单位球上 Dirichlet 空间上的分式线性复合算子

周泽华*, 袁程

天津大学数学系, 天津 300072

* E-mail: zehuazhou2003@yahoo.com.cn

收稿日期: 2007-10-02; 接受日期: 2008-10-23

国家自然科学基金 (批准号: 10671141, 10371091) 资助项目

摘要 本文主要研究单位球上 Dirichlet 空间上的分式线性复合算子的伴随算子, 讨论了该空间以及它与常值函数的商空间上此类算子的正规性和本性正规性, 并得到非椭圆型分式线性映射和其伴随映射的复合为椭圆或抛物型分式线性映射的结论.

关键词 分式线性复合算子 Dirichlet 空间 伴随算子 本性正规性

MSC(2000) 主题分类 47B38, 46E15, 32A37

1 引言

过去一些年, 有许多论文研究函数空间上的复合算子, 可查阅文献 [1-9].

Cowen 和 MacCluer^[10] 在 2000 年的时候讨论了 $\mathbb{C}^N$ 中单位球上一类所谓分式线性映射的全纯映射. 它是单位圆盘上分式线性映射和单位球上全纯自同构的一类推广. 单位圆盘上分式线性映射在文献 [11] 中已经被充分的讨论, 有很多很好的结果. Cowen 和 MacCluer 用 Krein 空间的技巧, 得到了很多结果 (如: 此类映射诱导的复合算子在 $H^p(B_N)$ 和 $A_\alpha^2(B_N)$ 上的有界性, 伴随算子的形式及 Schroeder 方程等). 对于球上解析函数的 Hilbert 空间, 如果它的再生核具有形式 $K_w(z) = (1 - \langle z, w \rangle)^{-r}$, 则 $C_\varphi^* = T_g C_\sigma T_h^*$. 利用这一公式, MacCluer 和 Weir^[12] 给出了分式线性复合算子本性正规的一个充分条件.

最近, 关于球上分式线性映射及其诱导的复合算子, 有很多结果问世. Bisi 和 Bracci^[13] 从几何上考察了这一类映射; Cowen 等^[14] 也得到了此类映射的很多几何性质; 参考文献 [12-16].

在文献 [17] 中, 单位圆盘上 Dirichlet 空间上分式线性复合算子的很多漂亮的结果 (如: 伴随, 正规性, 谱等) 都已经得到. 本文受其启发, 得出单位球上 Dirichlet 空间上分式线性复合算子的一些结果, 如: 伴随、正规性、本性正规性等. 单位球上分式线性复合算子的伴随, 是另一个分式线性复合算子与一个秩为 2 的算子之和, 这一点与单位圆盘的情形是一样的.

引用格式: 周泽华, 袁程. 单位球上 Dirichlet 空间上的分式线性复合算子. 中国科学 A, 2009, 39(3): 333-343
Zhou Z H, Yuan C. Linear fractional composition operators on the Dirichlet space in the unit ball. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0035-5

利用伴随算子的公式, 我们得到分式线性复合算子正规性与本性正规性的一些结论, 与单位圆盘的情形和核函数形式为 $(1 - \langle z, w \rangle)^{-r}$ 的情形相比, 有很大的区别.

2 一些定义和预备知识

定义 2.1 设 $A = (a_{j,k})$ 是一个 $N \times N$ 矩阵, $B = (b_j)$ 和 $C = (c_i)$ 都是 N 维列向量, D 是一个复常数. $\mathbb{C}^N$ 中的分式线性映射 φ 是指具有如下形式的全纯映射:

$$\varphi(z) = \frac{Az + B}{\langle z, C \rangle + D},$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中的 Euclidean 内积. 如果分式线性映射 φ 作用在单位球 $B_N = \{z \in \mathbb{C}^N : \|z\|^2 < 1\}$ 上满足 $\varphi(B_N) \subset B_N$, 则 φ 称作 B_N 上的分式线性映射, 记作 $\varphi \in \text{LFT}(B_N)$.

特别地, B_N 上全纯自同构都是分式线性映射. B_N 上全纯自同构全体记为 $\text{Aut}(B_N)$, 直接计算可得, 如果 $\psi \in \text{Aut}(B_N)$, $\varphi \in \text{LFT}(B_N)$, 则 $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} \in \text{LFT}(B_N)$.

定义 2.2 令 $\varphi(z) = (Az + B)(\langle z, C \rangle + D)^{-1}$ 是一个分式线性映射, 则矩阵

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}$$

叫做 φ 的相关矩阵. 若 $\varphi \in \text{LFT}(B_N)$, 则

$$\sigma(z) = \frac{A^*z - C}{\langle z, -B \rangle + D^*}$$

叫做 φ 的伴随映射, σ 的相关矩阵为

$$m_\sigma = \begin{pmatrix} A^* & -C \\ -B^* & D^* \end{pmatrix} = m_\varphi^\times,$$

其中 $m_\varphi^\times$ 是 m_φ 的 Krein 伴随矩阵.

特别地, $\varphi \in \text{LFT}(B_N)$ 是一个全纯自同构当且仅当 m_φ 是 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上 Krein 等距的一个非零倍数. 详见文献 [10].

定义 2.3 $\mathbb{C}^N$ 中单位球上 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}(B_N)$ 是指 B_N 上的全纯函数, 满足

$$\mathcal{D}(B_N) = \left\{ f \in H(B_N) : \sum_{s=0}^{\infty} \|f_s\|_2^2 (s+1) < \infty \right\},$$

其中 f_s 是 f 的齐次展开式中次数为 s 的齐次多项式, $\|\cdot\|_2$ 是 $L^2(\sigma_N)$ 范数. 由范数的等价性, $\mathcal{D}(B_N)$ 也可由下式给出:

$$\mathcal{D}(B_N) = \left\{ f \in H(B_N) : |f(0)|^2 + \int_{B_N} |\nabla f(z)|^2 d\nu_N(z) < \infty \right\},$$

其中 $\nu_N(z)$ 是 B_N 上规范化的体积测度, 或者

$$\mathcal{D}(B_N) = \left\{ f(z) = \sum_m a_m z^m \in H(B_N) : \sum_m |m| \frac{m!}{|m|!} |a_m|^2 < \infty \right\},$$

其中 $\sum_m a_m z^m$ 是 $f(z)$ 的 Taylor 展开式.

很明显 Dirichlet 空间是单位球上解析函数组成的 Hilbert 空间, 它的再生核函数 K_w 为

$$K_w(z) = 1 + \ln \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle}.$$

将 $\mathcal{D}(B_N)$ 与常值函数的商 $\mathcal{D}(B_N)/\mathbb{C}$ 记为 $\mathcal{D}_0$, 则

$$\|f\|_{\mathcal{D}_0}^2 = \int_{B_N} |\nabla f(z)|^2 d\nu_N(z)$$

赋予 $\mathcal{D}_0$ 一个范数. $\mathcal{D}_0$ 也可看成 Dirichlet 空间中在 0 点取 0 值的函数全体组成的子空间.

Dirichlet 空间上由 φ 诱导的复合算子 C_φ 由下式给出:

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

对任意 $f \in \mathcal{D}(B_N)$. 考虑 C_φ 在 $\mathcal{D}_0$ 上的限制, 有

$$\widetilde{C}_\varphi f = C_\varphi f - (C_\varphi f)(0).$$

3 分式线性复合算子的伴随

这一节给出 $\mathcal{D}(B_N)$ 和 $\mathcal{D}_0$ 上有界的分式线性复合算子的伴随.

定理 3.1 设 $\varphi(z) = (Az + B)(\langle z, C \rangle + D)^{-1}$ 是 B_N 上的分式线性映射. 若 C_φ 在 $\mathcal{D}(B_N)$ 上有界, 则对于任意 $f \in \mathcal{D}(B_N)$, 有

$$C_\varphi^* f(z) = f(0)K_{\varphi(0)}(z) + C_\sigma f(z) - f(\sigma(0)),$$

其中 $\sigma(z) = (A^*z - C)(\langle z, -B \rangle + D^*)^{-1}$.

证明 考察 C_φ^* 在 $K_w(z)$ 上的作用, 有

$$\begin{aligned} C_\varphi^* K_w(z) &= K_{\varphi(w)}(z) \\ &= 1 + \ln \frac{1}{1 - \langle z, \varphi(w) \rangle} \\ &= 1 + \ln \frac{1}{1 - \langle z, \frac{Aw+B}{\langle w, C \rangle + D} \rangle} \\ &= 1 + \ln \frac{\langle C, w \rangle + D^*}{\langle C, w \rangle + D^* - \langle z, Aw + B \rangle} \\ &= 1 + \ln \frac{\langle z, -B \rangle + D^*}{\langle z, -B \rangle + D^* - \langle A^*z - C, w \rangle} \\ &\quad + \ln(\langle C, w \rangle + D^*) - \ln(\langle z, -B \rangle + D^*) \\ &= 1 + \ln \frac{1}{1 - \langle \frac{A^*z - C}{\langle z, -B \rangle + D^*}, w \rangle} + \ln \frac{\langle C, w \rangle + D^*}{D^*} - \ln \frac{\langle z, -B \rangle + D^*}{D^*} \\ &= \left(1 + \ln \frac{1}{1 - \langle \sigma(z), w \rangle} \right) - \left(1 + \ln \frac{1}{1 - \langle -\frac{C}{D^*}, w \rangle} \right) \\ &\quad + \left(1 + \ln \frac{1}{1 - \langle z, \frac{B}{D} \rangle} \right) \\ &= K_w(\sigma(z)) - K_w(\sigma(0)) + K_{\varphi(0)}(z). \end{aligned}$$

另外, 再考虑 C_φ^* 作用到常值函数 1 上

$$\begin{aligned} C_\varphi^* 1 &= C_\varphi^* K_0(z) \\ &= C_\sigma K_0(z) - K_0(\sigma(0)) + K_{\varphi(0)}(z) \\ &= K_{\varphi(0)}(z), \end{aligned}$$

得到

$$C_\varphi^*(K_w(z) - K_w(0)) = C_\sigma K_w(z) - K_w(\sigma(0)).$$

由于 $K_w(z) \in \mathcal{D}(B_N)$ 张成 $\mathcal{D}(B_N)$ 的一个稠密集, 所以 $K_w(z) - K_w(0) \in \mathcal{D}_0$ 张成 $\mathcal{D}_0$ 的一个稠密集.

对于任意 $f \in \mathcal{D}(B_N)$, 有 $f(z) - f(0) \in \mathcal{D}_0$, 所以

$$C_\varphi^*(f(z) - f(0)) = C_\sigma(f(z)) - f(\sigma(0)).$$

因此

$$C_\varphi^* f(z) = f(0)K_{\varphi(0)}(z) + C_\sigma(f(z)) - f(\sigma(0)).$$

结论得证.

由上述定理的证明, 容易得到以下推论:

推论 3.2 设 $\varphi(z) = (Az + B)(\langle z, C \rangle + D)^{-1}$ 是 B_N 上的分式线性映射. 如果 $\widetilde{C}_\varphi$ 在 $\mathcal{D}_0$ 上有界, 则 $\widetilde{C}_\varphi^* = \widetilde{C}_\sigma$, 其中 $\sigma(z) = (A^*z - C)(\langle z, -B \rangle + D^*)^{-1}$.

4 正规性与本性正规性

本节将讨论 $\mathcal{D}(B_N)$ 和 $\mathcal{D}_0$ 上哪些分式线性复合算子是正规或本性正规的. 首先考察一类非常特殊的算子: 酉算子.

定理 4.1 设 φ 是 B_N 上的解析自映射. 则 C_φ 是 $\mathcal{D}(B_N)$ 上的酉算子当且仅当 $\varphi(z) = Uz$, 其中 U 是 $N \times N$ 的酉矩阵.

证明 充分性显然可证.

现在设 C_φ 是 $\mathcal{D}(B_N)$ 上的一个酉算子, 则在 $\mathcal{D}(B_N)$ 上 $C_\varphi C_\varphi^* = I$, 我们得到

$$K_w(z) = C_\varphi C_\varphi^* K_w(z) = K_{\varphi(w)}(\varphi(z)),$$

对任意 $z, w \in B_N$ 成立. 因此

$$\ln \frac{1}{1 - \langle \varphi(z), \varphi(w) \rangle} = \ln \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle}.$$

因为 $\ln(1 - \zeta)$ 是单位圆盘上的单叶函数, 所以 $\langle \varphi(z), \varphi(w) \rangle = \langle z, w \rangle$ 对于任意 $z, w \in B_N$ 成立.

如果 $z = w$, 则 $|\varphi(z)| = |z|$ 对所有 $z \in B_N$ 成立. 因此 $\varphi(z) = Uz$, 且 U 是一个酉矩阵, 证毕.

对于 $\mathcal{D}_0$ 上的复合算子, 如果是一个酉算子, 则有以下结论.

定理 4.2 设 φ 是 B_N 上的解析自映射, 则 $\widetilde{C}_\varphi$ 是 $\mathcal{D}_0$ 上酉算子当且仅当 φ 是 B_N 上的全纯自同构.

证明 若 $\widetilde{C}_\varphi$ 是 $\mathcal{D}_0$ 上酉算子, 则 $\widetilde{C}_\varphi$ 可逆, 所以 $\varphi \in \text{Aut}(B_N)$.

另一方面, 设 $\varphi \in \text{Aut}(B_N)$, 则 $\varphi \in \text{LFT}(B_N)$, 因此可设

$$\varphi(z) = \frac{Az + B}{\langle z, C \rangle + D},$$

且

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}$$

是 Krein 空间 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上 Krein 等距的非零常数倍. 不失一般性, 假设 m_φ 就是一个 Krein 等距. 因此有

$$\begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^* & C \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix} = 0.$$

易得 $A^*A - CC^* = I_N$, $|B|^2 - |D|^2 = -1$, $A^*B - CD = 0$. 由推论 3.2, $\widetilde{C}_\varphi^* = \widetilde{C}_\sigma$ 并且

$$\sigma(z) = \frac{A^*z - C}{\langle z, -B \rangle + D^*},$$

以及

$$m_\sigma = \begin{pmatrix} A^* & -C \\ -B^* & D^* \end{pmatrix}.$$

故

$$m_\sigma m_\varphi = \begin{pmatrix} A^*A - CC^* & A^*B - CD \\ -B^*A + D^*C^* & -|B|^2 + |D|^2 \end{pmatrix} = I_{N+1},$$

这说明 $\sigma \circ \varphi = I$. 在 $\mathcal{D}_0$ 上, 故 $\widetilde{C}_\varphi \widetilde{C}_\sigma = I$, 因此在 $\mathcal{D}_0$ 上 $C_\varphi \widetilde{C}_\varphi^* = I$. 这样证明 $\widetilde{C}_\varphi$ 是一个酉算子.

注 事实上, 定理 4.2 说明了 $\mathcal{D}_0$ 的 Möbius 不变性.

由定理 4.2 的证明, 容易得出以下的推论.

推论 4.1 如果分式线性映射 φ 是一个全纯自同构, 则 φ 的伴随映射 $\sigma = \varphi^{-1}$; 而且在 $\mathcal{D}_0$ 上 $\widetilde{C}_\varphi^* = \widetilde{C}_\varphi^{-1}$.

因为 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}(B_N)$ 可以看成是权值 $\beta(s) = (s+1)$ 的加权 Hardy 空间 $H^2(\beta, B_N)$, 由文献 [18] 中的定理 8.2, 我们得到下面关于复合算子正规性的充分必要条件.

引理 4.1 设 φ 为单位球到自身的解析自映射, C_φ 在 $\mathcal{D}(B_N)$ 上有界, 则 C_φ 在 $\mathcal{D}(B_N)$ 上正规当且仅当 $\varphi(z) = Az$, 其中 A 是一个 $N \times N$ 正规矩阵, 且 $\|A\| \leq 1$.

$\mathcal{D}_0$ 上分式线性复合算子的正规性刻画起来有一定的困难. 我们将给出一些充分条件. 为了给出这些条件, 首先需要下面关于球上分式线性映射的分类.

定义 4.1 设 $\varphi \in \text{LFT}(B_N)$. 如果 φ 在 B_N 内有不动点, 则它叫作椭圆型的. 如果 φ 在 B_N 内没有不动点, 则它叫作非椭圆的. 对于一个非椭圆的 φ , 在它的 Denjoy-Wolff 点处有一个不大于 1 的正的边界收缩系数, 记作 $\alpha(\varphi)$, 如果 $\alpha(\varphi) < 1$, 称 φ 是双曲型的; 如果 $\alpha(\varphi) = 1$, 称 φ 是抛物型的.

首先来回顾一些矩阵论的概念. 对于一个矩阵 $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$, 如果 $\text{Re} w^* M w \leq 0$ 对于任意的 $w \in \mathbb{C}^N$ 成立, 则 M 称作是耗散的; 如果 M 的所有特征值的实部均小于 0, 则称作渐进稳定的. 对于 B_N 的解析自映射 φ , 如果它有内部不动点 $Z_0 \in B_N$, 则定义 φ 在 Z_0 处的酉空间如下:

$$L_U(\varphi, Z_0) := \bigoplus_{|\lambda|=1} \ker(d\varphi_{Z_0} - \lambda I)^N.$$

换句话讲, $L_U(\varphi, Z_0)$ 是 $d\varphi_{Z_0}$ 的所有模为 1 的特征值对应的所有广义特征子空间的 (直) 和. 空间 $L_U(\varphi, Z_0)$ 的维数称作 φ 在 Z_0 处的酉指标, 通常记为 $u(\varphi, Z_0)$.

由文献 [15] 中的定理 3.2, 有以下引理:

引理 4.2 设 φ 是 B_N 上椭圆型分式线性映射, $p = u(\varphi, Z_0)$ 是其酉指标, 则 (B_N, φ) 共轭于 (B_N, ψ) , 且

$$\psi(z', z'') = (Uz', e^M z''), \quad (1)$$

其中 $(z', z'') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{N-p} \cap B^N$, U 是 p 阶酉矩阵, M 是 $N-p$ 阶耗散的渐进稳定矩阵.

定理 4.3 如果 φ 是 B_N 上酉指标为 p 的椭圆型分式线性映射, (B_N, φ) 共轭于 (B_N, ψ) 如 (1) 式, 则下面两条之一成立时, C_φ 在 $\mathcal{D}_0$ 上是本性正规的:

- (1) $e^M e^{M^*} = e^{M^*} e^M$;
- (2) $\|e^M\| < 1$.

证明 由于 φ 是椭圆型的, 则其 Denjoy-Wolff 点 $a \in B_N$. 设 φ_a 是交换 a 与 0 点的对合自同构. 令 ϕ 为 $\varphi_a \circ \varphi \circ \varphi_a$, 则 ϕ 是 B_N 上椭圆型分式线性映射, 且 $\phi(0) = 0$, $\widetilde{C_\phi} = \widetilde{C_{\varphi_a}} \widetilde{C_\varphi} \widetilde{C_{\varphi_a}}$. 由定理 4.2, $\widetilde{C_{\varphi_a}}$ 是一个酉算子, 所以 $\widetilde{C_\phi}$ 本性正规当且仅当 $\widetilde{C_\varphi}$ 是本性正规的. 类似于文献 [15] 中定理 3.2 的证明, 可以设

$$\phi(z) = \frac{A'z}{\langle z, C \rangle + 1}$$

对某个 $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 和 $C \in \mathbb{C}^N$ 成立. 酉空间 $L_U(\phi, 0)$ 是 p 维的, 因此存在 $\mathbb{C}^N$ 中线性无关的子集 $\Gamma_1 := \{u_1, \dots, u_p\}$ 满足:

- (i) $L_U(\phi, 0) = L := \text{span}(\Gamma_1)$.
- (ii) 对任意 $k = 1, \dots, p$, 有 $d(\varphi)_0(u_k) = \lambda_k u_k$, 对某个 $\lambda_k \in \mathbb{C}$ 成立.

下面考虑 p 维切片 $S_L := L \cap B_N$, 则 $\phi(S_L \cap \mathbb{C}u_k) \subseteq S_L \cap \mathbb{C}u_k$ 对任意 $k = 1, \dots, p$ 成立, 又由 Schwartz 引理 $\phi|_{S_L \cap \mathbb{C}u_k}$ 是一个自同构, 因此 ϕ 是 S_L 到 S_L 的一一满射. 因为 S_L 是一个 p 维球, 这说明 $\phi|_{S_L \cap \mathbb{C}u_k}$ 是一个可对角化酉矩阵. 通过旋转, 可以设

$$\phi(z) = \frac{Az' + A_1 z'', A'' z''}{\langle z, c \rangle + 1},$$

其中 $z = (z', z'') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{N-p} \cap B_N$, A 可对角化 $p \times p$ 酉矩阵, $A_1 \in \mathbb{C}^{p \times (N-p)}$, $A'' \in \mathbb{C}^{(N-p) \times (N-p)}$ 且 $c \in \mathbb{C}^{N-p}$, $\|c\| < 1$.

我们断定 $A_1 = 0$ 以及 $c = 0$. 事实上, 首先注意到对于任意 $x = (x', 0) \in \overline{S_L} \cup \partial B_N$, 可以得到

$$d(\phi)_x = \begin{pmatrix} A & A_1 - Ax' \cdot c^* \\ 0 & A'' \end{pmatrix}.$$

由文献 [19] 中的 Julia-Wolff-Carathéodory 定理 (与文献 [15] 中定理 3.2 的证明相仿), 我们得到 $\langle d(\phi)_x(v), \phi(x) \rangle = 0$ 对于所有 $v \in T_x^{\mathbb{C}} \partial B_N$ 成立. 特别地, 令 $x = \pm u_k$ ($k = 1, \dots, p$) 以及 $v = e_j$, $j = p+1, \dots, N$. 由 $\phi(\pm u_k) = \pm \lambda_k u_k$, 可得 $\langle d(\phi)_{\pm u_k}(e_j), u_k \rangle = 0$ 对于所有 $k = 1, \dots, p$ 和 $j = p+1, \dots, N$ 成立. 于是, $A_1 - Ax' \cdot c^* = 0$ 对于所有 $x' = \pm(u_k)'$, $k = 1, \dots, p$ 成立. 因此, $A_1 = 0$ 以及 $c = 0$. 这正是所需结果.

因此, 通过旋转, 我们把 ϕ 变成 ψ , 其中 ψ 具有下面的形式:

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix} z,$$

其中 A 是一个 p 阶酉矩阵, $A'' = e^M$, M 是一个耗散的渐进稳定矩阵. 所以 $\widetilde{C_\phi}$ 本性正规当且仅当 $\widetilde{C_\psi}$ 本性正规. 因为 A 是酉矩阵, 而且在 $\mathcal{D}_0$ 上 $\widetilde{C_\psi}^* = \widetilde{C_\sigma}$, 其中

$$\sigma(z) = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & e^{M^*} \end{pmatrix} z.$$

因此, 如果 $e^M e^{M^*} = e^{M^*} e^M$ 或 $\|e^M\| < 1$, 很明显 $\widetilde{C}_\psi$ 本性正规. 因此 $\widetilde{C}_\varphi$ 也是本性正规的, 这就证明了结论.

Siegel 上半平面 $\mathbb{H}_N$ 是指

$$\mathbb{H}_N = \{(w_1, \dots, w_N) = (w_1, w') \in \mathbb{C}^N, \operatorname{Im}(w_1) > \|w'\|^2\}.$$

B_N 上的非椭圆型分式线性映射共轭于 $\mathbb{H}_N$ 上一个形式非常漂亮的全纯自映射, 详见文献 [15]. 对于非椭圆型分式线性复合算子的本性正规性, 我们在开始讨论之前需要下面的定理.

定理 4.4 如果 φ 为 B_N 上的非椭圆型分式线性映射, σ 为 φ 的伴随映射, 则 $\sigma \circ \varphi$ 和 $\varphi \circ \sigma$ 只可能是 B_N 上的椭圆型或抛物型分式线性映射.

证明 不失一般性, 假设 e_1 为 φ 的 Denjoy-Wolff 点, 其边界收缩系数为 $\alpha = \alpha(\varphi)$. 由文献 [15] 中的引理 4.1, (B_N, φ) 共轭于 $(\mathbb{H}_N, \psi)$, 其中

$$\psi(z_1, z') = \frac{1}{\alpha}(z_1 + \langle z', b \rangle + c, Az' + d), \quad (z_1, z') \in \mathbb{H}_N,$$

且 $c \in \mathbb{C}$, $b, d \in \mathbb{C}^{N-1}$, $A \in \mathbb{C}^{(N-1) \times (N-1)}$ 满足文献 [15] 中引理 4.1(i)–(iii), 其中 $\mathbb{H}_N$ 是所谓的 Siegel 半平面, 且 $\psi = \sigma_C \circ \varphi \circ \sigma_C^{-1} : \mathbb{H}_N \rightarrow \mathbb{H}_N$, 其中 σ_C 是所谓的广义 Cayley 变换, 由下式给出:

$$\sigma_C(z_1, z') := \left(\frac{1+z_1}{1-z_1}, \frac{z'}{1-z_1} \right), \quad (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1}.$$

代入计算可得

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sigma_C^{-1} \circ \psi \circ \sigma_C(z) \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1+\alpha-c & b^* \\ -2d & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+c-\alpha \\ 2d \end{pmatrix}}{\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\alpha-\bar{c} \\ b \end{pmatrix} \rangle + 1 + c + \alpha} \end{aligned}$$

其相关矩阵为

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} 1+\alpha-c & b^* & 1+c-\alpha \\ -2d & 2A & 2d \\ 1-\alpha-c & b^* & 1+c+\alpha \end{pmatrix}.$$

伴随映射为

$$\sigma(z) = \frac{\begin{pmatrix} 1+\alpha-\bar{c} & -2d^* \\ b & 2A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\alpha-\bar{c} \\ b \end{pmatrix}}{\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-c+\alpha \\ -2d \end{pmatrix} \rangle + 1 + \bar{c} + \alpha}.$$

它的相关矩阵为

$$m_\sigma = m_\varphi^\times = \begin{pmatrix} 1+\alpha-\bar{c} & -2d^* & -1+\alpha+\bar{c} \\ b & 2A^* & -b \\ -1-\bar{c}+\alpha & -2d^* & 1+\bar{c}+\alpha \end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$m_\sigma m_\varphi = \begin{pmatrix} 4\alpha - 2\alpha(c + \bar{c}) + 4|d|^2 & 2\alpha b^* - 4d^* A & 2\alpha(c + \bar{c}) - 4|d|^2 \\ 2b\alpha - 4A^* d & 4A^* A & -2b\alpha + 4A^* d \\ -2\alpha(c + \bar{c}) + 4|d|^2 & 2\alpha b^* - 4d^* A & 4\alpha + 2\alpha(c + \bar{c}) - 4|d|^2 \end{pmatrix}.$$

即

$$\sigma \circ \varphi(z) = \frac{\begin{pmatrix} 4\alpha - 2\alpha(c + \bar{c}) + 4|d|^2 & 2\alpha b^* - 4d^*A \\ 2b\alpha - 4A^*d & 4A^*A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha(c + \bar{c}) - 4|d|^2 \\ -2b\alpha + 4A^*d \end{pmatrix}}{\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha(c + \bar{c}) + 4|d|^2 \\ 2\alpha b - 4A^*d \end{pmatrix} \rangle + 4\alpha + 2\alpha(c + \bar{c}) - 4|d|^2}.$$

若让 $\rho(z)$ 表示 $\sigma \circ \varphi(z)$, 则 $\rho(e_1) = e_1$, 且 ρ 的边界收缩系数为

$$\begin{aligned} \alpha(\rho) &= \langle d\rho_1(e_1), e_1 \rangle \\ &= d_1\rho_1(e_1) \\ &= \frac{(4\alpha - 2\alpha(c + \bar{c}) + 4|d|^2) \cdot 4\alpha - (-2\alpha(c + \bar{c}) + 4|d|^2) \cdot 4\alpha}{16\alpha^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

因此, 如果 $\rho = \sigma \circ \varphi$ 不是椭圆型的, 它一定是 B_N 上抛物型分式线性映射. 同理可证对 $\tau = \varphi \circ \sigma$ 也成立. 证毕.

注 对于以上定理, 确实存在 B_N 上双曲型的分式线性映射, 和它自身的伴随复合后成为椭圆型的. 例如, 令

$$\varphi(z) = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}}{\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \rangle + 10}$$

是 B_2 上双曲型分式线性映射, 它的伴随为

$$\sigma(z) = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}}{\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \rangle + 10}.$$

计算可得

$$\varphi \circ \sigma(z) = \sigma \circ \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle + 5}.$$

这是 B_2 上的一个椭圆型分式线性映射.

在文献 [16] 中, Bayart 定义了 B_N 上不稳定抛物型分式线性映射如下: $u \in \text{LFT}(B_N)$, 如果 u 满足:

- (1) u 在 $\overline{B_N}$ 内存在唯一一个不动点 τ , 而且 $\tau \in \partial B_N$;
- (2) u 在 τ 点的边界收缩系数为 1;
- (3) B_N 的任何一个非平凡的仿射子集都不可能是 u 的不动点集;

则称 u 是 B_N 上的不稳定抛物型分式线性映射.

对于 $U \in \text{LFT}(\mathbb{H}_N)$, 若

$$U(w_1, w') = (w_1 + 2i\langle w', \gamma \rangle + \beta, w' + \gamma),$$

其中 $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}^{N-1} \setminus \{0\}$ 以及 $\text{Im}(\beta) \geq \|\gamma\|^2$. 则 U 被称作 $\mathbb{H}_N$ 上广义 Heisenberg 变换. Bayart^[16] 有一个非常强大的定理是关于不稳定抛物型分式线性映射的, 参见以下引理:

引理 4.3 设 u 是 B_N 上不稳定抛物型分式线性映射. 则 u 共轭于 $\mathbb{H}_N$ 上一个广义 Heisenberg 变换.

由文献 [16] 中强大的谱定理和定理 4.4, 有以下定理.

定理 4.5 如果 φ 是 B_N 上一个非椭圆型分式线性映射, 且 $\varphi \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \varphi$ 都是不稳定的抛物型分式线性映射, 则在 $\mathcal{D}_0$ 上以下论断是等价的:

- (a) $\widetilde{C_\varphi}$ 是正规的;

(b) $\widetilde{C}_\varphi$ 是本性正规的;

(c) φ 与 σ 可交换, 即 $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$.

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 是显然的. 由推论 3.2, (c) 蕴涵 (a). 为了证明 (b) $\Rightarrow$ (c), 不失一般性, 设 e_1 是 φ 的 Denjoy-Wolff 点, 并假设 $\varphi \circ \sigma \neq \sigma \circ \varphi$, 记 $\rho = \sigma \circ \varphi$ 以及 $\tau = \varphi \circ \sigma$, 则 ρ 和 τ 都是 B_N 上不稳定抛物型分式线性映射. 由引理 4.3, (B_N, ρ) 共轭于 $(\mathbb{H}_N, \psi_\rho)$, 其中

$$\psi_\rho(z_1, z') = (z_1 + \langle z', \gamma \rangle + \beta, z' + \gamma), \quad (z_1, z') \in \mathbb{H}_N,$$

并且 (B_N, τ) 共轭于 $(\mathbb{H}_N, \psi_\tau)$, 其中

$$\psi_\tau(z_1, z') = (z_1 + \langle z', \gamma' \rangle + \beta', z' + \gamma'), \quad (z_1, z') \in \mathbb{H}_N,$$

以及 $\beta, \beta' \in \mathbb{C}$, $\gamma, \gamma' \in \mathbb{C}^{N-1}$, $\rho = \sigma_C^{-1} \circ \psi_\rho \circ \sigma_C$, $\tau = \sigma_C^{-1} \circ \psi_\tau \circ \sigma_C$, 其中 σ_C 是 Cayley 变换, $\sigma_C(z) = i(e_1 + z)/(1 - z_1)$.

因为 $\rho \neq \tau$, 则下面情形之一成立:

(i) $\beta \neq \beta'$, 令

$$f(w) = \exp(i\theta w_1),$$

则

$$(C_{\psi_\rho} - C_{\psi_\tau})f(w_1, 0') = (\exp(i\theta\beta) - \exp(i\theta\beta'))f(w).$$

这说明 $(C_{\psi_\rho} - C_{\psi_\tau})$ 有不可数多个特征值, 因此不可能是紧的, 与 (b) 矛盾.

(ii) $\beta = \beta', \gamma \neq \gamma'$, 一定存在 $2 \leq j \leq N$ 满足 $\gamma_j \neq \gamma'_j$, 仍令

$$f(w) = \exp(i\theta w_1),$$

则

$$\begin{aligned} & (C_{\psi_\rho} - C_{\psi_\tau})f(w_1, 0, \dots, 0, w_j, 0, \dots, 0) \\ &= (\exp(i\theta(\beta + \overline{\gamma_j}w_j)) - \exp(i\theta(\beta' + \overline{\gamma'_j}w_j)))f(w) \end{aligned}$$

这也说明 $(C_{\psi_\rho} - C_{\psi_\tau})$ 不紧. 无论 (i) 还是 (ii) 都说明 $(\widetilde{C}_{\psi_\rho} - \widetilde{C}_{\psi_\tau})$ 不紧. 证毕.

综合上面的论述, 易得下面关于 $\mathcal{D}(B_N)$ 上复合算子本性正规的一个定理.

定理 4.6 C_φ 在 $\mathcal{D}(B_N)$ 上本性正规当且仅当 $\widetilde{C}_\varphi$ 本性正规.

证明 由 $\mathcal{D}(B_N)$ 上的分式线性复合算子伴随公式 (定理 3.1), 有

$$C_\varphi C_\varphi^* f(z) = f(0)K_{\varphi(0)}(\varphi(z)) + C_\varphi(C_\sigma f(z)) - f(\sigma(0))$$

以及

$$C_\varphi^* C_\varphi f(z) = f(\varphi(0))K_{\varphi(0)}(z) + C_\sigma(C_\varphi f(z)) - f(\varphi(\sigma(0))),$$

两式相减得到结论.

5 最后的一点注记

与定理 4.4 的证明相似, 有

$$m_\varphi m_\sigma = \begin{pmatrix} 4\alpha - 2(c + \overline{c}) + |b|^2 & -4d^* + 2b^*A^* & 2(c + \overline{c}) - |b|^2 \\ -4d + 2Ab & 4AA^* & 4d - 2Ab \\ -2(c + \overline{c}) + |b|^2 & -4d^* + 2b^*A^* & 4\alpha + 2(c + \overline{c}) - |b|^2 \end{pmatrix},$$

因此若 $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$, 则

$$\begin{cases} (\alpha - 1)(c + \bar{c}) = 4|d|^2 - |b|^2, \\ AA^* = A^*A, \\ 2d^*(I - A) = b^*(A^* - \alpha I). \end{cases}$$

特别地, 与单位圆盘不同, $\varphi \circ \sigma$ 并不一定能与 $\sigma \circ \varphi$ 交换. 但是, 很明显, 如果 φ 是 B_N 上不稳定抛物型分式线性映射, 则 $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$, 因此不稳定抛物型分式线性映射诱导的复合算子在 $\mathcal{D}(B_N)$ 上本性正规.

在文献 [12] 中, 如果 $\varphi(e_1) = e_1$ 且 $|\varphi(\zeta)| = 1$, 当且仅当 $\zeta = e_1$ 并满足 $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$, 则 φ 称作抛物的; 如果 $\varphi = \sigma$ 则 φ 称作正抛物的. 这个定义看起来与我们前面关于抛物型分式线性映射的没有内部不动点且边界收缩系数为 1 的定义仿佛并不等价.

致谢 感谢编辑和审稿人提出宝贵意见.

参考文献

- 1 Zhou Z H, Shi J H. Compact composition operators on the Bloch space in polydiscs. *Sci China Ser A*, **44**(3): 286–291 (2001)
- 2 Zhou Z H. Composition operators on the Lipschitz space in polydiscs. *Sci China Ser A*, **46**(1): 33–38 (2003)
- 3 Chacón G, Chacón G. Some properties of composition operators on the Dirichlet spaces. *Acta Math Univ Comenianae*, **LXXIV**(2): 259–272 (2005)
- 4 Higdon W. The spectra of composition operators from linear fractional maps acting upon the Dirichlet space. *J Funct Anal*, **220**: 75–95 (2005)
- 5 Moorhouse J. Compact difference of composition operators. *J Funct Anal*, **219**: 70–92 (2005)
- 6 Zhou Z H, Chen R Y. On the composition operators on the Bloch space of several complex variables. *Sci China Ser A*, **48**(Sup): 392–399 (2005)
- 7 Cowen C, Gallardo-Gutiérrez E. A new class of operators and a description of adjoints of composition operators. *J Funct Anal*, **238**: 447–462 (2006)
- 8 María J, Vukotić D. Adjoints of composition operators on Hilbert spaces of analytic functions. *J Funct Anal*, **238**: 298–312 (2006)
- 9 Zhou Z H, Chen R Y. Weighted composition operators from $F(p, q, s)$ to Bloch type spaces. *Intern J Math*, **19**(8): 899–926 (2008)
- 10 Cowen C, MacCluer B. Linear fractional maps of the ball and their composition operator. *Acta Sci Math (Szeged)*, **66**: 351–376 (2000)
- 11 Shapiro J. Composition Operators and Classical Function Spaces. Berlin: Springer, 1993
- 12 MacCluer B, Weir R. Linear-fractional composition operators in several variables. *Integral Equations Operator Theory*, **53**: 373–402 (2005)
- 13 Bici C, Bracci F. Linear fractional maps of the unit ball: A geometric study. *Adv Math*, **167**: 256–287 (2002)
- 14 Cowen C, Crosby D, Horine T, et al. Geometric properties of linear fractional maps. *Indiana Univ Math J*, **55**: 553–577 (2006)
- 15 Bracci F, Contreras M, Díaz-Madrugal S. Classification of semigroups of linear fractional maps in the unit ball. *Adv Math*, **208**: 318–350 (2007)

- 16 Bayart F. A class of linear fractional maps of the ball and their composition operators. *Adv Math*, **209**: 649–665 (2007)
- 17 Gallardo-Gutiérrez E, Montes-Rodríguez A. Adjoints of linear fractional composition operators on the Dirichlet space. *Math Ann*, **327**: 117–134 (2003)
- 18 Cowen C, MacCluer B. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton: CRC Press, 1995
- 19 Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer, 1980