ 是一个多项式. 下面证明 f 至多只有有限多个零点.

记 $Q_d(z, f) = P_d(f)$. 由方程 (1.2) 得

$$nf^{n-1}(f')^2 + f^n f'' + P'_d(f) = (p'_1 + p_1 \alpha'_1) e^{\alpha_1(z)} + (p'_2 + p_2 \alpha'_2) e^{\alpha_2(z)}, \quad (3.1)$$

从方程 (1.2) 和 (3.1) 中消去 $e^{\alpha_2(z)}$ 得

$$(p'_2 + p_2 \alpha'_2) f^n f' + (p'_2 + p_2 \alpha'_2) P_d(f) - np_2 f^{n-1}(f')^2 - p_2 f^n f'' - p_2 P'_d(f) = A(z), \quad (3.2)$$

其中 $A(z) = [p_1(p'_2 + p_2 \alpha'_2) - p_2(p'_1 + p_1 \alpha'_1)] e^{\alpha_1(z)}$.

若 $A(z) \equiv 0$, 则

$$\alpha'_2 - \alpha'_1 = \frac{p'_1}{p_1} - \frac{p'_2}{p_2}. \quad (3.3)$$

从而, $\alpha'_2 - \alpha'_1 \equiv 0$ 且方程 (3.2) 变为

$$(p'_2 + p_2 \alpha'_2) f^n f' + (p'_2 + p_2 \alpha'_2) P_d(f) - np_2 f^{n-1}(f')^2 - p_2 f^n f'' - p_2 P'_d(f) = 0,$$

即 $\alpha_1 = \alpha_2 + C_1$, 其中 C_1 是一个常数,

$$\left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right) f^n f' - n f^{n-1}(f')^2 - f^n f'' = P'_d(f) - \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right) P_d(f). \quad (3.4)$$

下面分两种情形来考虑.

情形 1 $P'_d(f) - \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right) P_d(f) \equiv 0$. 此时, 方程 (3.4) 化为

$$\left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right) f f' - n(f')^2 - f f'' = 0. \quad (3.5)$$

假设 $f(z)$ 有无穷多个零点, 那么从 (3.5) 知, 可能除了 $f(z)$ 的有限多个零点外, $f(z)$ 的每个零点的重数至少是 2. 设 z_0 是 f 的一个 k 重零点, 且 z_0 不是 $\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2$ 的零点或极点, 那么, 在 z_0 的某个小邻域内, 有 $f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots$ ($a_k \neq 0, k \geq 2$). 通过计算方程 (3.5) 左边 $z - z_0$ 的最低次项的系数, 得

$$-n(ka_k)^2 - k(k-1)a_k^2 = 0,$$

由于 $n \geq 3$ 和 $k \geq 2$, 因此上式不可能成立. 矛盾导致 f 至多只有有限多个零点.

情形 2 $P'_d(f) - \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right) P_d(f) \neq 0$. 将方程 (3.4) 写成下列形式:

$$f^{n-1} \left(\left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right) f f' - n(f')^2 - f f'' \right) = P'_d(f) - \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right) P_d(f). \quad (3.6)$$

记

$$\left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right) f f' - n(f')^2 - f f'' = a(z), \quad (3.7)$$

显然, $a(z)$ 只有有限多个极点. 由于 $d \leq n-2 < n-1$, 由引理 3 得 $m(r, a(z)) = O(\log r)$, 从而, $a(z)$ 是一个有理函数.

若 $a(z) \equiv 0$, 则由对方程 (3.5) 的讨论知, f 至多只有有限多个零点. 若 $a(z) \neq 0$, 则对方程 (3.7) 的两边求导得

$$\left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right)' f f' + \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right) (f')^2 + \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right) f f'' - (2n+1) f' f'' - f f''' = a'(z). \quad (3.8)$$

由方程 (3.7) 和 (3.8) 得

$$A_1(z)ff' + A_2(z)ff'' + a(z)ff''' - B(z)(f')^2 + (2n+1)a(z)f'f'' = 0, \quad (3.9)$$

其中

$$A_1(z) = \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right)a'(z) - \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right)'a(z), \quad A_2(z) = -\left(a'(z) + \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right)a(z)\right),$$

$$B(z) = na'(z) + \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right)a(z).$$

将方程 (3.9) 写为

$$(A_1(z)f' + A_2(z)f'' + a(z)f''')f = (B(z)f' - (2n+1)a(z)f'')f'. \quad (3.10)$$

假设 z_0 是 f 的一个零点, 且 z_0 不是 $\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2$ 和 $a(z)$ 的零点或极点, 由方程 (3.7) 得

$$-nf'(z_0)^2 = a(z_0),$$

这意味着 $f'(z_0) \neq 0$, 从而, z_0 是 f 的一个简单零点. 进一步地, 由方程 (3.10) 知, z_0 是 $B(z)f' - (2n+1)a(z)f''$ 的一个零点. 记

$$\frac{B(z)f' - (2n+1)a(z)f''}{f} = h(z), \quad (3.11)$$

那么 $h(z)$ 只有有限多个极点. 根据引理 2 得 $m(r, h(z)) = O(\log r)$. 因此, $h(z)$ 是一个有理函数.

若 $h(z) \equiv 0$, 则

$$B(z)f' - (2n+1)a(z)f'' = 0 \quad (3.12)$$

和

$$A_1(z)f' + A_2(z)f'' + a(z)f''' = 0. \quad (3.13)$$

由方程 (3.12) 得

$$\frac{f''}{f'} = \frac{B(z)}{(2n+1)a(z)} = \frac{1}{2n+1} \left(n \cdot \frac{a'}{a} + \frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right), \quad (3.14)$$

因此,

$$f' = R_1(z)e^{\beta(z)}, \quad (3.15)$$

其中 $R_1(z) = Cp_2^{\frac{1}{2n+1}}a(z)^{\frac{n}{2n+1}}$, $\beta(z) = \frac{\alpha_2(z)}{2n+1}$. 对方程 (3.15) 的两边求导得

$$f'' = (R'_1 + R_1\beta')e^{\beta(z)}, \quad f''' = (R''_1 + 2R'_1\beta' + R_1\beta'' + R_1(\beta')^2)e^{\beta(z)}.$$

将 f' 、 f'' 和 f''' 代入方程 (3.13) 得

$$A_1(z)R_1 + A_2(z)(R'_1 + R_1\beta') + a(z)(R''_1 + 2R'_1\beta' + R_1\beta'' + R_1(\beta')^2) = 0. \quad (3.16)$$

从而,

$$\left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right)\frac{a'}{a} - \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right)' - \left(\frac{a'}{a} + \frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2\right)\left(\frac{R'_1}{R_1} + \frac{\alpha'_2}{2n+1}\right)$$

$$+ \frac{R_1''}{R_1} + \frac{2}{2n+1} \frac{R_1'}{R_1} \alpha_2' + \frac{\alpha_2''}{2n+1} + \frac{(\alpha_2')^2}{(2n+1)^2} = 0. \quad (3.17)$$

记 $\alpha_2(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ($a_m \neq 0, m \geq 1$), 其中 a_i ($i = 0, 1, \dots, m$) 是复数. 通过计算方程 (3.17) 左边最高次项在 ∞ 处的系数得

$$-\frac{(ma_m)^2}{2n+1} + \frac{(ma_m)^2}{(2n+1)^2} = 0,$$

从而 $n = 0$. 与 n 的假设矛盾. 因此, $h(z) \neq 0$.

由方程 (3.10) 和 (3.11) 得

$$B(z)f' - (2n+1)a(z)f'' = h(z)f \quad (3.18)$$

和

$$A_1(z)f' + A_2(z)f'' + a(z)f''' = h(z)f'. \quad (3.19)$$

通过对方程 (3.18) 的两边求导得

$$h'(z)f + (h(z) - B')f' + ((2n+1)a'(z) - B)f'' + (2n+1)a(z)f''' = 0. \quad (3.20)$$

由方程 (3.19) 和 (3.20) 得

$$h'f + (h - B' - (2n+1)(A_1 - h))f' + ((2n+1)a' - B - (2n+1)A_2)f'' = 0. \quad (3.21)$$

由 (3.18) 和 (3.21) 知,

$$A_3(z)f + A_4(z)f' = 0. \quad (3.22)$$

其中

$$\begin{aligned} A_3(z) &= (2n+1)a(z)h'(z) - h(z)((2n+1)a' - B - (2n+1)A_2(z)), \\ A_4(z) &= (2n+1)a(z)(h(z) - B' - (2n+1)(A_1(z) - h(z))) \\ &\quad + B(z)((2n+1)a'(z) - B - (2n+1)A_2(z)). \end{aligned}$$

下面证明 $A_3(z) \neq 0$. 事实上, 若 $A_3(z) \equiv 0$, 注意到 $A_2(z) = -(a'(z) + (\frac{p_2'}{p_2} + \alpha_2')a(z))$ 和 $B(z) = na'(z) + (\frac{p_2'}{p_2} + \alpha_2')a(z)$, 我们有

$$-2n\left(\alpha_2' + \frac{p_2'}{p_2}\right) - (3n+2)\frac{a'(z)}{a(z)} + (2n+1)\frac{h'(z)}{h(z)} \equiv 0. \quad (3.23)$$

记 $\alpha_2(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ($a_m \neq 0, m \geq 1$), 其中 a_i ($i = 0, 1, \dots, m$) 是复数. 方程 (3.23) 蕴含着 $-2nma_m = 0$, 从而 $n = 0$, 与 n 的假设矛盾.

同时, $A_4(z) \neq 0$, 否则 $f \equiv 0$. 由方程 (3.22) 知, $f(z)$ 至多只有有限多个零点.

下面考虑 $A(z) \neq 0$ 的情形. 为了方便计算, 记

$$A_5 = p_2' + p_2\alpha_2', \quad A_6 = p_1(p_2' + p_2\alpha_2') - p_2(p_1' + p_1\alpha_1') \neq 0.$$

此时方程 (3.2) 变为

$$A_5 f^n f' - np_2 f^{n-1} (f')^2 - p_2 f^n f'' + Q_d(f) = A_6 e^{\alpha_1(z)}, \quad (3.24)$$

其中 $Q_d(f) = (p'_2 + p_2\alpha'_2)P_d(f) - p_2P'_d(f)$ 是 f 的次数 $\leq n-2$ 且以有理函数为系数的微分多项式. 对方程 (3.24) 的两边求导得

$$\begin{aligned} & A'_5 f^n f' + n(A_5 - p'_2) f^{n-1} (f')^2 + (A_5 - p'_2) f^n f'' - n(n-1) p_2 f^{n-2} (f')^3 \\ & - 3np_2 f^{n-1} f' f'' - p_2 f^n f''' + Q'_d(f) = (A'_6 + A_6 \alpha'_1(z)) e^{\alpha_1(z)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

从方程 (3.24) 和 (3.25) 中消去 $e^{\alpha_1(z)}$ 得

$$\begin{aligned} & B_1 f^n f' - B_2 f^{n-1} (f')^2 - B_3 f^n f'' + n(n-1) p_2 A_6 f^{n-2} (f')^3 \\ & + 3np_2 A_6 f^{n-1} f' f'' + p_2 A_6 f^n f''' + R_d(f) = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

其中

$$\begin{aligned} B_1(z) &= A_5(A'_6 + A_6 \alpha'_1(z)) - A_6 A'_5, \\ B_2(z) &= np_2(A'_6 + A_6 \alpha'_1(z)) + n(A_5 - p'_2)A_6, \\ B_3(z) &= p_2(A'_6 + A_6 \alpha'_1(z)) + (A_5 - p'_2)A_6 \end{aligned}$$

是有理函数, $R_d(f) = (A'_6 + A_6 \alpha'_1(z))Q_d(f) - A_6 Q'_d(f)$ 是次数 $\leq n-2$ 的微分多项式.

由方程 (3.26) 得

$$f^{n-2}(B_1 f^2 f' - B_2 f (f')^2 - B_3 f^2 f'' + n(n-1) p_2 A_6 (f')^3 + 3np_2 A_6 f f' f'' + p_2 A_6 f^2 f''') = -R_d(f). \quad (3.27)$$

记

$$B_1 f^2 f' - B_2 f (f')^2 - B_3 f^2 f'' + n(n-1) p_2 A_6 (f')^3 + 3np_2 A_6 f f' f'' + p_2 A_6 f^2 f''' = R(z). \quad (3.28)$$

由引理 3 得 $R(z)$ 是一个有理函数.

首先假定 $R(z) \equiv 0$. 假设 $f(z)$ 有无穷多个零点, 那么由方程 (3.28) 知, 可能除了 $f(z)$ 的有限多个零点外, $f(z)$ 的每个零点的重数至少是 2. 记 z_0 是 f 的一个 k 重零点, 且 z_0 不是 B_1 、 B_2 、 B_3 和 $p_2 A_6$ 的零点或极点, 则在 z_0 的某个小邻域内有 $f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots$ ($a_k \neq 0$, $k \geq 2$). 通过计算方程 (3.28) 左边 $z - z_0$ 的最低次项的系数得

$$n(n-1)(ka_k)^3 + 3nk^2(k-1)a_k^3 + k(k-1)(k-2)a_k^3 = 0,$$

从而,

$$n(n-1)k^2 + 3nk(k-1) + (k-1)(k-2) = 0,$$

由于 $n \geq 3$ 和 $k \geq 2$, 所以上式不可能成立. 因此, f 至多只有有限多个零点.

下面假定 $R(z) \not\equiv 0$. 通过对方程 (3.28) 的两边求导得

$$\begin{aligned} & B'_1 f^2 f' + (2B_1 - B'_2) f (f')^2 + (B_1 - B'_3) f^2 f'' + (n(n-1)(p_2 A_6)' - B_2) (f')^3 \\ & + (3n(p_2 A_6)' - 2B_2 - 2B_3) f f' f'' + ((p_2 A_6)' - B_3) f^2 f''' + 3n^2 p_2 A_6 (f')^2 f'' \\ & + 3np_2 A_6 f (f'')^2 + (3n+2) p_2 A_6 f f' f''' + p_2 A_6 f^2 f^{(4)} = R'(z). \end{aligned} \quad (3.29)$$

由方程 (3.28) 和 (3.29) 得

$$\begin{aligned} & (B_1 R' - B_1' R) f^2 f' - (B_2 R' + (2B_1 - B_2') R) f (f')^2 - (B_3 R' + (B_1 - B_3') R) f^2 f'' \\ & + (n(n-1)p_2 A_6 R' - n(n-1)(p_2 A_6)' R + B_2 R) (f')^3 - (3n+2)p_2 A_6 R f f' f''' \\ & + (p_2 A_6 R' - ((p_2 A_6)' - B_3) R) f^2 f''' - 3n^2 p_2 A_6 R (f')^2 f'' - 3n p_2 A_6 R f (f'')^2 \\ & + (3n p_2 A_6 R' - (3n(p_2 A_6)' - 2B_2 - 2B_3) R) f f' f'' - p_2 A_6 R f^2 f^{(4)} = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

设 $f(z)$ 有无穷多个零点, z_0 是 $f(z)$ 的一个零点且 z_0 不是方程 (3.28) 和 (3.30) 系数的零点或极点, 那么, 由方程 (3.28) 知, z_0 是 $f(z)$ 的一个简单零点. 由方程 (3.30) 可知, z_0 是 $3n^2 p_2 A_6 R f'' - (n(n-1)p_2 A_6 R' - n(n-1)(p_2 A_6)' R + B_2 R) f'$ 的一个零点. 记

$$b(z) = \frac{3n^2 p_2 A_6 R f'' - (n(n-1)p_2 A_6 R' - n(n-1)(p_2 A_6)' R + B_2 R) f'}{p_2 A_6 R f}, \quad (3.31)$$

那么 $b(z)$ 只有有限多个极点. 由引理 2 知, $m(r, b(z)) = O(\log r)$. 因此, $b(z)$ 是一个有理函数.

若 $b(z) \equiv 0$, 则

$$\frac{f''}{f'} = \frac{n(n-1)p_2 A_6 R' - n(n-1)(p_2 A_6)' R + B_2 R}{3n^2 p_2 A_6 R} = \frac{n-1}{3n} \frac{R'}{R} - \frac{n-1}{3n} \frac{A_6'}{A_6} - \frac{n-1}{3n} \frac{p_2'}{p_2} + \frac{1}{3n^2} \frac{B_2}{p_2 A_6}.$$

注意到

$$B_2(z) = n p_2 (A_6' + A_6 \alpha_1') + n p_2 \alpha_2' A_6,$$

从而有

$$\frac{f''}{f'} = \frac{n-1}{3n} \frac{R'}{R} - \frac{n-2}{3n} \frac{A_6'}{A_6} - \frac{n-1}{3n} \frac{p_2'}{p_2} + \frac{1}{3n} (\alpha_1' + \alpha_2').$$

解上述方程得

$$f'(z) = m(z) e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{3n}},$$

其中 $m(z) = (\frac{C R^{n-1}}{p_2^{n-1} A_6^{n-2}})^{\frac{1}{3n}}$ 是一个有理函数.

由方程 (3.30) 和 $b(z) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned} & (B_1 R' - B_1' R) f f' - (B_2 R' + (2B_1 - B_2') R) (f')^2 - (B_3 R' + (B_1 - B_3') R) f f'' \\ & + (3n p_2 A_6 R' - (3n(p_2 A_6)' - 2B_2 - 2B_3) R) f' f'' + (p_2 A_6 R' - ((p_2 A_6)' - B_3) R) f f''' \\ & - 3n p_2 A_6 R (f'')^2 - (3n+2) p_2 A_6 R f' f''' - p_2 A_6 R f f^{(4)} = 0. \end{aligned}$$

根据 f' 的表达式计算出 f'' 、 f''' 和 $f^{(4)}$, 并将 f' 、 f'' 、 f''' 和 $f^{(4)}$ 代入上列方程得

$$s(z) f + t(z) e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{3n}} = 0, \quad (3.32)$$

其中

$$\begin{aligned} s(z) = & (B_1 R' - B_1' R) m(z) - (B_3 R' + (B_1 - B_3') R) \left(m'(z) + \frac{1}{3n} m(z) (\alpha_1' + \alpha_2') \right) \\ & + (p_2 A_6 R' - ((p_2 A_6)' - B_3) R) \left(m''(z) + \frac{1}{3n} m(z) (\alpha_1'' + \alpha_2'') + \frac{2}{3n} m'(z) (\alpha_1' + \alpha_2') \right) \\ & + \frac{1}{9n^2} m(z) (\alpha_1' + \alpha_2')^2 \Big) - p_2 A_6 R \left(m'''(z) + \frac{1}{n} m'(z) (\alpha_1'' + \alpha_2'') + \frac{1}{3n} m(z) (\alpha_1''' + \alpha_2''') \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{n} m''(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2) + \frac{1}{3n^2} m'(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2)^2 + \frac{1}{3n^2} m(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2)(\alpha''_1 + \alpha''_2) \\
 & + \frac{1}{27n^3} m(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2)^3 \Big), \\
 t(z) = & -(B_2 R' + (2B_1 - B'_2)R)m^2(z) - 3np_2 A_6 R \left(m'(z) + \frac{1}{3n} m(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2) \right)^2 \\
 & + (3np_2 A_6 R' - (3n(p_2 A_6)' - 2B_2 - 2B_3)R)m(z) \left(m'(z) + \frac{1}{3n} m(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2) \right) \\
 & - (3n + 2)p_2 A_6 R m(z) \left(m''(z) + \frac{1}{3n} m(z)(\alpha''_1 + \alpha''_2) + \frac{2}{3n} m'(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{9n^2} m(z)(\alpha'_1 + \alpha'_2)^2 \right).
 \end{aligned}$$

下面证明 $s(z) \equiv 0$ 和 $t(z) \equiv 0$ 不能同时成立. 假设结论不成立. 由 $s(z) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned}
 \frac{s(z)}{m(z)p_2 A_6 R} = & \frac{B_1}{p_2 A_6} \frac{R'}{R} - \frac{B'_1}{p_2 A_6} - \left(\frac{B_3}{p_2 A_6} \frac{R'}{R} + \frac{B_1}{p_2 A_6} - \frac{B'_3}{p_2 A_6} \right) \left(\frac{m'(z)}{m(z)} + \frac{1}{3n} (\alpha'_1 + \alpha'_2) \right) + \left(\frac{R'}{R} \right. \\
 & - \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} + \frac{B_3}{p_2 A_6} \Big) \left(\frac{m''(z)}{m(z)} + \frac{1}{3n} (\alpha''_1 + \alpha''_2) + \frac{2}{3n} \frac{m'(z)}{m(z)} (\alpha'_1 + \alpha'_2) + \frac{1}{9n^2} (\alpha'_1 + \alpha'_2)^2 \right) \\
 & - \left(\frac{m'''(z)}{m(z)} + \frac{1}{n} \frac{m'(z)}{m(z)} (\alpha''_1 + \alpha''_2) + \frac{1}{3n} (\alpha'''_1 + \alpha'''_2) + \frac{1}{n} \frac{m''(z)}{m(z)} (\alpha'_1 + \alpha'_2) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3n^2} \frac{m'(z)}{m(z)} (\alpha'_1 + \alpha'_2)^2 + \frac{1}{3n^2} (\alpha'_1 + \alpha'_2)(\alpha''_1 + \alpha''_2) + \frac{1}{27n^3} (\alpha'_1 + \alpha'_2)^3 \right) \\
 \equiv & 0,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

类似地, 由 $t(z) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned}
 \frac{t(z)}{m^2(z)p_2 A_6 R} = & -\frac{B_2}{p_2 A_6} \frac{R'}{R} - \frac{2B_1}{p_2 A_6} + \frac{B'_2}{p_2 A_6} - 3n \left(\frac{m'(z)}{m(z)} + \frac{1}{3n} (\alpha'_1 + \alpha'_2) \right)^2 \\
 & + \left(3n \frac{R'}{R} - 3n \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} + \frac{2B_2}{p_2 A_6} + \frac{2B_3}{p_2 A_6} \right) \left(\frac{m'(z)}{m(z)} + \frac{1}{3n} (\alpha'_1 + \alpha'_2) \right) \\
 & - (3n + 2) \left(\frac{m''(z)}{m(z)} + \frac{1}{3n} (\alpha''_1 + \alpha''_2) + \frac{2}{3n} \frac{m'(z)}{m(z)} (\alpha'_1 + \alpha'_2) + \frac{1}{9n^2} (\alpha'_1 + \alpha'_2)^2 \right) \\
 \equiv & 0,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \frac{B_1}{p_2 A_6} &= \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right) \left(\frac{A'_6}{A_6} - \frac{A'_5}{A_5} + \alpha'_1 \right), \\
 \frac{B_2}{p_2 A_6} &= n(\alpha'_1 + \alpha'_2) + n \frac{A'_6}{A_6}, \quad \frac{B_3}{p_2 A_6} = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \frac{A'_6}{A_6}, \\
 \frac{B'_1}{p_2 A_6} &= \left(\frac{p'_2}{p_2} + \alpha'_2 \right) \left(\frac{A''_6}{A_6} + \frac{A'_6}{A_6} \alpha'_1 + \frac{A'_5}{A_5} \alpha'_1 - \frac{A''_5}{A_5} + \alpha''_1 \right), \\
 \frac{B'_2}{p_2 A_6} &= n \left(\frac{p'_2}{p_2} \frac{A'_6}{A_6} + \frac{A''_6}{A_6} + \left(\frac{A'_6}{A_6} + \frac{p'_2}{p_2} \right) (\alpha'_1 + \alpha'_2) + \alpha''_1 + \alpha''_2 \right), \\
 \frac{B'_3}{p_2 A_6} &= \frac{p'_2}{p_2} \frac{A'_6}{A_6} + \frac{A''_6}{A_6} + \left(\frac{A'_6}{A_6} + \frac{p'_2}{p_2} \right) (\alpha'_1 + \alpha'_2) + \alpha''_1 + \alpha''_2.
 \end{aligned}$$

由方程 (3.33) 和 (3.34) 知, 最高次项可能出现在

$$-\frac{1}{3n}\alpha'_1\alpha'_2(\alpha'_1+\alpha'_2)+\frac{1}{9n^2}(\alpha'_1+\alpha'_2)^3-\frac{1}{27n^3}(\alpha'_1+\alpha'_2)^3=-\frac{1}{3n}\alpha'_1\alpha'_2(\alpha'_1+\alpha'_2)+\frac{3n-1}{27n^3}(\alpha'_1+\alpha'_2)^3 \quad (3.35)$$

和

$$-2\alpha'_1\alpha'_2-\frac{1}{3n}(\alpha'_1+\alpha'_2)^2+\frac{2(n+1)}{3n}(\alpha'_1+\alpha'_2)^2-\frac{3n+2}{9n^2}(\alpha'_1+\alpha'_2)^2=-2\alpha'_1\alpha'_2+\frac{6n^2-2}{9n^2}(\alpha'_1+\alpha'_2)^2. \quad (3.36)$$

记 $\alpha_1(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_0$, $\alpha_2(z) = b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \cdots + b_0$, 其中 a_i ($i = 0, 1, \dots, p$) 和 b_j ($j = 0, 1, \dots, q$) 是复数, $a_p b_q \neq 0$ 且 $p \geq 1, q \geq 1$.

若 $p \neq q$, 不失一般性, 假定 $p > q$. 由 $t(z) \equiv 0$ 和 (3.36) 得 $\frac{6n^2-2}{9n^2}p^2 a_p^2 = 0$, 从而 $n^2 = \frac{1}{3}$, 与 n 的假设矛盾. 下面假设 $p = q$. 若 $a_p + b_p = 0$, 则由 $t(z) \equiv 0$ 和 (3.36) 得 $a_p b_p = 0$, 与 $a_p b_p \neq 0$ 矛盾. 若 $a_p + b_p \neq 0$, 则由 $s(z) \equiv 0, t(z) \equiv 0$, (3.35) 和 (3.36) 得 $-\frac{1}{3n}a_p b_p + \frac{3n-1}{27n^3}(a_p + b_p)^2 = 0$ 和 $-2a_p b_p + \frac{6n^2-2}{9n^2}(a_p + b_p)^2 = 0$, 从而有 $\frac{2(3n-1)}{27n^3} = \frac{1}{3n} \frac{6n^2-2}{9n^2}$. 故 $n = 0$ 或 $n = 1$, 与假设 $n \geq 3$ 矛盾.

因此, $s(z) \equiv 0$ 和 $t(z) \equiv 0$ 不能同时成立. 若 $s(z) \equiv 0$, 则由 (3.46) 知, $t(z) \equiv 0$, 矛盾. 从而, $s(z) \not\equiv 0$ 且 $t(z) \not\equiv 0$, 否则 $f(z) \equiv 0$. 因此, $f(z) = -\frac{t(z)}{s(z)}e^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{3n}}$. 这是我们需要形式. 下面假定 $b(z) \not\equiv 0$.

由方程 (3.30) 和 (3.31) 得

$$\begin{aligned} & (B_1 R' - B'_1 R) f f' - (B_2 R' + (2B_1 - B'_2) R)(f')^2 - (B_3 R' + (B_1 - B'_3) R) f f'' \\ & + (3n p_2 A_6 R' - (3n(p_2 A_6)' - 2B_2 - 2B_3) R) f' f'' + (p_2 A_6 R' - ((p_2 A_6)' - B_3) R) f f''' \\ & - 3n p_2 A_6 R (f'')^2 - (3n + 2) p_2 A_6 R f' f''' - p_2 A_6 R f f^{(4)} = b(z) p_2 A_6 R (f')^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

和

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{n(n-1)p_2 A_6 R' - n(n-1)(p_2 A_6)' R + B_2 R}{3n^2 p_2 A_6 R} f' + \frac{p_2 A_6 R b(z)}{3n^2 p_2 A_6 R} f \\ &= \left(\frac{n-1}{3n} \frac{R'}{R} - \frac{n-1}{3n} \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} + \frac{1}{3n^2} \frac{B_2}{p_2 A_6} \right) f' + \frac{1}{3n^2} b(z) f \\ &= \left(\frac{n-1}{3n} \frac{R'}{R} - \frac{n-1}{3n} \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} + \frac{1}{3n} \frac{A'_6}{A_6} + \frac{1}{3n} (\alpha'_1 + \alpha'_2) \right) f' + \frac{1}{3n^2} b(z) f. \end{aligned} \quad (3.38)$$

记 $\varphi(z) = \frac{n-1}{3n} \frac{R'}{R} - \frac{n-1}{3n} \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} + \frac{1}{3n} \frac{A'_6}{A_6} + \frac{1}{3n} (\alpha'_1 + \alpha'_2)$, 则

$$\begin{aligned} f'' &= \varphi(z) f' + \frac{1}{3n^2} b(z) f, \quad f''' = \left(\varphi^2(z) + \varphi'(z) + \frac{1}{3n^2} b(z) \right) f' + \frac{1}{3n^2} (\varphi(z) b(z) + b'(z)) f, \\ f^{(4)} &= \left(\varphi^3 + 3\varphi\varphi' + \varphi'' + \frac{2}{3n^2} \varphi b + \frac{2}{3n^2} b' \right) f' + \left(\frac{1}{3n^2} \varphi^2 b + \frac{2}{3n^2} \varphi' b + \frac{1}{9n^4} b^2 + \frac{1}{3n^2} \varphi b' + \frac{1}{3n^2} b'' \right) f. \end{aligned}$$

将 f'', f''' 和 $f^{(4)}$ 代入方程 (3.37) 得

$$\mu_1(z) f^2 + \mu_2(z) f f' + \mu_3(z) (f')^2 = 0, \quad (3.39)$$

其中

$$\mu_1(z) = \frac{1}{3n^2} (\varphi b + b') (p_2 A_6 R' - ((p_2 A_6)' - B_3) R) - \frac{1}{3n^2} b (B_3 R' + (B_1 - B'_3) R)$$

$$\begin{aligned}
& -p_2 A_6 R \left(\frac{1}{3n^2} \varphi^2 b + \frac{2}{3n^2} \varphi' b + \frac{1}{3n^2} \varphi b' + \frac{1}{3n^2} b'' + \frac{3n+1}{9n^4} b^2 \right), \\
\mu_2(z) &= B_1 R' - B_1' R - \varphi B_3 R' - \varphi (B_1 - B_3') R + \frac{1}{n} p_2 A_6 R' b - \frac{1}{n} (p_2 A_6)' R b \\
&+ \frac{2}{3n^2} (B_2 + B_3) R b + (p_2 A_6 R' - ((p_2 A_6)' - B_3) R) \left(\varphi^2 + \varphi' + \frac{1}{3n^2} b \right) \\
&- p_2 A_6 R \left(\varphi^3 + 3\varphi \varphi' + \varphi'' + \frac{9n+4}{3n^2} \varphi b + \frac{3n+4}{3n^2} b' \right), \\
\mu_3(z) &= 3np_2 A_6 R' \varphi - (3n(p_2 A_6)' - 2B_2 - 2B_3) R \varphi - (B_2 R' + (2B_1 - B_2') R) \\
&- p_2 A_6 R b - (3n+2) p_2 A_6 R \left(\varphi^2 + \varphi' + \frac{1}{3n^2} b \right) - 3np_2 A_6 R \varphi^2
\end{aligned}$$

是有理函数.

假定 $\mu_1(z) \equiv 0$, $\mu_2(z) \equiv 0$ 和 $\mu_3(z) \equiv 0$ 同时成立. 由 $\mu_1(z) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3n^2} \left(\varphi + \frac{b'}{b} \right) \left(\frac{R'}{R} - \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} + \frac{B_3}{p_2 A_6} \right) - \frac{1}{3n^2} \left(\frac{B_3}{p_2 A_6} \frac{R'}{R} + \frac{B_1}{p_2 A_6} - \frac{B_3'}{p_2 A_6} \right) \\
& - \left(\frac{1}{3n^2} \varphi^2 + \frac{2}{3n^2} \varphi' + \frac{1}{3n^2} \varphi \frac{b'}{b} + \frac{1}{3n^2} \frac{b''}{b} + \frac{3n+1}{9n^4} b \right) \equiv 0.
\end{aligned} \quad (3.40)$$

由 $\mu_2(z) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned}
& \frac{B_1}{p_2 A_6} \frac{R'}{R} - \frac{B_1'}{p_2 A_6} - \varphi \frac{B_3}{p_2 A_6} \frac{R'}{R} - \varphi \frac{B_1 - B_3'}{p_2 A_6} + \frac{1}{n} \frac{R'}{R} b - \frac{1}{n} \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} b + \frac{2}{3n^2} \frac{B_2 + B_3}{p_2 A_6} b + \left(\frac{R'}{R} \right. \\
& \left. - \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} + \frac{B_3}{p_2 A_6} \right) \left(\varphi^2 + \varphi' + \frac{1}{3n^2} b \right) - \left(\varphi^3 + 3\varphi \varphi' + \varphi'' + \frac{9n+4}{3n^2} \varphi b + \frac{3n+4}{3n^2} b' \right) \equiv 0.
\end{aligned} \quad (3.41)$$

由 $\mu_3(z) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned}
& 3n \frac{R'}{R} \varphi - \left(3n \frac{(p_2 A_6)'}{p_2 A_6} - \frac{2B_2}{p_2 A_6} - \frac{2B_3}{p_2 A_6} \right) \varphi - \left(\frac{B_2}{p_2 A_6} \frac{R'}{R} + \frac{2B_1}{p_2 A_6} - \frac{B_2'}{p_2 A_6} \right) \\
& - b - (3n+2) \left(\varphi^2 + \varphi' + \frac{1}{3n^2} b \right) - 3n \varphi^2 \equiv 0.
\end{aligned} \quad (3.42)$$

注意 φ 、 $\frac{B_1}{p_2 A_6}$ 、 $\frac{B_2}{p_2 A_6}$ 、 $\frac{B_3}{p_2 A_6}$ 、 $\frac{B_1'}{p_2 A_6}$ 、 $\frac{B_2'}{p_2 A_6}$ 和 $\frac{B_3'}{p_2 A_6}$ 的表达式, 方程 (3.40)–(3.42) 左边的最高次项分别出现在

$$\frac{3n-1}{27n^4} (\alpha_1' + \alpha_2')^2 - \frac{1}{3n^2} \alpha_1' \alpha_2' - \frac{3n+1}{9n^4} b, \quad (3.43)$$

$$\frac{3n-1}{27n^3} (\alpha_1' + \alpha_2')^3 - \frac{1}{3n} \alpha_1' \alpha_2' (\alpha_1' + \alpha_2') + \frac{6n^2-4}{9n^3} (\alpha_1' + \alpha_2') b, \quad (3.44)$$

$$\frac{6n^2-2}{9n^2} (\alpha_1' + \alpha_2')^2 - 2\alpha_1' \alpha_2' - \frac{3n^2+3n+2}{3n^2} b. \quad (3.45)$$

记 $\alpha_1(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_0$, $\alpha_2(z) = b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \cdots + b_0$, 其中 a_i ($i = 0, 1, \dots, p$) 和 b_j ($j = 0, 1, \dots, q$) 是复数, $a_p b_q \neq 0$ 且 $p \geq 1$, $q \geq 1$.

若 $p \neq q$, 不失一般性, 假定 $p > q$. 显然, $\deg_\infty b \leq 2p-2$, 否则从 (3.43) 立即可以得到矛盾. 若 $\deg_\infty b < 2p-2$, 则由 (3.43) 知 $\frac{3n-1}{27n^4} = 0$. 故 $n = \frac{1}{3}$, 与 n 的假设矛盾. 若 $\deg_\infty b = 2p-2$, 则由 (3.43) 和 (3.45) 得

$$\frac{\frac{3n-1}{27n^4}}{\frac{6n^2-2}{9n^2}} = \frac{\frac{3n+1}{9n^4}}{\frac{3n^2+3n+2}{3n^2}},$$

解上列方程得 $n = \pm 1$, 与 n 的假设矛盾. 下面假设 $p = q$.

若 $\deg_{\infty} b > 2p - 2$, 则由 $\mu_1(z) \equiv 0$ 和 (3.43) 得 $-\frac{3n+1}{9n^4} = 0$, 从而 $n = -\frac{1}{3}$, 与 n 的假设矛盾. 因此, 假定 $\deg_{\infty} b \leq 2p - 2$.

若 $a_p + b_p = 0$ 且 $\deg_{\infty} b < 2p - 2$, 则由 $\mu_1(z) \equiv 0$ 和 (3.43) 得 $-\frac{1}{3n^2}p^2a_pb_p = 0$, 与 n 的假设矛盾. 若 $a_p + b_p = 0$ 且 $\deg_{\infty} b = 2p - 2$, 则由 $\mu_1(z) \equiv 0$ 、 $\mu_3(z) \equiv 0$ 、(3.43) 和 (3.45) 得 $\frac{2(3n+1)}{9n^4} = \frac{3n^2+3n+2}{9n^4}$, 因此, $n = 1$, 与 n 的假设矛盾.

若 $a_p + b_p \neq 0$ 且 $\deg_{\infty} b < 2p - 2$, 则由 $\mu_1(z) \equiv 0$ 、 $\mu_3(z) \equiv 0$ 、(3.43) 和 (3.45) 得 $\frac{2(3n-1)}{27n^4} = \frac{6n^2-2}{27n^4}$, 因此, $n = 1$, 这与 $n \geq 3$ 的假设矛盾. 若 $a_p + b_p \neq 0$ 且 $\deg_{\infty} b = 2p - 2$, 则由 (3.43)、(3.44)、 $\mu_1(z) \equiv 0$ 和 $\mu_2(z) \equiv 0$ 得 $-\frac{3n+1}{9n^4} = \frac{6n^2-4}{9n^4}$, 从而, $n = \frac{1}{2}$ 或 $n = -1$, 与 n 的假设矛盾. 因此, $\mu_1(z) \equiv 0$, $\mu_2(z) \equiv 0$ 和 $\mu_3(z) \equiv 0$ 不能同时成立.

若 $\mu_3(z) \neq 0$, 则方程 (3.39) 可写为

$$\mu_3(z)(f')^2 = -\mu_1(z)f^2 - \mu_2(z)ff'. \quad (3.46)$$

假设 $f(z)$ 有无穷多个零点, 那么可能除了 $f(z)$ 的有限多个零点外, $f(z)$ 的每个零点的重数至少是 2. 设 z_0 是 f 的一个重数为 k 的零点, 且 z_0 不是 $\mu_1(z)$ 、 $\mu_2(z)$ 和 $\mu_3(z)$ 的零点或极点, 则 z_0 是方程 (3.46) 左边的 $2k - 2$ 重零点, 是方程 (3.46) 右边的至少 $2k - 1$ 重零点. 矛盾导致 f 至多只有有限多个零点.

若 $\mu_3(z) \equiv 0$, 则 $\mu_1(z) \neq 0$ 且 $\mu_2(z) \neq 0$, 从而, 方程 (3.39) 可简化为下列形式:

$$\mu_1(z)f = -\mu_2(z)f',$$

根据前面类似的讨论, f 至多只有有限多个零点.

因此, $f(z) = q(z)e^{P(z)}$, 其中 $q(z)$ 是一个有理函数, $P(z)$ 是一个多项式. 将 $f(z) = q(z)e^{P(z)}$ 代入方程 (1.2) 得

$$q(z)^n(q'(z) + q(z)p'(z))e^{(n+1)P(z)} + \sum_{k=0}^d a_k(z)e^{kP(z)} = p_1(z)e^{\alpha_1(z)} + p_2(z)e^{\alpha_2(z)},$$

其中 $a_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, d$) 是有理函数. 若 $\alpha'_1(z) \equiv \alpha'_2(z)$, 则 $\alpha_2(z) = \alpha_1(z) + C_1$. 由引理 4 得, 对所有的 k ($0 \leq k \leq d$) 有 $a_k(z) \equiv 0$, $q(z)^n(q'(z) + q(z)P'(z)) = p_1 + p_2e^{C_1}$, $(n+1)P(z) = \alpha_1(z) + C_2$, 其中 C_1 和 C_2 是常数. 若 $\alpha'_1(z) \neq \alpha'_2(z)$, 由引理 4 得, 对某个 k ($1 \leq k \leq d$) 有 $a_k(z) \neq 0$, 且当 $j \neq k$ ($0 \leq j \leq d$) 时, 有 $a_j(z) \equiv 0$. 进一步地, 或者 $q(z)^n(q'(z) + q(z)P'(z)) = D_1p_1(z)$, $(n+1)P(z) = \alpha_1(z) + C_3$, $kP(z) = \alpha_2(z) + C_4$, 或者 $q(z)^n(q'(z) + q(z)P'(z)) = D_2p_2(z)$, $(n+1)P(z) = \alpha_2(z) + C_4$, $kP(z) = \alpha_1(z) + C_3$, 其中 D_1 、 D_2 、 C_3 和 C_4 是常数, $D_1e^{C_3} = D_2e^{C_4} = 1$. 因此, $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{n+1}{k}$ 或 $\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \frac{k}{n+1}$.

致谢 感谢审稿人对本文提出的有价值的建议.

参考文献

- 1 Hayman W K. Meromorphic Functions. Oxford: Clarendon Press, 1964
- 2 Laine I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1993
- 3 Li P, Yang C C. On the nonexistence of entire solutions of certain type of nonlinear differential equations. J Math Anal Appl, 2006, 320: 827–835
- 4 Li P. Entire solutions of certain type of differential equations, II. J Math Anal Appl, 2011, 375: 310–319

- 5 Liao L W, Yang C C, Zhang J J. On meromorphic solutions of certain type of non-linear differential equations. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2013, 38: 581–593
- 6 Liao L W. The new developments in the research of nonlinear complex differential equations. *J Jiangxi Norm Univ Nat Sci*, 2015, 39: 331–339
- 7 Liao L W. On solutions to nonhomogeneous algebraic differential equations and their application. *J Aust Math Soc*, 2014, 97: 391–403
- 8 Zhang J J, Liao L W. Admissible meromorphic solutions of algebraic differential equations. *J Math Anal Appl*, 2013, 397: 225–232
- 9 Yang C C, Yi H X. *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*. Beijing: Science Press; Kluwer Academic Publishers, 2003
- 10 Clunie J. On integral and meromorphic functions. *J Lond Math Soc (2)*, 1962, 37: 17–27
- 11 Gross F. *Factorization of meromorphic functions*. Washington: U.S. Government Printing Office, 1972

Meromorphic solutions of nonlinear complex differential equations

ZHANG JianJun, XU XinPing & LIAO LiangWen

Abstract In this paper, we consider the transcendental meromorphic solutions of nonlinear differential equation of the form

$$f^n f' + Q_d(z, f) = p_1(z)e^{\alpha_1(z)} + p_2(z)e^{\alpha_2(z)},$$

where $n \geq 3$ is an integer, $Q_d(z, f)$ is a differential polynomial in f of degree $d \leq n - 2$ with rational functions as its coefficients, p_1, p_2 are nonzero rational functions and α_1, α_2 are nonconstant polynomials. More precisely, we show that the conditions concerning $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ will ensure the existence of the possible meromorphic solutions of the above equation. These results extend and improve some known results obtained most recently.

Keywords complex differential equations, meromorphic solutions, poles

MSC(2010) 34A34, 30D35

doi: 10.1360/SCM-2016-0159