Hamilton 算子矩阵的半群生成性质

刘杰^{①②}, 黄俊杰^{①*}, 阿拉坦仓^{①③}

① 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021;

② 内蒙古大学满洲里学院, 满洲里 021400;

③ 呼和浩特民族学院, 呼和浩特 010051

E-mail: liujieem@163.com, huangjunjie@imu.edu.cn, alatanca@imu.edu.cn

收稿日期: 2014-10-15; 接受日期: 2014-12-21; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11461049 和 11371185) 和内蒙古自然科学基金 (批准号: 2013JQ01 和 2013ZD01) 资助项目

摘要 本文研究 Hamilton 算子矩阵生成压缩半群的问题, 采用对角元算子的耗散性刻画整个算子的耗散性, 借助空间分解和二次补描述右半实轴包含于整体算子的预解集, 进而给出若干半群生成的充分必要条件.

关键词 Hamilton 算子矩阵 压缩半群 数值域 二次补 空间分解

MSC (2010) 主题分类 47D03, 47B99, 37K99

1 引言

无穷维 Hamilton 系统在弹性力学和控制理论等领域应用广泛, 并吸引着很多学者的关注 (参见文献 [1-3]). 鉴于 Hamilton 系统是特殊的发展方程, 我们可以引进算子半群方法研究整个系统的性质. 因此, 需要给出 Hamilton 算子矩阵的半群生成定理.

值得注意的是, 现有的分块算子矩阵生成 C_0 半群的结论往往考虑对角定义域, 再结合标准的扰动理论^[4,5]. 本文将采用不同的方法解决 Hamilton 算子矩阵的生成 C_0 半群问题.

本文基于空间分解和生成元数值域的分布, 得到上 (下) 行占优的 Hamilton 算子矩阵生成 C_0 半群的充分必要条件. 此外, 当有一个次对角元具有有界逆时, 更详细地描述了 Hamilton 算子矩阵的 C_0 半群生成性质. 用同样的方法, 本文给出文献 [6] 中 Hamilton 算子矩阵生成 C_0 半群的充分必要条件.

2 预备知识

文中, $\mathcal{X}$ 通常为复无穷维 Hilbert 空间. 为明确起见, $\mathcal{X}$ 中的内积用 $(\cdot, \cdot)$ 表示, $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 中的内积用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示. $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{N}(T)$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 分别为算子 T 的定义域、零空间和值域.

定义 2.1 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix} : \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 是稠定闭算子. 若 A 是闭算子, B 和 C 是自伴算子, 则称 H 为 Hamilton 算子矩阵.

定义 2.2^[7] 设 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是 Banach 空间, T 和 S 分别是 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{G}$ 的线性算子. 若 $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ 且存在常数 $a_s, b_s \geq 0$ 使得

$$\|Sx\| \leq a_s \|x\| + b_s \|Tx\|, \quad x \in \mathcal{D}(T), \quad (2.1)$$

则称 S 是相对于 T 有界 (简称 T -有界). 存在 a_s 使得 (2.1) 成立的所有 b_s 的下确界 δ_s 称为 S 关于 T 的相对界 (简称 T -界).

根据定义 2.1 和 2.2, 若 C 是 A -有界, A^* 是 B -有界, 则称 Hamilton 算子矩阵 H 是上行占优的; 若 A 是 C -有界, B 是 A^* -有界, 则称 Hamilton 算子矩阵 H 是下行占优的. 鉴于 A, B 和 C 的闭性, 我们有

$$H \text{ 是上行占优的} \Leftrightarrow \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B),$$

$$H \text{ 是下行占优的} \Leftrightarrow \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(A^*).$$

定义 2.3 ^[8] 设 T 是 $\mathcal{X}$ 中的线性算子. 称集合

$$W(T) = \{(Tv, v) : v \in \mathcal{D}(T), \|v\| = 1\}$$

为 T 的数值域. 若 $W(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$, 则称 T 为耗散算子, 其中 $\operatorname{Re} z$ 为复数 z 的实部.

引理 2.1 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ 是上行占优的 Hamilton 算子矩阵, 则 H 的耗散性蕴含 A 和 $-\tilde{A}^*$ 的耗散性, 其中 $-\tilde{A}^* = -A^*|_{\mathcal{D}(B)}$.

证明 根据文献 [7, 定理 2.5.3 和 2.5.4], 结论易得. $\square$

引理 2.2 ^[8] 设 $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 是闭线性算子. 若 $\lambda \notin \overline{W(T)}$, 则 $\mathcal{N}(T - \lambda) = \{0\}$ 且 $\mathcal{R}(T - \lambda)$ 是闭的.

引理 2.3 ^[7] 设 T 和 S 是闭算子且 $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, 则 $0 \in \rho(S)$ 蕴含 TS^{-1} 是有界的.

引理 2.4 ^[7] 设 T 是闭算子, S 是自伴算子且 $0 \in \rho(S)$, 则 $S^{-1}T$ 在 $\mathcal{D}(T)$ 上有界当且仅当 $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T^*)$.

证明 根据文献 [7, 注 2.2.24], 结论易得. $\square$

引理 2.5 ^[8] 设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间, T 和 S 是从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 的线性算子, S 是 T -有界且 T -界小于 1. 若 T 具有有界逆且不等式 (2.1) 中的常数 a_s 和 b_s 满足

$$a_s \|T^{-1}\| + b_s < 1,$$

则 $T + S$ 也具有有界逆.

引理 2.6 ^[8] 设 T 是自伴算子, S 是对称算子. 若 S 是 T -有界且 T -界小于 1, 则 $T + S$ 也是自伴算子.

引理 2.7 ^[9] 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathcal{X}$ 中的稠定闭线性算子, 则

$$(i) \sigma(T) = \sigma_{\text{app}}(T) \cup \sigma_{r,1}(T),$$

$$(ii) \sigma_{\text{app}}(T) \subset \overline{W(T)},$$

其中

$$\sigma_{r,1}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是单射}, \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} \neq \mathcal{X} \text{ 且 } \mathcal{R}(T - \lambda) \text{ 是闭的}\},$$

$$\sigma_{\text{app}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)x_n \rightarrow 0, \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(T), \|x_n\| = 1, n = 1, 2, \dots\}.$$

下面是对 Hamilton 算子矩阵 H 定义的一些常数:

$$\alpha_0 = \inf\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda = -(Af, f), \|f\| = 1, f \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(C)\},$$

$$\beta_0 = \inf\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda = (A^*g, g), \|g\| = 1, g \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(A^*)\},$$

$$\delta_0 = \min\{\alpha_0, \beta_0\},$$

$$\gamma_0 = \sup \left\{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda = \frac{(Cf, g) + (Bg, f)}{\|f\|^2 + \|g\|^2}, v = (fg)^t \in \mathcal{D}(H), v \neq 0 \right\}.$$

3 主要结果

首先, 讨论上(下)行占优 Hamilton 算子矩阵的半群生成性质.

定理 3.1 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ 是 Hamilton 算子矩阵, 则

(1) 若 H 上行占优且存在 γ_0 使得 $\gamma_0 \leq \delta_0$, 则 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当以下条件成立:

(i) A 和 $-\tilde{A}^*$ 均为耗散算子,

(ii) $\mathcal{R}(-A_1^* - \lambda T_2(\lambda)) = \mathcal{X}$, $\mathcal{R}(B_2) = \mathcal{R}(A - \lambda)^\perp$,

其中 $\lambda > 0$, $(-A_1^* - \lambda T_2(\lambda))$ 是行算子, $-\tilde{A}^* = -A^*|_{\mathcal{D}(B)}$, $-A_1^* = -A^*|_{\mathcal{N}(B)}$, $T_2(\lambda) = -A_{22}^* - \lambda - C(A - \lambda)^{-1}B_{12}$, $B_2 = P_{\mathcal{R}(A-\lambda)^\perp}B$, $-A_{22}^* = -A^*|_{\overline{\mathcal{N}(B_2)}}$, $B_{12} = P_{\mathcal{R}(A-\lambda)}B|_{\overline{\mathcal{N}(B_2)}}$.

(2) 若 H 下行占优且存在 γ_0 使得 $\gamma_0 \leq \delta_0$, 则 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当以下条件成立:

(i) $\tilde{A}$ 和 $-A^*$ 均为耗散算子,

(ii) $\mathcal{R}(A_1 - \lambda T_1(\lambda)) = \mathcal{X}$, $\mathcal{R}(C_2) = \mathcal{R}(-A^* - \lambda)^\perp$,

其中 $\lambda > 0$, $(A_1 - \lambda T_1(\lambda))$ 是行算子, $\tilde{A} = A|_{\mathcal{D}(C)}$, $A_1 = A|_{\mathcal{N}(C)}$, $T_1(\lambda) = A_{22} - \lambda - B(-A^* - \lambda)^{-1}C_{12}$, $C_2 = P_{\mathcal{R}(-A^* - \lambda)^\perp}C$, $A_{22} = A|_{\overline{\mathcal{N}(C_2)}}$, $C_{12} = P_{\mathcal{R}(-A^* - \lambda)}C|_{\overline{\mathcal{N}(C_2)}}$.

证明 首先证明 (1). 由 (i) 可知, $W(-A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $W(\tilde{A}^*) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$, 进而, α_0 和 β_0 存在. 对任意的 $v = (fg)^t \in \mathcal{D}(H)$, 若 $f \neq 0, g \neq 0$, 令 $\tau = \frac{\|f\|^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2}$, 则由 $\gamma_0 \leq \delta_0$ 可知,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}(Cf, g) + \operatorname{Re}(Bg, f)}{\|f\|^2 + \|g\|^2} &\leq \gamma_0 \leq \delta_0 \leq \tau\alpha_0 + (1-\tau)\beta_0 \\ &\leq \frac{\|f\|^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2} \frac{\operatorname{Re}(-Af, f)}{\|f\|^2} + \frac{\|g\|^2}{\|f\|^2 + \|g\|^2} \frac{\operatorname{Re}(A^*g, g)}{\|g\|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Re}(-Af, f)}{\|f\|^2 + \|g\|^2} + \frac{\operatorname{Re}(A^*g, g)}{\|f\|^2 + \|g\|^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

显然,

$$\operatorname{Re}(Cf, g) + \operatorname{Re}(Bg, f) \leq \operatorname{Re}(-Af, f) + \operatorname{Re}(A^*g, g),$$

从而,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle Hv, v \rangle &= \operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \operatorname{Re}(Cf, g) + \operatorname{Re}(Bg, f) + \operatorname{Re}(Af, f) - \operatorname{Re}(A^*g, g) \leq 0. \end{aligned}$$

若 $f = 0$ 或 $g = 0$, 则容易验证 $\operatorname{Re}\langle Hv, v \rangle \leq 0$. 因此, H 是耗散算子.

另一方面, 由 (i) 可知, $\lambda \notin \overline{W(A)}$ ($\lambda > 0$). 根据引理 2.2, A 的闭性蕴含 $\mathcal{N}(A - \lambda) = \{0\}$ 和 $\mathcal{R}(A - \lambda)$ 是 $\mathcal{X}$ 中的闭子空间. 此外, 因为 B 是闭算子, 所以, $\mathcal{N}(B)$ 是闭的. 因此, 作为从 $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{N}(B)$

$\oplus(\mathcal{N}(B)^\perp \cap \mathcal{D}(B))$ 到 $\mathcal{R}(A-\lambda) \oplus \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp \oplus \mathcal{X}$ 的算子矩阵, $H-\lambda$ 有如下形式:

$$\begin{pmatrix} A-\lambda & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ C & -A_1^*-\lambda & -A_2^*-\lambda \end{pmatrix},$$

其中 $A_2^* = A^*|_{\mathcal{N}(B)^\perp}$, $B_1 = P_{\mathcal{R}(A-\lambda)}B$. 显然, $E_1(H-\lambda)E_2 = Q$, 且易知 E_1 和 E_2 均为全空间 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的双射, 其中

$$Q = \begin{pmatrix} -A_1^*-\lambda & C & -A_2^*-\lambda \\ 0 & A-\lambda & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{\mathcal{X}} \\ I_{\mathcal{R}(A-\lambda)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{R}(A-\lambda)^\perp} & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathcal{X}} & 0 \\ I_{\mathcal{N}(B)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{N}(B)^\perp} \end{pmatrix}.$$

因此, $H-\lambda$ 是满射当且仅当 Q 是满射. 易知, $-A_1^*-\lambda$ 是单射, $A-\lambda$ 具有有界逆. 因为 B_2 是可闭的, 所以, $\mathcal{D}(B_2)$ 可以分解为

$$\mathcal{D}(B_2) = \mathcal{N}(B)^\perp \cap \mathcal{D}(B) = ((\mathcal{N}(B)^\perp \ominus \overline{\mathcal{N}(B_2)}) \cap \mathcal{D}(B)) \oplus \overline{\mathcal{N}(B_2)}.$$

进而, Q 作为从 $\mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{D}(A) \oplus ((\mathcal{N}(B)^\perp \ominus \overline{\mathcal{N}(B_2)}) \cap \mathcal{D}(B)) \oplus \overline{\mathcal{N}(B_2)}$ 到 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{R}(A-\lambda) \oplus \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp$ 的算子矩阵有如下形式:

$$Q = \begin{pmatrix} -A_1^*-\lambda & C & -A_{21}^*-\lambda & -A_{22}^*-\lambda \\ 0 & A-\lambda & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & B_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

由 (ii) 中条件 $\mathcal{R}(B_2) = \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp$ 可知, B_{21} 是双射. 从而, 条件 $\mathcal{R}(-A_1^*-\lambda T_2(\lambda)) = \mathcal{X}$ 蕴含 Q 是满射, 所以, $H-\lambda$ 也是满射. 因此, H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群.

反之, 若 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群, 则 H 是耗散算子且 $\mathcal{R}(H-\lambda) = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ ($\lambda > 0$). 根据引理 2.1, A 和 $-\tilde{A}^*$ 均为耗散算子. 因此, (i) 成立. 由充分性的证明可知, 作为从 $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{N}(B) \oplus ((\mathcal{N}(B)^\perp \ominus \overline{\mathcal{N}(B_2)}) \cap \mathcal{D}(B)) \oplus \overline{\mathcal{N}(B_2)}$ 到 $\mathcal{R}(A-\lambda) \oplus \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp \oplus \mathcal{X}$ 的算子矩阵, $H-\lambda$ 是满射. 因此, (ii) 成立.

(2) 的证明与 (1) 的类似. 需要注意的是证明中所用的空间分解为 $\mathcal{N}(C) \oplus \mathcal{N}(C)^\perp \oplus \mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{R}(-A^*-\lambda) \oplus \mathcal{R}(-A^*-\lambda)^\perp$.

定理 3.2 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ 是 Hamilton 算子矩阵, 则

(1) 若 H 上行占优, B 具有有界逆且存在 γ_0 使得 $\gamma_0 \leq \delta_0$, 则 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当以下条件成立:

(i) A 和 $-\tilde{A}^*$ 均为耗散算子,

(ii) $\mathcal{R}(T_1(\lambda)) = \mathcal{X}$,

其中 $\lambda > 0$, $\tilde{A}^* = A^*|_{\mathcal{D}(B)}$, $T_1(\lambda) = C + (A^* + \lambda)B^{-1}(A - \lambda)$.

(2) 若 H 下行占优, C 具有有界逆且存在 γ_0 使得 $\gamma_0 \leq \delta_0$, 则 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当以下条件成立:

(i) $\tilde{A}$ 和 $-A^*$ 均为耗散算子,

(ii) $\mathcal{R}(T_2(\lambda)) = \mathcal{X}$,

其中 $\lambda > 0$, $\tilde{A} = A|_{\mathcal{D}(C)}$, $T_2(\lambda) = B + (A - \lambda)C^{-1}(A^* + \lambda)$.

证明 首先证明 (1). 由定理 3.1 的证明可知, 条件 (i) 和 $\gamma_0 \leq \delta_0$ 蕴含 H 是耗散算子. 因为 B 具有有界逆, $H - \lambda$ ($\lambda > 0$) 有如下因式分解:

$$H - \lambda = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (-A^* - \lambda)B^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ T_1(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{B^{-1}(A - \lambda)} & I \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

其中

$$T_1(\lambda) = C + (A^* + \lambda)B^{-1}(A - \lambda).$$

根据引理 2.3 和 2.4, $(-A^* - \lambda)B^{-1}$ 和 $B^{-1}(A - \lambda)$ 有界, 进而, $\begin{pmatrix} I & 0 \\ (-A^* - \lambda)B^{-1} & I \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ \overline{B^{-1}(A - \lambda)} & I \end{pmatrix}$ 有界且有有界逆. 由 (ii) 可知, $\mathcal{R}(H - \lambda) = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$. 因此, H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群.

反之, 若 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群, 则 H 是耗散算子. 根据引理 2.1, A 和 $-\tilde{A}^*$ 均为耗散算子. 因此, (i) 成立. 另一方面, 由 $\lambda \in \rho(H)$ ($\lambda > 0$) 和因式分解 (3.2) 可知, $\mathcal{R}(T_1(\lambda)) = \mathcal{X}$. 因此, (ii) 成立.

(2) 的证明与 (1) 的类似. 需要注意的是证明中对 $H - \lambda$ ($\lambda > 0$) 的因式分解为

$$H - \lambda = \begin{pmatrix} I & (A - \lambda)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_2(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \overline{C^{-1}(-A^* - \lambda)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

其中 $T_2(\lambda) = B + (A - \lambda)C^{-1}(A^* + \lambda)$. □

定理 3.3 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ 是 Hamilton 算子矩阵, 则

(1) 假设 H 上行占优, B 具有有界逆, C 是有界线性算子. 若 $0 \in \rho(A^*B^{-1}A)$, 存在 γ_0 和 $\lambda_0 > 0$ 使得 $\gamma_0 \leq \delta_0$ 且 $\theta_{\lambda_0} \cdot \|(A^*B^{-1}A)^{-1}\| < 1$, 则 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当 A 和 $-\tilde{A}^*$ 均为耗散算子, 其中 $\tilde{A}^* = A^*|_{\mathcal{D}(B)}$, $\theta_{\lambda_0} = \|C + \lambda_0(B^{-1}A - A^*B^{-1}) - \lambda_0^2B^{-1}\|$.

(2) 假设 H 下行占优, C 具有有界逆, B 是有界线性算子. 若 $0 \in \rho(AC^{-1}A^*)$, 存在 γ_0 和 $\lambda_0 > 0$ 使得 $\gamma_0 \leq \delta_0$ 且 $\theta_{\lambda_0} \cdot \|(AC^{-1}A^*)^{-1}\| < 1$, 则 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当 $\tilde{A}$ 和 $-A^*$ 均为耗散算子, 其中 $\tilde{A} = A|_{\mathcal{D}(C)}$, $\theta_{\lambda_0} = \|B + \lambda_0(AC^{-1} - C^{-1}A^*) - \lambda_0^2C^{-1}\|$.

证明 首先证明 (1). 由定理 3.1 的证明可知, 条件 (i) 和 $\gamma_0 \leq \delta_0$ 蕴含 H 是耗散算子. 因为 B 具有有界逆, $H - \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$) 可分解成 (3.2) 的形式, 其中 $T_1(\lambda_0)$ 为

$$T_1(\lambda_0) = A^*B^{-1}A + C + \lambda_0(B^{-1}A - A^*B^{-1}) - \lambda_0^2B^{-1}.$$

因为 C 是有界算子且 $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A^*)$, 根据引理 2.3 和 2.4, 进一步定义

$$\theta_{\lambda_0} = \|C + \lambda_0(B^{-1}A - A^*B^{-1}) - \lambda_0^2B^{-1}\|.$$

根据引理 2.5, 由 $0 \in \rho(A^*B^{-1}A)$ 和 $\theta_{\lambda_0} \cdot \|(A^*B^{-1}A)^{-1}\| < 1$ 可知, $0 \in \rho(T_1(\lambda_0))$, 进而, $\mathcal{R}(H - \lambda_0) = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$. 因此, H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群.

反之, 若 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群, 则 H 是耗散算子. 根据引理 2.1, A 和 $-\tilde{A}^*$ 均为耗散算子.

(2) 的证明与 (1) 的类似. 需要注意的是证明中对 $H - \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$) 的因式分解与 (3.3) 相同. $\square$
其次, 对次对角 Hamilton 算子矩阵, 我们有如下结论.

定理 3.4 设 $H = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 是 Hamilton 算子矩阵. 若 B 或 C 具有有界逆, 则 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当 $\gamma_0 \leq 0$.

证明 不妨设 C 具有有界逆. 由 $\gamma_0 \leq 0$ 可知, H 是耗散算子, 进而, $\overline{W(H)} \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$. 根据引理 2.7,

$$\sigma_{\text{app}}(H) \subset \overline{W(H)} \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}. \quad (3.4)$$

因为 C 具有有界逆, $H - \lambda$ ($\lambda > 0$) 有如下的因式分解:

$$H - \lambda = \begin{pmatrix} I & -\lambda C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_2(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

其中 $T_2(\lambda) = B - \lambda^2 C^{-1}$. 根据引理 2.6, $T_2(\lambda)$ 是自伴算子, 因此, $\sigma_r(T_2(\lambda)) = \emptyset$. 显然, $\lambda \notin \sigma_r(H)$. 根据 (3.4) 和引理 2.7 可知, $\lambda \in \rho(H)$. 因此, H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群.

反之, 若 H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群, 则 H 是耗散算子. 容易证明 $\gamma_0 \leq 0$.

最后, 考虑文献 [6] 中讨论的 Hamilton 算子矩阵. 令 $-C$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{X}$ 中的自伴正定算子且 $0 \in \rho(C)$. 显然, $(-C)^{\frac{1}{2}}$ 存在. 因此, 可以定义范数由内积

$$(f, g)_{\mathcal{Y}} = ((-C)^{\frac{1}{2}} f, (-C)^{\frac{1}{2}} g), \quad f, g \in \mathcal{X}$$

诱导的 Hilbert 空间

$$\mathcal{Y} = \mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}).$$

在乘积 Hilbert 空间 $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X} (\subset \mathcal{X} \oplus \mathcal{X})$ 中考虑 Hamilton 算子矩阵. $\square$

定理 3.5 设 $H = \begin{pmatrix} A & I \\ C & -A^* \end{pmatrix} : \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$ 是 Hamilton 算子矩阵, 则 H 生成 $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群当且仅当以下条件成立:

- (i) $A|_{\mathcal{D}(C)}$ 是 $\mathcal{Y}$ 中的耗散算子, $-\tilde{A}^*$ 是 $\mathcal{X}$ 中的耗散算子,
- (ii) $\mathcal{R}(T_2(\lambda)) = \mathcal{Y}$,

其中 $\lambda > 0$, $\tilde{A}^* = A^*|_{\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}})}$, $T_2(\lambda) = I + (A - \lambda)C^{-1}(A^* + \lambda)$.

证明 由 (i) 可知,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle H v, v \rangle_{\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}} &= \operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} A & I \\ C & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}} \\ &= \operatorname{Re}(A f, f)_{\mathcal{Y}} + \operatorname{Re}(g, f)_{\mathcal{Y}} + \operatorname{Re}(C f, g) + \operatorname{Re}(-A^* g, g) \\ &= \operatorname{Re}(A f, f)_{\mathcal{Y}} + \operatorname{Re}((-C)^{\frac{1}{2}} g, (-C)^{\frac{1}{2}} f) + \operatorname{Re}(C f, g) + \operatorname{Re}(-A^* g, g) \\ &= \operatorname{Re}(A f, f)_{\mathcal{Y}} + \operatorname{Re}(g, -C f) + \operatorname{Re}(C f, g) + \operatorname{Re}(-A^* g, g) \\ &= \operatorname{Re}(A f, f)_{\mathcal{Y}} + \operatorname{Re}(-A^* g, g) \\ &\leq 0, \quad v = (f g)^t \in \mathcal{D}(H). \end{aligned}$$

因此, H 是 $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$ 中的耗散算子. 因为 $0 \in \rho(C)$, $H - \lambda$ ($\lambda > 0$) 有如下的因式分解:

$$H - \lambda = \begin{pmatrix} I & (A - \lambda)C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_2(\lambda) \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \overline{C^{-1}(-A^* - \lambda)} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

根据引理 2.3 和 2.4, $(A - \lambda)C^{-1}$ 和 $C^{-1}(-A^* - \lambda)$ 有界. 进而, 由 (ii) 可知, $\mathcal{R}(H - \lambda) = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$. 因此, H 生成 $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群.

反之, 若 H 生成 $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群, 则 H 是耗散算子且 $\mathcal{R}(H - \lambda) = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$ ($\lambda > 0$). 因此, 根据文献 [7, 定理 2.5.3 和 2.5.4], (i) 成立. 根据分解式 (3.5), (ii) 成立. $\square$

4 例子

例 4.1 令 $\mathcal{X} = L^2(0, 1)$. 考虑 Hamilton 算子矩阵

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{d^2}{dt^2} & -\frac{d^2}{dt^2} \\ \frac{d^2}{dt^2} & i \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{X} \oplus \mathcal{X},$$

其中 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = \{v \in \mathcal{X} : v', v'' \in \mathcal{X}, v(0) = v(1) = 0\}$. 容易验证 $\gamma_0 \leq \delta_0$, A 和 $-A^*$ 均为耗散算子. 另一方面,

$$\begin{aligned} T_1(\lambda) &= C + (A^* + \lambda)B^{-1}(A - \lambda) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} + \left(-i \frac{d^2}{dt^2} + \lambda\right) \left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)^{-1} \left(i \frac{d^2}{dt^2} - \lambda\right) \\ &= \lambda^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)^{-1} - 2\lambda i, \end{aligned}$$

$\mathcal{D}(T_1(\lambda)) = \mathcal{D}(A)$. 易知, $\mathcal{R}(T_1(\lambda)) = \mathcal{X}$ ($\lambda > 0$). 因此, 根据定理 3.2, H 生成 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群.

例 4.2 有界弦振动方程可以表述为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \geq 0, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u'_t(0, x) = \psi(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

令 $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, 则问题 (4.1) 可以转换成 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u(0, x) \\ v(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

令 $\mathcal{X} = L^2(0, 1)$. 定义 $\mathcal{X}$ 中的算子 C 为

$$(Cu)(x) = u''(x), \quad \mathcal{D}(C) = \{u(x) \in \mathcal{X} : u', u'' \in \mathcal{X}, u(0) = u(1) = 0\}.$$

容易验证 $-C$ 是 $\mathcal{X}$ 中的自伴正定算子且 $0 \in \rho(C)$. 记 $w = (uv)^t$, 并定义乘积空间 $\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{X}$ 中的 Hamilton 算子矩阵 H 为

$$Hw = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{pmatrix} w, \quad \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}).$$

这样, 问题 (4.1) 构成 $\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{X}$ 中的抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = Hw, \\ w(0) = w_0, \end{cases}$$

其中 $w_0 = (\varphi(x)\psi(x))^t$.

经计算可知, $T_2(\lambda) = I - \lambda^2 C^{-1}$. 因为必然存在 $0 < \lambda < 1$ 使得 $\|\lambda^2 C^{-1}\| < 1$ 成立, 从而, $\mathcal{R}(T_2(\lambda)) = \mathcal{Y}$. 因此, 根据定理 3.5. H 生成 $\mathcal{D}((-C)^{\frac{1}{2}}) \oplus \mathcal{X}$ 上的压缩半群.

参考文献

- 1 Zhong W. A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995
- 2 黄俊杰, 阿拉坦仓, 范小英. 无穷维 Hamilton 算子的谱结构. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 71–78
- 3 Azizov T Y, Dijkma A, Gridneva I V. On the boundedness of Hamiltonian operators. Proc Amer Math Soc, 2002, 131: 563–576
- 4 Nagel R. Towards a “matrix theory” for unbounded operator matrices. Math Z, 1989, 201: 57–68
- 5 Mugnolo D. Asymptotics of semigroups generated by operator matrices. ArXiv:0801.1963v1, 2008
- 6 Alatancang, Huang J. A theorem on C_0 semigroups generated by a class of infinite dimensional Hamiltonian operators. Appl Math J Chinese Univ Ser A, 2006, 21: 357–364
- 7 Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London: Imperial College Press, 2008
- 8 Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1995
- 9 Wu D, Chen A. Spectral inclusion properties of the numerical range in a space with an indefinite metric. Linear Algebra Appl, 2011, 435: 1131–1136

Semigroup generation properties of Hamiltonian operator matrices

LIU Jie, HUANG JunJie & Alatancang

Abstract This paper deals with the problem for Hamiltonian operator matrices to generate contraction semigroups. The dissipativity of the operator matrix is characterized by those of its diagonal entries. By means of space decomposition and quadratic complements, it is described that the right real axis is contained in the resolvent set of the operator matrix. Based on these properties, some necessary and sufficient conditions on semigroup generation are further given.

Keywords Hamiltonian operator matrix, contraction semigroup, numerical range, quadratic complement, space decomposition

MSC(2010) 47D03, 47B99, 37K99

doi: 10.1360/012015-15