一类刚性大系统实时数值仿真的组合算法

刘德贵 陈丽容

(航天工业总公司二院计算机应用与仿真技术研究所, 北京 100854)

摘要 提出一类实时仿真 RK-Rosenbrock 组合方法, 给出了这类组合方法的构造、收敛性和数值稳定性分析. 理论分析和仿真试验表明这类算法是有效的和实用的.

关键词 刚性大系统 实时仿真 组合算法

在实时仿真中常常将系统的一部分用数学模型来代替, 例如飞行器控制实时仿真、弹载计算机的实时仿真等. 为了实现这种类型的仿真, 必须按照实际的物理系统运行的时序要求完成数值仿真过程的每一个步骤^[1]. 因此需要提供快速算法给计算机以满足快速响应的需求, 并且要求该算法具有所用的信息与实时采样输入相匹配的特点. 本文针对分解的刚性大系统数值仿真, 提出一类实时 RK-Rosenbrock 组合方法 RTCRKR. 分别应用 Rosenbrock 方法和显式 RK 方法求解刚性和非刚性子系统. 讨论了这类组合方法的构造、收敛性和数值稳定性. 数值仿真试验表明这类算法是有效的.

1 实时 RK-Rosenbrock 组合方法 RTCRKR

考虑刚性大系统

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u), \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^{n_s + n_N}, \quad (1)$$

其中 $u(t)$ 是通过采样得到的输入量. 将系统(1)根据不同的变化速率分解成如下形式的 2 个自治子系统^[2~5]

$$y'_S(t) = f_S(y_S(t), y_N(t), u(t)), \quad y_S(t_0) = y_{S0}, \quad y_S \in \mathbb{R}^{n_S}, \quad (2)$$

$$y'_N(t) = f_N(y_S(t), y_N(t)), \quad y_N(t_0) = y_{N0}, \quad y_N \in \mathbb{R}^{n_N}, \quad (3)$$

其中组(2)为刚性子系统, 并包含实时输入量 $u(t)$, 组(3)为非刚性子系统.

我们应用 Rosenbrock 方法求解子系统(2), 而应用显式 Runge-Kutta(RK)方法求解子系统(3), 右函数求值时用到另一个子系统的值时通过插值得到. 构造如下形式的一类 RTCRKR 方法

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{S_{n+1}} = y_{S_n} + \sum_{i=1}^s c_i l_i, \\ (I - h \gamma J) l_i = h f_S \left| y_{S_n} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} l_j, \hat{y}_N(t_n + \alpha_i h), u_{ni} \right| + h J \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} l_j, \\ y_{N_{n+1}} = y_{N_n} + \sum_{i=1}^s c_i k_i, \\ k_i = h f_N \left| \hat{y}_S(t_n + \alpha_i h), y_{N_n} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j \right|, \end{array} \right. \quad (4)$$

其中 I 为 $n_S \times n_S$ 单位矩阵, $J = \frac{\partial f_S}{\partial y_S}(y_{S_n}, y_{N_n}, u_n)$, $u_{ni} = u(t_n + \alpha_i h)$, $u_n = u(t_n)$, $\hat{y}_S(t)$ 和

$\hat{y}_N(t)$ 分别为 $y_S(t)$ 和 $y_N(t)$ 的 p 阶插值函数, 且满足 Lipschitz 条件

$$\begin{aligned}\|\hat{y}_S(t') - \hat{y}_S(t'')\| &\leq L_S \|t' - t''\|, \\ \|\hat{y}_N(t') - \hat{y}_N(t'')\| &\leq L_N \|t' - t''\|.\end{aligned}\quad (5)$$

记

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= 0, \quad j \geq i; \quad \gamma_{ij} = 0, \quad j > i, \\ \beta'_{ij} &= \alpha_{ij} + \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ii} = \gamma, \\ \beta_{ij} &= \begin{cases} \beta'_{ij}, & i > j, \\ 0, & i \leq j, \end{cases}\end{aligned}\quad (6)$$

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} < 1, \quad \beta'_i = \sum_{j=1}^s \beta'_{ij}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij}.$$

使用传统的 s 级 Rosenbrock 方法求解刚性系统(2), (3)时每积分一步需要 s 次右函数求值, 解一个 $n_S + n_N$ 维的线性代数方程组, 其中 LU 分解与回代的计算工作量为 $O((n_S + n_N)^3 + (n_S + n_N)^2)$ 和一次 $n_S + n_N$ 维 Jacobi 矩阵计算. 当使用上述的 RTCRKR 方法时, 则将 LU 分解和回代的计算工作量从 $O((n_S + n_N)^3 + (n_S + n_N)^2)$ 减为 $O(n_S^3 + n_N^2)$, 并且 Jacobi 矩阵计算从 $n_S + n_N$ 维减为 n_S 维. 通常 $n_S \ll n_N$, 所以 RTCRKR 方法可获得较大的加速.

2 RTCRKR 方法的构造和收敛性

文献[3]利用根树、P-级数理论得到 RK-Rosenbrock 组合方法 CRKR 的阶条件方程, 如表 1 所示.

表 1 CRKR 方法的阶条件方程^{a)}

阶	根树	阶条件方程
1		$\sum c_i = 1$
2		$\sum c_i \alpha_i = \frac{1}{2}$
3		$\sum c_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3}$
		$\sum c_i \alpha_{ij} \alpha_j = \frac{1}{6}$
		$\sum c_i \beta'_{ij} \alpha_j = \frac{1}{6}$
		$\sum c_i \beta'_{ij} \beta_j = \frac{1}{6}$

a) 所有 $\sum$ 为从 1 到 s 求和, 结点★表示●或者○

由阶条件方程结合实时仿真算法特点 $\alpha = \sum_{j=1}^s \alpha_j < 1$, 当 $i \leq j$ 时 $\alpha_j = 0$, $i = 1, 2, \dots, s$, 容易得到以下结论:

定理 1 存在一级一阶($s = 1, p = 1$)的实时 RK-Rosenbrock 方法 RTCRKR1.

此时仅有一个阶条件方程, 即 $c_1 = 1$. 如取 $\gamma = \frac{1}{2}$, 就可得到 RTCRKR1 方法的一组参数, 采样周期 $T = h$.

定理 2 存在二级二阶($s = 2, p = 2$)的实时 RK-Rosenbrock 方法 RTCRKR2.

此时阶条件方程为

$$c_2 = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad \gamma_{21} = \frac{-\gamma}{c_2}, \quad c_1 = 1 - c_2,$$

取 $\alpha_2 (= \alpha_{21} \neq 0)$ 和 γ 为自由参数. 当 α_2 和 γ 分别取 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ 和 $1, \frac{3}{4}$ 时, 可得到 RTCRKR2 方法的两组相应的参数, 如表 2 所示, 这时方法的采样周期 T 分别为 $\frac{h}{2}, \frac{h}{3}$.

表 2 RTCRKR2 方法的系数

$\alpha_2 (= \alpha_{21})$	γ	γ_{21}	c_1	c_2
$\frac{1}{2}$	1	-1	0	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

定理 3 存在三级三阶($s = 3, p = 3$)的实时 RK-Rosenbrock 方法 RTCRKR3.

三阶方法的阶条件方程及有关的关系式为

$$\begin{aligned} & () c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1, () c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = \frac{1}{2}, () c_2 \beta_2 + c_3 \beta_3 = \frac{1}{2} - \gamma, () c_2 \alpha_2^2 + c_3 \alpha_3^2 = \\ & \frac{1}{3}, () c_3 \alpha_{32} \alpha_2 = \frac{1}{6}, () c_3 \beta_{32} \alpha_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \gamma, () c_3 \beta_{32} \beta_2 = \frac{1}{6} - \gamma + \gamma^2, () \alpha_{31} = \alpha_3 - \alpha_{32}, \\ & () \gamma_{21} = \beta_2 - \alpha_{21}, () \gamma_{31} = \beta_3 - \beta_{32} - \alpha_{31}, () \gamma_{32} = \beta_{32} - \alpha_{32}. \end{aligned}$$

取 $\alpha_2 (= \alpha_{21}), \alpha_3, \gamma$ 为自由参数. 当分别取 $\alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{3}{4}, \gamma = 1$ 和 $\alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_3 = \frac{2}{3}, \gamma = \frac{1}{2}$ 时得到 RTCRKR3 方法的 2 组参数, 如表 3 所示, 这时方法的采样周期 T 分别为 $\frac{h}{3}, \frac{h}{4}$.

表 3 RTCRKR3 方法的系数

α_2	α_3	γ	α_{21}	α_{31}	α_{32}	γ_{21}	γ_{31}	γ_{32}	c_1	c_2	c_3
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

对于 $t \in (t_n, t_{n+1})$, 假设外插值 $\hat{y}_S(t), \hat{y}_N(t)$ 分别依赖于 $y_{Sn}, y_{Sn-1}, \dots, y_{Sn-r+1}$ 和 $y_{Nn}, y_{Nn-1}, \dots, y_{Nn-r+1}$, 记

$$e_{Sn} = y_S(t_n) - y_{Sn}, \quad e_{Nn} = y_N(t_n) - y_{Nn}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb1999-44-2-136>

可得与文献[3]类似的相应的收敛性定理:

定理 4 对于 RTCRKR 方法(4), 如果

() 局部截断误差 $T_n = (T_{Sn}, T_{Nn})^T$ 满足 $T_{Sn} = O(h^{p+1})$, $T_{Nn} = O(h^{p+1})$.

() 初始值误差满足

$$\begin{aligned} \|\delta_{Sr-1}\| &= \max\{\|e_{Sr-1}\|, \dots, \|e_{S0}\|\} = O(h^p), \\ \|\delta_{Nr-1}\| &= \max\{\|e_{Nr-1}\|, \dots, \|e_{N0}\|\} = O(h^p), \end{aligned}$$

那么, RTCRKR 方法的整体误差满足

$$\|e_{Sn}\| = O(h^p), \quad \|e_{Nn}\| = O(h^p), \quad n = 1, 2, \dots$$

3 RTCRKR 方法的数值稳定性分析

考虑模型方程

$$\begin{cases} y'_S = \mu y_S + a y_N, & y_S(t_0) = y_{S0}, \\ y'_N = b y_S + \kappa y_N, & y_N(t_0) = y_{N0}, \end{cases} \quad t \in [t_0, t_M], \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} () \mu \ll \kappa < 0, \\ () a \cdot b := c < \mu \kappa, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

定义 1^[3, 5] 应用 RTCRKR 方法求解模型方程(7), 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对于任给的初值 y_{S0} , y_{N0} 有 $y_{Sn} \rightarrow 0$, $y_{Nn} \rightarrow 0$, 则称该方法是绝对稳定的. 如果存在 $h_{\max}$, 使当 $0 < h < h_{\max}$ 时 RTCRKR 方法是绝对稳定的, 则称 $h_{\max}$ 为该方法的绝对稳定界.

对于 RTCRKR1, 有 $s = 1$, $c_1 = 1$, $\hat{y}_N(t_n + \alpha_1 h) = y_{Nn}$, $\hat{y}_S(t_n + \alpha_1 h) = y_{Sn}$. 当 $\gamma \geq \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2\mu}$ 时, 易知 RTCRKR1 的绝对稳定界为

$$h_{\max} = \begin{cases} h_1, & -(\gamma - 1)\mu\kappa \leq c \leq \mu\kappa, \\ \min\{h_1, h_2\}, & -(2\gamma - 1)\mu\kappa < c < -(\gamma - 1)\mu\kappa, \\ h_2, & c \leq -(2\gamma - 1)\mu\kappa, \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$h_1 = \frac{\kappa - (2\gamma - 1)\mu + \sqrt{((2\gamma - 1)\mu - \kappa)^2 + 4((2\gamma - 1)\mu\kappa + c)}}{(2\gamma - 1)\mu\kappa + c},$$

$$h_2 = \frac{\mu + \kappa}{c + (\gamma - 1)\mu\kappa}.$$

图 1 表明了 RTCRKR1 的绝对稳定界($\mu = -1000$, $\kappa = -2$, $\gamma = 1$)随耦合系数 c 的变化情况. 从图 1 看到当 $c = 0$ 时, 即系统为弱耦合时, 绝对稳定界为 $1 = \frac{2}{\|\kappa\|}$ 即为 Euler 方法的稳定界. 另外图中还表明存在一个 c 的区间, 在这个区间上 $h_{\max} > \frac{2}{\|\kappa\|} = 1$, 也就是说实时 RTCRKR1 的绝对稳定界超过了单一的使用 Euler 方法的绝对稳定界.

对于 RTCRKR2, 若外插为

$$\begin{aligned}\hat{y}_S(x_n + \alpha_i h) &= y_{Sn} + y'_S(x_n) \alpha_i h \\ &= (1 + \mu \alpha_i h) y_{Sn} + a \alpha_i h y_{Nn}, \\ \hat{y}_N(x_n + \alpha_i h) &= y_{Nn} + y'_N(x_n) \alpha_i h \\ &= b \alpha_i h y_{Sn} + (1 + \kappa \alpha_i h) y_{Nn},\end{aligned}$$

则 RTCRKR2 绝对稳定的充要条件为矩阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

的特征值的模均小于 1. 其中

$$\begin{aligned}a_{11} &= 1 + \frac{h\mu}{1 - h\gamma\mu} + \left| \frac{1}{2} - \gamma \right| \left| \frac{h\mu}{1 - h\gamma\mu} \right|^2 + \frac{\frac{1}{2}ch^2}{1 - h\gamma\mu}, \\ a_{12} &= \frac{ha}{1 - h\gamma\mu} + \left| \frac{1}{2} - \gamma \right| \left| \frac{a}{\mu} \right| \left| \frac{h\mu}{1 - h\gamma\mu} \right|^2 + \frac{\frac{1}{2}akh^2}{1 - h\gamma\mu}, \\ a_{21} &= hb + \frac{1}{2}(\mu + \kappa)bh^2, \\ a_{22} &= 1 + h\kappa + \frac{1}{2}(\kappa^2 + c)h^2.\end{aligned}$$

图1 RTCRKR1 的绝对稳定界 $h_{\max}$

图 2 表明 RTCRKR2 的绝对稳定界 ($\mu = -1\,000$, $\kappa = -1$, $\gamma = 1$) 随耦合系数 c 的变化情况.

从图 1, 2 可见 RTCRKR1 方法和 RTCRKR2 方法与文献[3]中的 CRKR1 方法和 CRKR(1)2 方法的绝对稳定界相同.

4 数值试验

定义量 $y_k := (y_{1,k}, \dots, y_{n_S,k}, \dots, y_{n_S+n_N,k})^T$ 为在点 $t = t_k$ 处的数值解, $S_l := \max\{1, |y_{l,k}|\}$, 计算到区间终点 t_M 时解向量的最大误差为

$$ERR := \max_{1 \leq l \leq n_S + n_N} \frac{|y_{l,M}^* - y_{l,M}|}{S_l}. \quad (10)$$

式(10)中的参考解 $y_{l,M}^*$ 为 GEAR 程序“SLODE”取 $TOL = 10^{-6}$ 计算获得的数值解.

例 1

$$\begin{aligned}y'_i &= i - 0.1 \sum_{j=1}^{20} y_j - 0.01 y_{i+1} y_{i-1} + r_i y_i, \\ y_i(0) &= 10, \quad i = 1, 2, \dots, 20.\end{aligned}$$

其中 $y_0 = y_{20}$, $y_{21} = y_1$, $r_{20} = -1\,000$, $r_i = 0.1$, $i = 1, 2, \dots, 19$. 取 $t_M = 10.0$, $y_S = y_1$, $y_N = (y_2, y_3, \dots, y_{20})^T$.

图2 RTCRKR2 的稳定界 $h_{\max}$

例2

$$\begin{aligned}
y_1' &= 250((R-1)y_1 + y_2), & y_1(0) &= 1, \\
y_2' &= 0.1(y_1 - y_2), & y_2(0) &= 1, \\
y_3' &= 93y_1 - 0.26(y_3 - y_4), & y_3(0) &= 660.2, \\
y_4' &= 0.87(y_3 - y_4) - 11(y_4 - y_5), & y_4(0) &= 302.2, \\
y_5' &= 1.8(y_4 - y_5) - 13(y_5 - 270), & y_5(0) &= 273.9.
\end{aligned}$$

其中 $R = -0.0048(y_3 - 660.2) - 0.032(y_5 - 273.9)$. 取 $t_M = 1.0$, $y_S = y_1$, $y_N = (y_2, y_3, y_4, y_5)^T$.

例3

$$\begin{aligned}
y_1' &= -10^4 y_1 y_3 + 10^4 y_2 y_6, & y_1(0) &= 1, \\
y_2' &= -10^4 y_1 y_6 - 10^4 y_2 y_3, & y_2(0) &= 1, \\
y_3' &= -y_3 - y_4 + 1, & y_3(0) &= 1, \\
y_4' &= -2y_4, & y_4(0) &= 1, \\
y_5' &= 2 - y_5, & y_5(0) &= -1, \\
y_6' &= -y_6 - 0.5y_5 + 0.5, & y_6(0) &= 0.
\end{aligned}$$

取 $t_M = 10.0$, $y_S = (y_1, y_2)^T$, $y_N = (y_3, y_4, y_5, y_6)^T$.

对于例1~例3,应用二阶实时 RK-Rosenbrock 组合方法 RTCRKR2 和传统的二阶 Rosenbrock 方法 ROW2 进行计算. 表4给出了 RTCRKR2 方法与 ROW2 方法计算精度和计算时间的比较. T 表示在 PC 微机 486 上的计算时间.

表4 RTCRKR2 方法与 ROW2 方法计算结果

	h	RTCRKR2 方法		ROW2 方法	
		ERR	$T(s)$	ERR	$T(s)$
例1	0.01	2.377×10^{-4}	0.60	8.307×10^{-5}	10.43
	0.001	2.882×10^{-6}	5.87	1.264×10^{-5}	104.30
例2	0.01	1.967×10^{-8}	0.05	5.671×10^{-7}	0.05
	0.001	1.699×10^{-10}	0.16	5.086×10^{-9}	0.32
例3	0.01	8.419×10^{-8}	0.16	9.993×10^{-9}	0.49
	0.001	1.244×10^{-9}	5.27	3.073×10^{-10}	4.99

由于传统的 Rosenbrock 方法每积分一步需要求解 $n_S + n_N$ 维的线性代数方程组,而实时 RK-Rosenbrock 方法仅需要求解 n_S 维线性代数方程组,因而当 $n_S \ll n_N$ 时,RTCRKR 方法将获得较大的加速. 表4中例1的结果即如此.

致谢 本工作为国防科技预研基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 刘德贵,费景高,韩天敏. 刚性大系统数学仿真方法. 郑州: 河南科学技术出版社, 1996
- 2 Hairer E. Order conditions for numerical methods for partitioned ordinary differential equations. Numer Math, 1981, 36: 431~ 445
<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb1999-44-2-136>

- 3 陈丽容, 刘德贵. 一类分解刚性大系统的组合方法. 计算物理, 1997, 14(4-5): 510~ 513
- 4 陈丽容, 刘德贵. 刚性大系统的并行组合方法. 第五届全国并行计算学术会议论文集, 西安: 陕西科学技术出版社, 1997, 34~ 36
- 5 Strehmel K, Weiner R. Partitioned adaptive Runge-Kutta Methods and their stability. Numer Math, 1984, 45: 283~ 300

(1998-02-13 收稿, 1998-09-05 收修改稿)

R -李代数及其 R -李理想的若干性质

王栓宏

(河南师范大学数学系, 新乡 453002; 复旦大学数学研究所, 上海 200433)

摘要 讨论了 R -李代数 A 的 R -李理想 I 的一些性质, 特别是当 A 为 H -单时 I 与 A 的 H -不变理想, R -中心之间的某些关系.

关键词 R -李代数 模代数 双代数

设 (H, R) 为三角双代数. Manin 定义了 R -李代数, 将它看作为 H -模范畴上的一个对象 (见文献[1]), 这个观点对于在对称辫子范畴上构造量子群尤其重要 (见文献[2]). 在 1994 年, Cohen 等人^[3] 讨论了 R -李代数的 R -泛包络代数及相关性质, 对偶问题见文献[4]. 此外, 在文献[5]中讨论了 H -量子交换代数, 这实质上是一类 Abelian R -李代数. 从纯李代数的观点来看, 非 Abelian 情况下的结构性质更引人注目. 本文讨论 R -李代数的 R -李理想, H -不变理想, 以及 R -中心理想之间的一些关系.

在本文中, 域 k 始终是固定的域. 有关的双代数、李代数的基本知识见文献[2, 6~ 8]. 所有代数均指 k 上的. 设 $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ 为双代数, 我们将采用简化的 Sweedler 记号: $\Delta(h) = \sum h_1 \leftarrow h_2, \forall h \in H$. 用 ${}_H\text{Mod}$ 表示左 H -模范畴. 称 ${}_H\text{Mod}$ 中的一个代数 A 为左 H -模代数, 如其满足: $h \bullet (ab) = \sum (h_1 \bullet a)(h_2 \bullet b), h \bullet 1 = \varepsilon(h)1, \forall h \in H, a, b \in A$. 记 $A^H = \{a \in A \mid h \bullet a = \varepsilon(h)a, \forall h \in H\}$. 这里“ $\bullet$ ”为 H 对 A 的模作用.

一个三角双代数是指二元组 (H, R) , 其中 $R = \sum R^{(1)} \leftarrow R^{(2)} \in H \leftarrow H$, 它关于卷积运算可逆, 且满足 $(R = r)$:

$$(QT1): \sum \Delta(R^{(1)}) \leftarrow R^{(2)} = \sum R^{(1)} \leftarrow r^{(1)} \leftarrow R^{(2)} r^{(2)},$$

$$(QT2): \sum R^{(1)} \leftarrow \Delta(R^{(2)}) = \sum R^{(1)} r^{(1)} \leftarrow r^{(2)} \leftarrow R^{(2)},$$

$$(QT3): \Delta^{\text{cop}}(h) = R \Delta(h) R^{-1}, \forall h \in H.$$

这里 $\Delta^{\text{cop}}(h) = \sum h_2 \leftarrow h_1, R^{-1} = \sum R^{(2)} \leftarrow R^{(1)} \in H \leftarrow H$.

本文总设 (H, R) 是一个三角双代数. 令 $L = R_{(l)} = \text{sp}_k\{R^{(1)}\}, T = R_{(r)} = \text{sp}_k\{R^{(2)}\}$, 则由文献[7]知: L, T 都是 H 的有限维子双代数, 且 $LT = TL$. 记 $H_R = LT$. 又由文献[2]知 ${}_H\text{Mod}$ 为对称辫子范畴, 其辫子 Φ 定义如下: $\forall M, N \in {}_H\text{Mod}, m \in M, n \in N$, 有

$$\Phi: M \leftarrow N \longrightarrow N \leftarrow M, m \leftarrow n \mapsto \sum R^{(2)} \cdot n \leftarrow R^{(1)} \cdot m.$$

又记 $\Phi_{12} = \Phi \leftarrow \text{id}, \Phi_{23} = \text{id} \leftarrow \Phi, S_{231} = \Phi_{23}^\circ \Phi_{12}, S_{312} = \Phi_{12}^\circ \Phi_{23}$, 下面来定义 R -李代数.