高频散射问题的高效配置法

李松华¹, 冼军^{2*}, 向淑晃³

1. 湖南理工学院数学学院, 岳阳 414006;

2. 中山大学数学与计算科学学院, 广州 510275;

3. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083

E-mail: songhuali_hn@aliyun.com, xianjun@mail.sysu.edu.cn, xiangsh@csu.edu.cn

收稿日期: 2015-02-12; 接受日期: 2016-04-29; 网络出版日期: 2016-10-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371376)、国家优秀青年基金 (批准号: 11422102)、中央高校基本科研业务费 (批准号: 15lgzd07)、湖南省自然科学基金 (批准号: 2016JJ4037)、湖南省教育厅重点项目 (批准号: 15A077) 和湖南省高校科技创新团队资助项目

摘要 本文从二维声软高频散射问题的边界积分方程出发, 利用密度函数在凸区域外散射的关于波数 $k \rightarrow +\infty$ 的渐近分析, 将其由高振荡性转化为低振荡性, 进而得到一个第二类 Fredholm 积分方程的解. 通过选取积分区间 $[0, 2\pi]$ 的配置点, 按照多项式 (明区域) 与几何 (暗区域) 增加 (或减少), 得到其收敛性为 $O(k^{-\frac{1}{d}})$ ($k \gg 1$). 此外, 数值例子表明本文的数值方法非常有效.

关键词 高频散射 Helmholtz 方程 边界元法 配置法**MSC (2010) 主题分类** 65N35, 65R20, 65N38

1 引言

高频散射问题的数值模拟来源于对电磁波和声波等问题的研究, 在无损检测、遥感、雷达、声呐、地矿和海洋探测等领域有着广泛而重要的应用. 平面或空间区域时谐电磁波和声波散射问题可用满足适当边界条件的 Helmholtz 方程

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \quad d = 2 \quad \text{或} \quad d = 3 \quad (1.1)$$

加以刻画, 其中 Ω 表示障碍物, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ 为散射区域, 总波 (total wave) $u(\mathbf{x}) = u^I(\mathbf{x}) + u^S(\mathbf{x})$, 这里 $u^I(\mathbf{x})$ 表示入射波 (incoming wave), $u^S(\mathbf{x})$ 表示散射波 (scattering wave). 为使上述方程的解具有适定性, 散射波 $u^S(\mathbf{x})$ 通常需满足 Sommerfeld 辐射条件 (参见文献 [1])

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left| \frac{\partial u^S}{\partial r} - iku^S \right| = 0, \quad r = \|\mathbf{x}\|_2, \quad (1.2)$$

其中 $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ($d = 2$), $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ($d = 3$).

Helmholtz 方程 (1.1) 通常的求解方法是微分方程解法 (有限元、有限差分、谱方法) 和积分方程解法. 在利用标准的边界元或有限元方法求解散射波 $u^S(\mathbf{x})$ 时, 由于解的高振荡性, 往往需对网格尺

英文引用格式: Li S H, Xian J, Xiang S H. A fast collocation method for high-frequency acoustic scattering (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 651–666, doi: 10.1360/N012015-00080

寸 h 作出严格的要求 (参见文献 [2–5]), 例如, Ihlenburg 和 Babuška^[2] 对一维 Helmholtz 问题的线性有限元方法证明了如下误差估计:

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq C_1 kh + C_2 k^3 h^2, \quad \text{当 } kh \leq 1; \quad (1.3)$$

Wu^[6] 给出了 (1.3) 的二维和三维情形, 即

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq C_1 kh + C_2 k^3 h^2, \quad \text{当 } k^3 h^2 \leq C_0, \quad (1.4)$$

其中 C_j ($j = 0, 1, 2$) 是与 k 和 h 无关的常数. 众所周知, kh 固定这一条件, 即一个波长 $\frac{2\pi}{k}$ 放几个网格点, 这是工程上著名的经验公式. (1.3) 和 (1.4) 表明, 需在 $k^2 h$ 足够小时经验公式才有效, 这使得对于高频散射问题的计算量会大大增加. 有限元、有限差分和谐方法求解电磁、声波散射问题近年来已取得许多成果, 如文献 [7–11] 等中的自适应有限元、自适应 PML (perfectly matched layer) 方法和间断 Galerkin 方法等. 微分方程解法的难点在于针对高频散射的离散格式的构造、大规模线性方程组的求解. 因此, 寻找更合适的数值方法以减少对波数 k 的依赖性研究高频散射问题 (1.1) 的有力突破口之一.

对高频散射问题发展低成本、高效的数值方法是当前数学研究的一个重要课题 (参见文献 [12]). 根据二维上半平面的时谐声散射具体问题的特殊性, Chandler-Wilde^[13] 首次设计了一种新的数值方法, 即先不直接求总波, 而是求解总波与入射波的比值的数值方法. 利用这一思想, Abboud 等^[14] 研究了二维光滑凸障碍物的时谐声散射问题, 得到的数值结果减弱了对波数 k 的依赖性. 文献 [15, 16] 研究了二维上半平面的时谐声散射问题, 利用位势理论和混合边界元法, 得到了误差完全独立或减弱对波数 k 的依赖程度的数值方法. 针对凸多边形区域内的散射问题, 文献 [17] 利用 Galerkin 方法得到了一个只依赖于 $\ln k$ 的数值结论. 而二维光滑凸区域外平面波散射问题, Domínguez 等^[19] 利用 Galerkin 方法和文献 [18] 中的总波关于法向导数的渐近性分析结果, 将总波 $u(\mathbf{x})$ 表示为

$$u(\mathbf{x}) = kv(\mathbf{x})e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{a}}}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.5)$$

其中入射波假设为平面波 $e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{a}}}$, 得到了一个只依赖于 $k^{\frac{1}{5}}$ 的数值方法.

相对于 Galerkin 方法而言, Nyström 法和配置法在减少计算量方面更具有优势, 尤其是减少关于刚度矩阵元素的高振荡积分计算 (参见文献 [20]). 由于 Nyström 法和配置法很难得到严格的收敛性分析, 从而造成这方面的研究成果非常少 (参见文献 [19, 21, 22]). Bruno 等^[21] 从一些数值例子观察到 Nyström 法的收敛性与波数 k 无关; Giladi 和 Keller^[22] 利用单层位势研究了高频散射问题的配置法. 数值例子表明该方法非常有效, 遗憾的是, 他们都没有给出严格的收敛性分析. 另一方面, 文献 [21, 22] 忽略了散射问题在明区域与暗区域交接处的复杂性 (详见下面的 (3.14)), 因此, 当 $k \gg 1$ 时他们的方法不知是否有效 (参见文献 [19]). 本文从混合位势出发, 得到一个第二类 Fredholm 积分方程, 在假设入射波为平面波 $e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{a}}}$ 的条件下, 研究了声软 (sound-soft) 散射问题 (1.1) 在二维高频情形下的配置法解法, 得到其收敛性为 $O(k^{-\frac{1}{24}})$ ($k \gg 1$), 这是更优于收敛性独立与波数 k 的结果. 具体内容如下: 第 2 节详细地介绍了边界积分方程的转化, 即首先利用位势理论把该问题转化为解一个第二类 Fredholm 积分方程, 然后利用密度函数在凸区域外散射的关于波数 $k \rightarrow +\infty$ 的渐近分析, 将该积分方程进一步转化; 第 3 节通过选取积分区间 $[0, 2\pi]$ 的配置点按照多项式 (明区域) 与几何 (暗区域) 增加 (或减少), 并分析该配置法的收敛性; 第 4 节通过数值例子说明我们的数值方法非常有效, 在自由度相近的前提下其 $L^2[0, 2\pi]$ 误差比文献 [19] 的小许多.

2 边界积分方程

假设障碍物 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个闭有界凸区域, 且其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 属于 C^2 , 记 $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ 是相应的外部无界区域. 考虑如下入射平面声波:

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}}}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

的散射, 其中入射方向用单位向量 $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2) \in \mathbb{R}^2$ 表示. 入射波 $u^I(\mathbf{x})$ 通过障碍物 Ω 产生的散射波设为 $u^S(\mathbf{x})$, 因此, 全波 $u(\mathbf{x}) = u^I(\mathbf{x}) + u^S(\mathbf{x})$ 是如下 Helmholtz 方程:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{在 } \Omega' \text{ 内} \quad (2.1)$$

的解, 其中散射波 $u^S(\mathbf{x})$ 满足如下散射条件:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^S}{\partial r} - iku^S \right) = 0, \quad r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.2)$$

下面考虑声软散射问题, 即

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \quad (\text{等价于 } u^S(\mathbf{x}) = -u^I(\mathbf{x}), \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}). \quad (2.3)$$

由文献 [1] 可知, 上述凸区域声软散射问题 (2.1)–(2.3) 的解能表示为

$$u(\mathbf{x}) = u^I(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}. \quad (2.4)$$

为了求上述散射问题的数值解, 我们需要求未知函数 $v(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{x} \in \Gamma$. 由位势理论可知, 函数 $v(\mathbf{x})$ 满足如下积分方程:

$$v(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} - ik\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) v(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} = 2f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.5)$$

其中 $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ 是二维 Helmholtz 方程的基本解, $f(\mathbf{x}) := \frac{\partial u^I(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} - iku^I(\mathbf{x})$, 这里 $H_0^{(1)}(\cdot)$ 是第一类 0 阶 Hankel 函数, $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$ 是关于变量 $\mathbf{x}$ 的外法向导数. 由文献 [1] 可知, 对任意波数 k , 积分方程 (2.5) 是唯一可解.

随着波数 k 的增大, 解 $\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}$ 快速振荡. 若采用通常的逐段多项式近似空间来离散积分方程 (2.5), 在相同精度的要求下, 刚度矩阵的增长至少线性依赖于波数 k 的增长 (参见文献 [17]).

在障碍物 Ω 的明区域 (illuminated zone) 和暗区域 (shadow zone) 中, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \rightarrow \begin{cases} 2 \frac{\partial u^I}{\partial \mathbf{n}} = 2ik\mathbf{n}_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{a}} e^{ik\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}}}, & \text{在明区域, 即 } \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}} < 0, \\ 0, & \text{在暗区域, 即 } \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}} > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

设积分方程 (2.5) 中的未知函数 $v(\mathbf{x})$ 为

$$v(\mathbf{x}) = ik(\mathbf{n}_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{a}} - |\mathbf{n}_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{a}}| + w(\mathbf{x})) e^{ik\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.7)$$

其中 $w(\mathbf{x})$ 是一个未知函数.

设边界曲线 Γ 的一个 2π - 周期的参数方程为

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)), \quad s \in [0, 2\pi],$$

其中参数 s 选取逆时针方向且满足 $[\gamma'_1(s)]^2 + [\gamma'_2(s)]^2 > 0$. 为简便起见, 我们假设参数 s 与 Γ 的弧长对应成比例.

记 $\psi(\tau) = w(\gamma(\tau))$. 将 (2.7) 代入积分方程 (2.5) 可得

$$\psi(\tau) + \int_0^{2\pi} K(\tau, t) e^{ik[\gamma(t) - \gamma(\tau)] \cdot \hat{\mathbf{a}}} \psi(t) dt = g(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi], \quad (2.8)$$

其中当 $\tau \neq t$ 时, 核函数

$$K(\tau, t) = \frac{k}{2} (K_1(\tau, t) + K_2(\tau, t)) \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}, \quad (2.9)$$

$$K_1(\tau, t) = -\frac{iH_1^{(1)}(kr(\tau, t))}{r(\tau, t)} \frac{(\gamma'_2(\tau)(\gamma_1(\tau) - \gamma_1(t)) - \gamma'_1(\tau)(\gamma_2(\tau) - \gamma_2(t)))}{\sqrt{(\gamma'_1(\tau))^2 + (\gamma'_2(\tau))^2}}, \quad (2.10)$$

$$K_2(\tau, t) = H_0^{(1)}(kr(\tau, t)), \quad (2.11)$$

这里 $H_\mu^{(1)}(\cdot)$ 表示第一类 μ 阶 Hankel 函数,

$$\begin{aligned} r(\tau, t) &= |\gamma(\tau) - \gamma(t)| := \sqrt{[\gamma_1(\tau) - \gamma_1(t)]^2 + [\gamma_2(\tau) - \gamma_2(t)]^2}, \\ g(\tau) &= \frac{2e^{-ik\gamma(\tau) \cdot \hat{\mathbf{a}}}}{ik} \left(\frac{\partial u^I}{\partial \mathbf{n}}(\gamma(\tau)) - ik u^I(\gamma(\tau)) \right) - \mathbf{n}_{\gamma(\tau)} \cdot \hat{\mathbf{a}} + |\mathbf{n}_{\gamma(\tau)} \cdot \hat{\mathbf{a}}| \\ &\quad - \int_0^{2\pi} K(\tau, t) (\mathbf{n}_{\gamma(t)} \cdot \hat{\mathbf{a}} - |\mathbf{n}_{\gamma(t)} \cdot \hat{\mathbf{a}}|) e^{ik(\gamma(t) - \gamma(\tau)) \cdot \hat{\mathbf{a}}} dt. \end{aligned}$$

由曲线 Ω 的参数方程易得, 法向量 $\mathbf{n}_{\gamma(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{(\gamma'_1(\tau))^2 + (\gamma'_2(\tau))^2}} (\gamma'_2(\tau), -\gamma'_1(\tau))$.

3 高效配置法

当一个平面波 $u^I(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}}}$ 入射在一凸障碍物 Ω 上, 两个连接点 T_2 和 T_4 将 Ω 的边界分成两个部分, 即“明区域”(illuminated zone) 和“暗区域”(shadow zone), 而 T_1 和 T_3 分别在暗区域和明区域内且满足 $|\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{n}(\gamma(t_j))| = |\hat{\mathbf{a}}| \cdot |\mathbf{n}(\gamma(t_j))|$, 其中 $\mathbf{n}(\gamma(t_j))$ 表示关于点 $\gamma(t_j) = T_j$ ($j = 1, 3$) 的法向量, 如图 1 所示. 这里选取参数 t 满足 $T_1 = \gamma(t_1) = \gamma(0) = \gamma(2\pi)$. 记 $\gamma(t_j) = T_j$ ($j = 2, 3, 4$),

图 1 障碍物 Ω 示意图: T_2 和 T_4 为明区域与暗区域的连接点

$$\Lambda_1 = [0, t_2], \quad \Lambda_2 = [t_2, t_3], \quad \Lambda_3 = [t_3, t_4], \quad \Lambda_4 = [t_4, 2\pi].$$

定义 $\Gamma_j = \gamma(\Lambda_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

我们分两种不同方法选取积分区间 $[0, 2\pi]$ 的配置点, 即在明区域按多项式增加方式选取, 而在暗区域按照几何增加方式选取. 具体选取如下:

设波数 $k \gg 1$, N , M 和 q 都是正整数. 当 $n = 0, 1, \dots, N-1$, $m = 0, 1, \dots, M-1$ 时, 记

$$\begin{aligned} \tau_{1,m}^S &= (t_2 + \lambda) - \lambda \left(\frac{t_2 + \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{M-m}{M}}, & \tau_{2,m}^S &= (t_4 - \lambda) + \lambda \left(\frac{2\pi - t_4 + \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{m}{M}}, \\ \tau_{1,n}^I &= t_2 + (t_3 - t_2) \left(\frac{n}{N} \right)^q, & \tau_{2,n}^I &= t_4 - (t_4 - t_3) \left(\frac{N-n}{N} \right)^q, \end{aligned}$$

其中 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{2\pi}{k}}$, q 是大于等于 $\frac{1}{3} \ln k + 1$ 的最小正整数, 即 $q = \lfloor \frac{1}{3} \ln k + 1 \rfloor$. 这样我们的网格点集 $\Xi_{\aleph}$ 定义为

$$\Xi_{\aleph} = \{\tau_{j,m}^S \mid j = 1, 2; m = 0, 1, \dots, M-1\} \cup \{\tau_{j,n}^I \mid j = 1, 2; n = 0, 1, \dots, N-1\}, \quad (3.1)$$

从而网格点集 $\Xi_{\aleph}$ 的基数为

$$\aleph := \text{Card}(\Xi_{\aleph}) = 2(M + N), \quad (3.2)$$

如图 2 所示.

若取 $\varrho_m = \tau_{1,m}^S$, $\varrho_{m+M+2N} = \tau_{2,m}^S$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, $\varrho_{n+M} = \tau_{1,n}^I$, $\varrho_{n+M+N} = \tau_{2,n}^I$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, 那么网格点集 $\Xi_{\aleph}$ 能简化为

$$\Xi_{\aleph} = \{\varrho_j \mid j = 0, 1, \dots, \aleph - 1\}. \quad (3.3)$$

然后, 我们将点集 $\Xi_{\aleph}$ 以 $\aleph$ 为周期进行周期化, 即对任意 $n, m \in \mathbb{Z}$, 有 $\varrho_{n+m\aleph} = \varrho_n$ 成立.

利用 (3.3) 中网格点集 $\Xi_{\aleph}$, 我们定义相应近似空间 $\Pi_{\aleph, \mu} \subset L^2[0, 2\pi]$ 为

$$\begin{aligned} \Pi_{\aleph, \mu} &= \{\sigma \in L^2[0, 2\pi] : \sigma \text{ 是 } [t_j, t_{j+1}] \text{ 上不超过 } \mu \text{ 阶的多项式, 而 } \sigma \\ &\text{在 } (0, t_j) \cup (t_{j+1}, 2\pi) \text{ 上为 } 0, \text{ 其中 } j = 0, 1, \dots, \aleph - 1\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

这是一个 $(\mu + 1)\aleph$ 维空间.

设 $\mathbb{V}_{\aleph} \subset \Pi_{\aleph, \mu}$ 是关于点 ϱ_j ($j = 0, 1, \dots, \aleph - 1$) 唯一可解的 $\aleph$ 维子空间. 那么利用配置法解积分方程 (2.8) 就是, 寻找未知函数 $\psi(s)$ 的近似解 $\tilde{\psi}(s) \in \mathbb{V}_{\aleph}$ 满足如下线性方程组:

$$\tilde{\psi}(\varrho_n) + \int_0^{2\pi} K(\varrho_n, t) e^{ik(\gamma(t) - \gamma(\varrho_n)) \cdot \hat{a}} \tilde{\psi}(t) dt = g(\varrho_n), \quad n = 0, 1, \dots, \aleph - 1. \quad (3.5)$$

假设 $\mathbb{V}_{\aleph} = \text{span}\{\varphi_0(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_{\aleph-1}(s)\}$, 则近似解 $\tilde{\psi}(s) \in \mathbb{V}_{\aleph}$ 可表示为

$$\tilde{\psi}(s) = \sum_{m=0}^{\aleph-1} c_m \varphi_m(s). \quad (3.6)$$

图 2 区间 $[0, 2\pi]$ 上网格选取示意图

将上式代入 (3.5) 可得

$$\sum_{m=0}^{\aleph-1} c_m \left\{ \varphi_m(\varrho_n) + \int_0^{2\pi} K(\varrho_n, t) e^{ik(\gamma(t)-\gamma(\varrho_n)) \cdot \hat{\mathbf{a}}} \varphi_m(t) dt \right\} = g(\varrho_n), \quad n = 0, 1, \dots, \aleph-1. \quad (3.7)$$

设矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\aleph} &= [\varphi_m(\varrho_n)]_{n=0,1,\dots,\aleph-1; m=0,1,\dots,\aleph-1}, \\ \mathbf{K}_{\aleph} &= \left[\int_0^{2\pi} K(\varrho_n, t) e^{ik(\gamma(t)-\gamma(\varrho_n)) \cdot \hat{\mathbf{a}}} \varphi_m(t) dt \right]_{n=0,1,2,\dots,\aleph-1; m=0,1,\dots,\aleph-1}, \end{aligned}$$

向量

$$\vec{\mathbf{x}}_{\aleph} = [c_n]_{n=0,1,\dots,\aleph-1}, \quad \vec{\mathbf{b}}_{\aleph} = [g(\varrho_n)]_{n=0,1,\dots,\aleph-1},$$

则方程组 (3.7) 等价于如下矩阵形式:

$$(\mathbf{E}_{\aleph} + \mathbf{K}_{\aleph}) \vec{\mathbf{x}}_{\aleph} = \vec{\mathbf{b}}_{\aleph}. \quad (3.8)$$

下面研究 $\aleph$ 维解空间 $\mathbb{V}_{\aleph}$ 的基函数 $\varphi_n(s)$ ($n = 0, 1, \dots, \aleph-1$) 为一阶线性 B 样条函数, 即

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} 0, & s < \varrho_{n-1}, \\ \frac{s - \varrho_{n-1}}{\varrho_n - \varrho_{n-1}}, & \varrho_{n-1} \leq s < \varrho_n, \\ \frac{\varrho_{n+1} - s}{\varrho_{n+1} - \varrho_n}, & \varrho_n \leq s \leq \varrho_{n+1}, \\ 0, & s > \varrho_{n+1}, \end{cases} \quad (3.9)$$

容易得到

$$\varphi_n(\varrho_m) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (3.10)$$

由此可得 (3.8) 中矩阵 $\mathbf{E}_{\aleph}$ 是一个 $\aleph$ 阶单位矩阵.

定义算子

$$(\mathcal{P}_{\aleph} f)(s) = \sum_{n=0}^{\aleph-1} f(\varrho_n) \varphi_n(s), \quad (3.11)$$

易证算子 $\mathcal{P}_{\aleph}$ 是空间 $\mathbb{V}_{\aleph}$ 上正交投影算子.

定理 1 设 $\psi(s) \in C^2([0, 2\pi])$, 则 $\psi(s)$ 与其在空间 $\mathbb{V}_{\aleph}$ 上的投影 $(\mathcal{P}_{\aleph} \psi)(s)$ 在子区间 $[\varrho_n, \varrho_{n+1}]$ 上二者之间的误差为

$$\max_{\varrho_n \leq s \leq \varrho_{n+1}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_{\aleph} \psi)(s)| \leq \frac{1}{8} (\varrho_{n+1} - \varrho_n)^2 \|\psi''(s)\|_{L^\infty([\varrho_n, \varrho_{n+1}])}. \quad (3.12)$$

证明 由于 $\psi(\varrho_n) - (\mathcal{P}_{\aleph} \psi)(\varrho_n) = \psi(\varrho_{n+1}) - (\mathcal{P}_{\aleph} \psi)(\varrho_{n+1}) = 0$, 因此函数 $|\psi(s) - (\mathcal{P}_{\aleph} \psi)(s)|$ 在闭区间 $[\varrho_n, \varrho_{n+1}]$ 上的最大值必需在闭区间的内点取得, 设为 ξ . 由 Fermat 引理知, $\psi'(\xi) - (\mathcal{P}_{\aleph} \psi)'(\xi) = 0$, 即

$$\psi'(\xi) = (\mathcal{P}_{\aleph} \psi)'(\xi) = \frac{\psi(\varrho_{n+1}) - \psi(\varrho_n)}{\varrho_{n+1} - \varrho_n}.$$

不妨设 $\xi - \varrho_n \leq \varrho_{n+1} - \xi$, 将 $(\mathcal{P}_N \psi)(\xi)$ 在点 $s = \varrho_n$ 处进行 Taylor 展开,

$$(\mathcal{P}_N \psi)(\xi) = \psi(\varrho_n) + \frac{\psi(\varrho_{n+1}) - \psi(\varrho_n)}{\varrho_{n+1} - \varrho_n}(\xi - \varrho_n) = \psi(\varrho_n) + \psi'(\xi)(\xi - \varrho_n),$$

从而存在 $\eta \in (\varrho_n, \xi)$, 使得

$$\psi(\xi) - (\mathcal{P}_N \psi)(\xi) = \psi(\xi) - \psi(\varrho_n) - \psi'(\xi)(\xi - \varrho_n) = \frac{1}{2}(\xi - \varrho_n)^2 \psi''(\eta).$$

故 (3.12) 成立. $\square$

为了研究数值解 $\tilde{\psi}(s)$ 与波数 k 的关系, 我们需研究 $\psi(s)$ 的渐近关系. 对于大波数 k , 由文献 [18] 容易得到 (参见文献 [18, 第 244 页]): 当 $|\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{n}_x| \neq 0$ 时,

$$w(\mathbf{x}) \sim \sum_{\ell \geq 1} b_\ell(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{x}) k^{-\ell}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.13)$$

其中系数 $b_\ell(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{x}) (\in C^\infty)$ 与波数 k 无关.

而当 $\mathbf{x} \in \Gamma$ 在 $|\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{n}_x| = 0$ 的附近, 即 $\mathbf{x}$ 在明区域与暗区域的连接点附近时, 函数 $w(\mathbf{x})$ 的渐近性态与 (3.13) 有很大区别.

引理 2 (参见文献 [19, 定理 5.1]) 存在 $\Delta > 0$, 当 $s \in \mathbb{I}_\Delta := (t_2 - \Delta, t_2 + \Delta) \cup (t_4 - \Delta, t_4 + \Delta)$ 时, $\psi(s)$ 有如下的渐近展式:

$$\psi(s) \sim |\mathbf{n}_{\gamma(s)} \cdot \hat{\mathbf{a}}| - \mathbf{n}_{\gamma(s)} \cdot \hat{\mathbf{a}} + \sum_{\ell, m \geq 0} k^{-\frac{2\ell+1}{3}-m} d_{\ell, m}(s) \Theta^{(\ell)}(k^{\frac{1}{3}} Z(s)), \quad (3.14)$$

其中函数 $d_{\ell, m}$ 、 Θ 和 Z 具有如下一些性质:

- (i) $d_{\ell, m}$ 是定义在 $\mathbb{I}_\Delta$ 上的 C^∞ 类复值函数;
- (ii) Z 是定义在 $\mathbb{I}_\Delta$ 上的 C^∞ 类实值函数, 且 t_2 和 t_4 是函数 Z 的单零点;
- (iii) Θ 是一个整函数.

由上述引理可得解 $\psi(s)$ 在暗区域具有如下指数衰减形式.

引理 3 (参见文献 [23, 定理 2]) 存在 $\Delta > 0$, 以及与波数 k 和 s 无关的正常数 C_1 和 C_2 , 使得对任意 $s \in [t_4 + \Delta - 2\pi, t_2 - \Delta]$, 有

$$|v(\gamma(s))| \leq C_1(1+k)^{\frac{2}{3}} e^{-C_2 k^{\frac{1}{3}} \Delta}.$$

引理 4 (参见文献 [19, 定理 5.4]) 存在与波数 k 无关的正常数 C , 当波数 k 足够大时, 对于任意 $s \in \mathbb{I}_\Delta$, 有

$$\psi''(s) \leq \frac{Ck^{\frac{1}{3}}}{(1+k^{\frac{1}{3}}|(s-t_2)(s-t_4)|)^4}.$$

下面研究 $\psi''(s)$ 的渐近关系.

定理 5 存在与波数 k 无关的正常数 C , 当波数 k 足够大时, 有

$$\psi''(s) \leq \begin{cases} Ck^{\frac{1}{3}}, & s \in \mathbb{I}_\Delta, \\ Ck^{-1}, & s \in [t_2 + \Delta, t_4 - \Delta], \end{cases} \quad (3.15)$$

证明 由引理 4 和表达式 (3.13) 可知结论显然成立. $\square$

定理 6 记 $\mathbb{I}_S = [\varrho_{2N+M+1} - 2\pi, \varrho_{M-1}]$, $\mathbb{I}_I = [\varrho_{M+1}, \varrho_{2N+M-1}]$, $\mathbb{I}_{\Delta_S} = [\varrho_{M-1}, \varrho_M] \cup [\varrho_{2N+M}, \varrho_{2N+M+1}]$, $\mathbb{I}_{\Delta_I} = [\varrho_M, \varrho_{M+1}] \cup [\varrho_{2N+M-1}, \varrho_{2N+M}]$. 若 $\psi(s) \in C^2([0, 2\pi])$, 则 $(\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)$ 与 $\psi(s)$ 有如下误差估计:

$$\max_{s \in \mathbb{I}_S} |\psi(s) - (\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)| \leq Ck^{-\frac{1}{3}} e^{-C_0 k^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4M}}}, \quad (3.16)$$

$$\max_{s \in \mathbb{I}_I} |\psi(s) - (\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)| \leq CN^{-2} k^{-\frac{2}{3}}, \quad (3.17)$$

$$\max_{s \in \mathbb{I}_{\Delta_S}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)| \leq CM^{-2} k^{-\frac{1}{24}}, \quad (3.18)$$

$$\max_{s \in \mathbb{I}_{\Delta_I}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)| \leq CN^{-2} k^{-(\frac{2}{3} \ln N - \frac{1}{3})}, \quad (3.19)$$

其中 C 和 C_0 是与波数 k ($\gg 1$) 无关的正常数.

证明 针对 s 不同, 我们分四种情形来证明, 其中 C 和 C_0 仅表示是与波数 k 和变量 s 无关的常数.

(i) 当 $s \in \mathbb{I}_S$ 时, 由网格点集 $\Xi_\mathbb{N}$ 的定义 (见 (3.1)) 可得引理 3 中的 Δ 为

$$\begin{aligned} \Delta &= \min \left\{ \lambda \left[\left(\frac{t_2 + \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right], \quad \lambda \left[\left(\frac{2\pi - t_4 + \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right] \right\} \\ &= \min \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \left[\left(\frac{t_2 k^{\frac{1}{4}} + (2\pi)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right], \left[\left(\frac{(2\pi - t_4) k^{\frac{1}{4}} + (2\pi)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

再由 (2.7) 和引理 3 易得

$$\max_{s \in \mathbb{I}_S} |\psi(s) - (\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)| \leq Ck^{-1} (1+k)^{\frac{2}{3}} e^{-C_0 k^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4M}}} \leq Ck^{-\frac{1}{3}} e^{-C_0 k^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4M}}}.$$

(ii) 当 $s \in \mathbb{I}_I$ 时, 我们先研究当 $\ell = 1, 2, \dots, N-1$ 时,

$$\begin{aligned} \max_{\varrho_{M+\ell} \leq s \leq \varrho_{M+\ell+1}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)| &\leq \frac{1}{8} (\varrho_{M+\ell+1} - \varrho_{M+\ell})^2 \|\psi''(s)\|_{L^\infty([\varrho_{M+\ell}, \varrho_{M+\ell+1}])} \\ &\leq \frac{C(t_3 - t_2)^2}{k} \left[\left(\frac{\ell+1}{N} \right)^q - \left(\frac{\ell}{N} \right)^q \right]^2 \\ &\leq \frac{C(t_3 - t_2)^2}{k} \left[1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^q \right]^2 \\ &= \frac{C(t_3 - t_2)^2}{k} \left[C_q^1 \left(\frac{N-1}{N} \right)^{q-1} \frac{1}{N} + \dots + C_q^q \frac{1}{N^q} \right]^2 \\ &\leq \frac{C(t_3 - t_2)^2}{k} \left[2^q \left(\frac{N-1}{N} \right)^{q-1} \frac{1}{N} \right]^2 \\ &\leq CN^{-2} k^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

而当 $\ell = N, N+1, \dots, 2N-2$ 时, 同理可得

$$\max_{\varrho_{M+\ell} \leq s \leq \varrho_{M+\ell+1}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_\mathbb{N}\psi)(s)| \leq CN^{-2} k^{-\frac{2}{3}}.$$

这就证明了 (3.17).

(iii) 当 $s \in \mathbb{I}_{\Delta_S}$ 时, 由定理 1 和 5 可知,

$$\begin{aligned} \max_{\varrho_{M-1} \leq s \leq \varrho_M} |\psi(s) - (\mathcal{P}_N \psi)(s)| &\leq \frac{1}{8} (\varrho_M - \varrho_{M-1})^2 \|\psi''(s)\|_{L^\infty([\varrho_{M-1}, \varrho_M])} \\ &\leq C \lambda^2 \left[\left(\frac{t_2 + \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right]^2 k^{\frac{1}{3}} \\ &= C \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{t_2 k^{\frac{1}{4}} + (2\pi)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right]^2 k^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C k^{-\frac{1}{6}} \left[\left(\frac{t_2 k^{\frac{1}{4}} + (2\pi)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{M}} - 1 \right]^2. \end{aligned}$$

记 $h(M, k) := \left(\frac{t_2 k^{\frac{1}{4}} + (2\pi)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{M}} - 1$, 则 $h > 0$. 利用二项式展开可得

$$\frac{t_2 k^{\frac{1}{4}} + (2\pi)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} = (h+1)^M \geq \frac{M(M-1)(M-2)(M-3)}{24} h^4.$$

由上式可得

$$h^2 \leq C M^{-2} k^{\frac{1}{8}},$$

从而有

$$\max_{\varrho_{M-1} \leq s \leq \varrho_M} |\psi(s) - (\mathcal{P}_N \psi)(s)| \leq C M^{-2} k^{-\frac{1}{24}}.$$

同理可证

$$\max_{\varrho_{2N+M} \leq s \leq \varrho_{2N+M+1}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_N \psi)(s)| \leq C M^{-2} k^{-\frac{1}{24}}.$$

(iv) 当 $s \in \mathbb{I}_{\Delta_I}$ 时, 同样利用定理 1 和 5, 可得

$$\begin{aligned} \max_{\varrho_M \leq s \leq \varrho_{M+1}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_N \psi)(s)| &\leq \frac{1}{8} (\varrho_{M+1} - \varrho_M)^2 \|\psi''(s)\|_{L^\infty([\varrho_M, \varrho_{M+1}])} \leq C \left(\frac{1}{N} \right)^{2q} k^{\frac{1}{3}} \\ &\leq C \left(\frac{1}{N} \right)^{\frac{2}{3} \ln k + 2} k^{\frac{1}{3}} = C N^{-2} k^{-(\frac{2}{3} \ln N - \frac{1}{3})}. \end{aligned}$$

同理可证 $\max_{\varrho_{2N+M-1} \leq s \leq \varrho_{2N+M}} |\psi(s) - (\mathcal{P}_N \psi)(s)| \leq C N^{-2} k^{-(\frac{2}{3} \ln N - \frac{1}{3})}$. $\square$

在 (2.8) 中, 记函数 $\tilde{K}(\tau, t) = K(\tau, t) e^{ik[\gamma(t) - \gamma(\tau)] \cdot \hat{\mathbf{a}}}$. 根据文献 [24, 定理 13.9] 可知, 真实解 $\psi(s)$ 与其在空间 $\mathbb{V}_N$ 上的投影 $(\mathcal{P}_N \psi)(s)$ 和近似解 $\tilde{\psi}(s)$ 之间的关系如下.

引理 7 当 N 和 M 足够大时, 则有下列误差估计成立:

$$\|\psi(s) - \tilde{\psi}(s)\|_\infty \leq C \|\psi(s) - (\mathcal{P}_N \psi)(s)\|_\infty,$$

其中 C 是与 $\tilde{K}(\tau, t)$ 有关的正常数.

设积分方程 (2.5) 中未知函数 $v(\gamma(t))$ 的数值解为 $\tilde{v}(\gamma(t))$, 即

$$\tilde{v}(\gamma(t)) = ik(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{a}} - |\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{a}}| + \tilde{w}(\gamma(t))) e^{ik\gamma(t) \cdot \hat{\mathbf{a}}}.$$

利用 (2.7) 中 $v(\gamma(s))$ 与 $w(\gamma(s))$ 二者关系, 以及定理 6 和引理 7, 易得下面的定理.

定理 8 若 $\tilde{v}(\gamma(s)) \in C^2([0, 2\pi])$, 当 N 和 M 足够大时, $\tilde{v}(\gamma(s))$ 与 $v(\gamma(s))$ 有如下误差估计:

$$\max_{s \in [0, 2\pi]} |v(\gamma(s))(s) - \tilde{v}(\gamma(s))| \leq Ck[N^{-2}k^{-\frac{2}{3}} + N^{-2}k^{-(\frac{2}{3} \ln N - \frac{1}{3})} + M^{-2}k^{-\frac{1}{24}} + k^{-\frac{1}{3}}e^{-C_0k^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4M}}}], \quad (3.20)$$

其中 C 是与 $\tilde{K}(\tau, t)$ 有关的正常数.

注 9 (i) 利用定理 8 中误差估计 (3.20), 容易得到 $\tilde{v}(\gamma(s))$ 与 $v(\gamma(s))$ 的 $L^2[0, 2\pi]$ 误差估计

$$\|v(\gamma(s))(s) - \tilde{v}(\gamma(s))\|_2 \leq Ck[N^{-2}k^{-\frac{2}{3}} + N^{-2}k^{-(\frac{2}{3} \ln N - \frac{1}{3})} + M^{-2}k^{-\frac{1}{24}} + k^{-\frac{1}{3}}e^{-C_0k^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4M}}}], \quad (3.21)$$

其中

$$\|v(\gamma(t)) - \tilde{v}(\gamma(t))\|_2 = \left[\int_0^{2\pi} |v(\gamma(t)) - \tilde{v}(\gamma(t))|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) (3.21) 表明, 该数值解在相同自由度条件下的收敛率会随着波数 k 的增加而至少提高 $O(k^{-\frac{1}{24}})$ ($N \geq 3$), 而在文献 [19] 中的却是随着波数 k 的增加而至少降低 $O(k^{\frac{1}{9}})$.

(iii) (3.21) 中的误差项 $k^{-\frac{1}{3}}e^{-C_0k^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4M}}}$ 表明, 当波数 k 不是很大的情形下, 暗区域退散性不是十分明显.

(iv) 将上述得到数值解 $\tilde{v}(\mathbf{x})$ 代入表达式 (2.4), 从而得到 Helmholtz 方程 (2.1) 的数值解

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u^I(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} \tilde{v}(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})ds_{\mathbf{y}}.$$

根据文献 [1], 有

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}} e^{i|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) \right), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty, \quad (3.22)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma_0}{2\pi} + O\left(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow 0, \quad (3.23)$$

其中 γ_0 表示 Euler 常数. 由 (3.22) 和 (3.23) 易得 $\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}} \int_{\partial\Omega} |\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|ds_{\mathbf{y}}$ 存在, 记为 M . 再将 (3.20) 代入 (2.4), 可得

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x})| &\leq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}} \int_{\partial\Omega} |v(\mathbf{y}) - \tilde{v}(\mathbf{y})| |\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| ds_{\mathbf{y}} \\ &\leq CMk[N^{-2}k^{-\frac{2}{3}} + N^{-2}k^{-(\frac{2}{3} \ln N - \frac{1}{3})} + M^{-2}k^{-\frac{1}{24}} + k^{-\frac{1}{3}}e^{-C_0k^{\frac{1}{12} + \frac{1}{4M}}}], \end{aligned} \quad (3.24)$$

此处 M 是与 k 有关的量.

4 数值例子

本节将通过一些数值例子来说明我们的配置法非常有效. 鉴于刚度矩阵中的元素需要计算积分, 这里采用 MATLAB 中自带的积分程序 quadgk(), 因此, 在这里我们只计算波数 k 相对不大的情形. 为了便于计算结果的比较, 我们首先假设边界 Γ 是一单位圆周, 且设其参数方程为

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4.1)$$

由文献 [19] 可知, 边界积分方程 (2.5) 中的未知函数 $v(\boldsymbol{x})$ 的真实解的 Fourier 级数可由边界上函数 $f(\boldsymbol{x}) = f(\gamma(t))$ 的 Fourier 系数来表示, 即

$$v(\gamma(t)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{v}_m e^{imt}, \quad \text{其中 } \hat{v}_m = \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) e^{-imt} dt, \quad (4.2)$$

$$f(\gamma(t)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}_m e^{imt}, \quad \text{其中 } \hat{f}_m = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) e^{-imt} dt, \quad (4.3)$$

则有

$$\hat{v}_m = \frac{2\hat{f}_m}{\pi k H_{|m|}^{(1)}(k) [J_{|m|}(k) + iJ'_{|m|}(k)]}, \quad (4.4)$$

其中 $J_{|m|}(\cdot)$ 表示第一类 m 阶 Bessel 函数.

例 10 取 $\hat{\boldsymbol{a}} = (1, 0)$, 则 $\boldsymbol{n}_x \cdot \hat{\boldsymbol{a}} = \cos t$, 因此,

$$f(\gamma(t)) = ik(\cos t - 1)e^{ik \cos t}, \quad (4.5)$$

$$v(\gamma(t)) = ik(\cos t - |\cos t| + w(\gamma(t)))e^{ik \cos t}. \quad (4.6)$$

图 3 表示当 $k = 800$ 时函数 $v(\gamma(t))$ 和 $w(\gamma(t))$ 的实部与虚部示意图. 由图 3 可以看出,

(i) 函数 $v(\gamma(t))$ 的振荡性比 $w(\gamma(t))$ 剧烈很多;

(ii) 函数 $w(\gamma(t))$ 的实部与虚部基本上是同一个数量级, 因此, 拟设解 (4.6) 选取比文献 [19] 中应更为合适 (参见文献 [19, 图 4]).

图 3 当 $k = 800$ 时, 函数 $v(\gamma(t))$ 和 $w(\gamma(t))$ 的实部与虚部示意图

在方程组 (3.6) 中,

$$K(\varrho_n, t) = \frac{k}{2} \left\{ H_0^{(1)}(kr(\varrho_n, t)) - iH_1^{(1)}(kr(\varrho_n, t)) \frac{\cos \varrho_n (\cos \varrho_n - \cos t) + \sin \varrho_n (\sin \varrho_n - \sin t)}{r(\varrho_n, t)} \right\},$$

$$g(\varrho_n) = \cos \varrho_n + |\cos \varrho_n| - 2 - \int_0^{2\pi} K(\varrho_n, t) (\cos t - |\cos t|) e^{ik(\cos t - \cos \varrho_n)} dt.$$

将 (3.9) 代入 (3.6) 可得, 矩阵 $\mathbf{E}_{M,N}$ 是一个 $2(M+N) \times 2(M+N)$ 的单位矩阵, 而

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} K(\varrho_n, t) e^{ik(\cos t - \cos \varrho_n)} \varphi_m(t) dt \\ &= \int_{\varrho_{m-1}}^{\varrho_m} K(\varrho_n, t) e^{ik(\cos t - \cos \varrho_n)} \frac{t - \varrho_{m-1}}{\varrho_m - \varrho_{m-1}} dt + \int_{\varrho_m}^{\varrho_{m+1}} K(\varrho_n, t) e^{ik(\cos t - \cos \varrho_n)} \frac{\varrho_{m+1} - t}{\varrho_{m+1} - \varrho_m} dt. \end{aligned}$$

由于边界 Γ 是单位圆周, 因此, 在上半部分和在下半部分的解是对称的, 故我们只比较上半部分的数据结果. 鉴于我们的配置法中是得到关于 $L^\infty[0, 2\pi]$ 的误差估计 (详见定理 8), 此外根据文献 [18] 可知, 散射问题在明区域与暗区域的连接点 (这里对应点 $t = \frac{\pi}{2}$ 和 $t = \frac{3\pi}{2}$) 附近变化明显 (见图 3), 故这里只比较在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 附近的结果.

当 $k = 400$, $M = N = 8$ 时, 此时,

$$q = \left\lfloor \frac{1}{3} \ln 400 + 1 \right\rfloor = \lfloor 2.9972 \rfloor = 3,$$

靠近明区域与暗区域的连接点 $\varrho_8 = \frac{\pi}{2}$ 的最近的配置点

$$\begin{aligned} \varrho_7 &= \frac{\pi}{2} - \sqrt[4]{\frac{2\pi}{400} \left[\left(\frac{\pi \sqrt[4]{400} + 2\sqrt[4]{2\pi}}{2\sqrt[4]{2\pi}} \right)^{\frac{1}{8}} - 1 \right]} \approx 1.48734643, \\ \varrho_9 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot 8^3} \approx 1.57386429. \end{aligned}$$

而当 $k = 800$, $M = N = 8$ 时, 此时,

$$q = \left\lfloor \frac{1}{3} \ln 800 + 1 \right\rfloor = \lfloor 3.2282 \rfloor = 4,$$

靠近明区域与暗区域的连接点 $\varrho_8 = \frac{\pi}{2}$ 最近的配置点

$$\begin{aligned} \varrho_7 &= \frac{\pi}{2} - \sqrt[4]{\frac{2\pi}{800} \left[\left(\frac{\pi \sqrt[4]{800} + 2\sqrt[4]{2\pi}}{2\sqrt[4]{2\pi}} \right)^{\frac{1}{8}} - 1 \right]} \approx 1.49396136, \\ \varrho_9 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \cdot 8^4} \approx 1.57117982. \end{aligned}$$

表 1 和 2 分别表示波数 $k = 400$ 在点 1.48734643、1.57079633、1.57386429、 π 处和波数 $k = 800$ 在点 1.49396136、1.57079633、1.57117982、 π 处数值结果和真实值的实部与虚部比较. 图 4 (图 4 正好验证了注 9(iii)) 和 5 分别表示 $k = 800$ 时 $M = 8$, $N = 8$ 和 $M = 64$, $N = 64$ 数值解与精确解的实部和虚部差异.

从表 1 和 2 中可以看出, 当波数 k 不大时, 在明区域与暗区域交接处 $s = \frac{\pi}{2}$ 的附近明区域 ($k = 400$, $s = 1.57386429$ 和 $k = 800$, $s = 1.57117982$) 分别比相应的暗区域 ($k = 400$, $s = 1.48734643$ 和 $k = 800$, $s = 1.49396136$) 的收敛更快.

表 1 $k = 400$ 时, $\psi(s)$ 与 $\tilde{\psi}(s)$ 的实部和虚部比较

	(M, N)	1.48734643	$\frac{\pi}{2}$	1.57386429	π
Real[ψ]	真实值	-0.03507945	-0.11489053	-0.11229757	-0.00000625
	(8, 8)	-0.03253419	-0.11423993	-0.11163658	-0.00000298
Real[$\tilde{\psi}$]	(16, 16)	-0.03446618	-0.11478663	-0.11217646	-0.00000624
	(32, 32)	-0.03492338	-0.11485669	-0.11226261	-0.00000639
	(64, 64)	-0.03503891	-0.11488599	-0.11228985	-0.00000616
Imag[ψ]	真实值	-0.05691367	-0.06690485	-0.06690079	-0.00249995
	(8, 8)	-0.05902249	-0.06683677	-0.06669787	-0.00249901
Imag[$\tilde{\psi}$]	(16, 16)	-0.05737152	-0.06686872	-0.06691406	-0.00250087
	(32, 32)	-0.05703695	-0.06689575	-0.06688907	-0.00249913
	(64, 64)	-0.05693922	-0.06690295	-0.06689913	-0.00249855

表 2 $k = 800$ 时, $\psi(s)$ 与 $\tilde{\psi}(s)$ 的实部和虚部比较

	(M, N)	1.49396136	$\frac{\pi}{2}$	1.57117982	π
Real[ψ]	真实值	-0.02028614	-0.09118842	-0.09086195	-0.00000156
	(8, 8)	-0.01744445	-0.09062446	-0.09035524	-0.00000108
Real[$\tilde{\psi}$]	(16, 16)	-0.01945031	-0.09106874	-0.09071044	-0.00000896
	(32, 32)	-0.02007929	-0.09116771	-0.09083738	-0.00000217
	(64, 64)	-0.02023035	-0.09118250	-0.09085610	-0.00000117
Imag[ψ]	真实值	-0.04234283	-0.05293416	-0.05293454	-0.00124999
	(8, 8)	-0.04464275	-0.05291800	-0.05280052	-0.00124914
Imag[$\tilde{\psi}$]	(16, 16)	-0.04278487	-0.05293993	-0.05289485	-0.00118367
	(32, 32)	-0.04246043	-0.05293562	-0.05293181	-0.00124775
	(64, 64)	-0.04237311	-0.05293258	-0.05293240	-0.00124884

图 4 当 $k = 800$, 取 $M = N = 8$ 时数值解与精确解的差异示意图: (a) 二者实部差异; (b) 二者虚部差异

图 5 当 $k = 800$, 取 $M = N = 32$ 时数值解与精确解的差异示意图: (a) 二者实部差异; (b) 二者虚部差异

同时我们采用足够多的结点和 Simpson 公式计算了 $k^{-1}\|v(\gamma(t)) - \tilde{v}(\gamma(t))\|_2$ 的收敛性趋势见图 6. 数值结果表明,

(i) L^2 误差会随着 M 和 N 的增加越来越小, 而 Domínguez 等的数值结果的误差是先减少后稳定或反而增加 (详见文献 [19, 图 3]);

(ii) L^2 误差相比于文献 [19] 中的数值结果而言小很多 (见表 3). 例如, 当 $M = N = 8$, $k = 400$ 时, L^2 误差还不到文献 [19] 中表 1 对应于自由度为 39 时的误差 $2.83\text{E-}04$ 的 $1/17$.

图 6 不同的 M 和 N 值时 $k^{-1}\|v(\gamma(t)) - \tilde{v}(\gamma(t))\|_2$ 的变化图示

表 3 $k^{-1}\|v(\gamma(t)) - \tilde{v}(\gamma(t))\|_2$ 的在不同 M 和 N 下的数值结果

	$M = N = 8$	$M = N = 16$	$M = N = 32$	$M = N = 64$
$k = 400$	1.6318E-05	4.5494E-06	1.2665E-06	2.8903E-07
$k = 800$	3.7977E-06	2.4363E-06	4.6458E-07	1.3717E-07

5 结论

高频散射问题的高效数值方法是当前数学研究的一个重要课题, 本文利用积分方程方法和配置法研究了二维高频散射问题, 得到其收敛性为 $O(k^{-\frac{1}{24}})$ ($k \gg 1$), 这是更优于收敛性独立与波数 k 的结果. 由于非光滑边界和三维问题的解渐近性态还没有得到解决, 因此, 该数值方法推广到非光滑边界或三维问题仍然没有得到解决.

致谢 感谢评审专家的评论及建设性建议.

参考文献

- Colton D, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1998
- Ihnenburg F, Babuška I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number, I: The h -version of the FEM. Comput Math Appl, 1995, 30: 9–37
- Babuška I, Sauter S. Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers? SIAM J Numer Anal, 1997, 34: 2392–2423
- Feng X, Wu H. hp -Discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz equation with large wave number. Math Comp, 2011, 80: 1997–2024
- 武海军. 高波数 Helmholtz 方程的内罚有限元方法. 中国科学: 数学, 2012, 42: 429–444
- Wu H. Pre-asymptotic error analysis of CIP-FEM and FEM for the Helmholtz equation with high wave number, I: Linear version. IMA J Numer Anal, 2014, 34: 1266–1288
- Engquist B, Ying L. A fast directional algorithm for high frequency acoustic scattering in two dimensions. Commun Math Sci, 2009, 7: 327–345
- Chen Z, Wu H. An adaptive finite element method with perfectly matched absorbing layers for the wave scattering by periodic structures. SIAM J Numer Anal, 2003, 41: 799–826
- Chen Z, Liu X. An adaptive perfectly matched layer technique for time-harmonic scattering problems. SIAM J Numer Anal, 2005, 43: 645–671
- Bao G, Li P, Wu H. An adaptive edge element method with perfectly matched absorbing layers for wave scattering by bi-periodic structures. Math Comp, 2010, 79: 1–34
- Shen J, Wang L. Analysis of a spectral-Galerkin approximation to the Helmholtz equation in exterior domains. SIAM J Numer Anal, 2007, 45: 1954–1978
- “10000 个科学难题” 数学编委会. 10000 个科学难题 (数学卷). 北京: 科学出版社, 2009, 501–502
- Chandler-Wilde S N. Ground effects in environmental sound propagation. PhD Thesis. Bradford: University of Bradford, 1988
- Abboud T, Nédélec J C, Zhou B. Méthode des équations intégrales pour les hautes fréquences. C R Math Acad Sci Paris, 1994, 318: 165–170
- Chandler-Wilde S N, Langdon S, Ritter L. A high-wavenumber boundary-element method for an acoustic scattering problem. Philos Trans R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 2004, 362: 647–671
- Langdon S, Chandler-Wilde S N. A wave number independent boundary element method for an acoustic scattering problem. SIAM J Numer Anal, 2006, 43: 2450–2477
- Chandler-Wilde S N, Langdon S. A Galerkin boundary element method for high frequency scattering by convex polygons. SIAM J Numer Anal, 2007, 45: 610–640
- Melrose R B, Taylor M E. Near peak scattering and the corrected Kirchhoff approximation for a convex obstacle. Adv Math, 1985, 55: 242–315

- 19 Domínguez V, Graham I G, Smyshlyaev V P. A hybrid numerical-asymptotic boundary integral method for high-frequency acoustic scattering. *Numer Math*, 2007, 106: 471–510
- 20 向淑晃. 一些高振荡积分、高振荡积分方程的高性能计算. *中国科学: 数学*, 2012, 42: 651–670
- 21 Bruno O P, Geuzaine C A, Monro J A, et al. Prescribed error tolerances within fixed computational times for scattering problems of arbitrarily high frequency: The convex case. *Philos Trans R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 2004, 362: 629–645
- 22 Giladi E, Keller J B. An asymptotically derived boundary element method for the Helmholtz equation. <https://www.researchgate.net/publication/235197843>, 2004
- 23 Zayaev A B, Filippov V B. Rigorous justification of the Friedlander-Keller formulas. *J Sov Math*, 1986, 32: 134–143
- 24 Kress R. *Linear Integral Equation*. Berlin: Springer-Verlag, 1989

A fast collocation method for high-frequency acoustic scattering

LI SongHua, XIAN Jun & XIANG ShuHuang

Abstract Based on the boundary integral equation reduced from the sound-soft high frequency scattering problem in two dimensions, we firstly convert the density to slow oscillatory from high oscillatory by using the asymptotic behaviour as $k \rightarrow +\infty$ of density in a strictly convex bounded region. Furthermore, the equivalence of second Fredholm integral equation is obtained. Using the composite mesh with a polynomial grading on the illuminated zone and a geometric grading on the shadow zone, we obtain that the convergence is $O(k^{-\frac{1}{24}})$ ($k \gg 1$). Moreover, examples are given for demonstrating that our method has good accuracy.

Keywords high frequency scattering, Helmholtz equation, boundary element method, collocation method

MSC(2010) 65N35, 65R20, 65N38

doi: 10.1360/N012015-00080